Effets des choix institutionnels d'enseignement sur les possibiblités d'apprentissage des étudiants. Cas des notions ensemblistes fonctionnelles dans la transition Secondaire/Supérieur

Ridha Najar

Université Paris Diderot (Paris 7)

Université Virtuelle de Tunis (ISEFC)

ECOLE DOCTORALE

Savoirs scientifiques : épistémologie, histoire des sciences, didactique des disciplines (ED 400)

Thèse en co-tutelle

Pour l'obtention du titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE PARIS-DIDEROT, PARIS 7

&

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE VIRTUELLE DE TUNIS

Spécialité : Didactique des mathématiques

Présentée et soutenue publiquement

Le 12 novembre 2010

par :

Ridha NAJAR

Effets des choix institutionnels d'enseignement sur les possibilités d'apprentissage des étudiants

Cas des notions ensemblistes fonctionnelles dans la transition Secondaire/Supérieur

Directeurs de thèse :

Michèle ARTIGUE & Houcine CHEBLI

Jury :

Michèle ARTIGUE	Professeur, Université Paris Diderot	Directeur
Houcine CHEBLI	Professeur, Université de Tunis El Manar	Directeur
Hikma SMIDA	Professeur, Université de Tunis El Manar	Rapporteur
Viviane DURAND-GUERRIER	Professeur, Université de Montpellier 2	Rapporteur
Jean-Baptiste LAGRANGE	Professeur, Université de Reims	Président
Belhassen DEHMAN	Professeur, Université de Tunis El Manar	Examinateur

Résumé

Se situant principalement dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique mais tirant aussi parti de travaux relevant d'approches cognitives sur la transition lycée-université notamment, notre thèse vise à comprendre et à expliquer les difficultés liées à l'enseignement et l'apprentissage des notions ensemblistes fonctionnelles dans la transition enseignement secondaire (ES)/Classes préparatoires scientifiques (CPS1) en Tunisie. La thèse s'articule autour de trois moments essentiels :
- une étude des rapports des institutions ES et CPS1 aux notions ensemblistes fonctionnelles ;
- une étude des rapports personnels des étudiants aux notions ensemblistes fonctionnelles à la fin des études secondaires et de leur évolution au fil de la première année des classes CPS1 ;
- la conception, implémentation et analyse d'une ingénierie didactique visant à remédier aux difficultés constatées.

S'appuyant sur des critères d'ordre anthropologique empruntés aux travaux de Bosch et al. sur la transition lycée-université mais aussi sur la notion de niveau de mise en fonctionnement des connaissances (Robert) et la distinction entre modes procédural et structurel d'intervention du savoir, l'étude des rapports des institutions ES (programmes de 1998) et CPS1 aux notions ensemblistes fonctionnelles met en évidence une rupture entre les environnements praxéologiques mis en place dans chacune des deux institutions et permet de la caractériser. Elle montre aussi un manque de cohérence dans l'institution ES en ce qui concerne la structuration du savoir ainsi qu'un écart important entre le topos de l'enseignant et celui de l'élève au niveau du discours technologico-théorique.

Pour l'étude des rapports personnels des étudiants de CPS1 aux notions ensemblistes fonctionnelles et de leur évolution, nous nous sommes appuyés sur deux tests : l'un *diagnostique* soumis à deux classes le premier jour de la rentrée universitaire, l'autre d'*évaluation* passé après deux trimestres d'enseignement. Le test diagnostique montre chez ces étudiants, choisis parmi les meilleurs bacheliers, une fragilité dans les connaissances théoriques relatives aux notions ensemblistes, des difficultés dans l'usage et la gestion du symbolisme mathématique lié à ces notions et dans la réalisation de tâches non familières. Le test d'évaluation met en évidence des progrès notables sur le plan de la connaissance du savoir enseigné et des possibilités de mobiliser ce savoir dans des tâches familières et moins familières. Il montre cependant également la persistance de difficultés concernant notamment l'usage et la gestion du symbolisme mathématique et la mise en œuvre du savoir enseigné dans la résolution de problèmes (mise en relation des données, adaptation des connaissances au contexte de résolution, identification de pas de raisonnement non indiqués, …). Il permet aussi d'identifier d'autres difficultés, dues notamment à la multiplicité des points de vue sous lesquels se présentent les notions fonctionnelles selon les cadres d'étude.

Ces résultats montrent les difficultés que rencontrent ces étudiants, malgré leur motivation et leur réussite scolaire antérieure, d'une part pour dépasser les ruptures et dysfonctionnements mis en évidence dans l'étude institutionnelle, d'autre part pour répondre aux exigences de travail de l'institution CPS1. Ceci est confirmé par les réponses des étudiants à un questionnaire visant à étudier l'effet de leurs modes de travail personnel et l'influence des contraintes institutionnelles sur leurs possibilités d'apprentissage. A partir de ces résultats et en s'appuyant sur les travaux de Castela concernant les composantes pratiques des technologies nous avons conçu et expérimenté une ingénierie didactique visant à remédier à ces difficultés. Cette ingénierie, bien que très contrainte et limitée à quelques séances, a permis d'obtenir des progrès sur le plan de la mise en œuvre des connaissances dans l'exploration stratégique de l'espace de résolution, de la rédaction et de l'exploitation des ressources sémiotiques mises en jeu dans les problèmes. Des difficultés persistent néanmoins concernant la manipulation du formalisme symbolique dans des expressions particulièrement complexes et la possibilité de procéder à des changements de points de vue adéquats. L'ingénierie a aussi permis de montrer la difficulté que rencontrent les étudiants à prendre en compte efficacement les spécificités du travail fonctionnel dans le cadre linéaire.

En guise de conclusion, notre recherche montre, nous semble-t-il, la pertinence d'une approche anthropologique institutionnelle dans la mise en évidence et la compréhension des difficultés résultant de discontinuités dans les choix d'enseignement des notions ensemblistes fonctionnelles entre le Secondaire et le Supérieur, met en évidence le rôle essentiel que jouent le monde ensembliste et les ostensifs associés dans l'activité mathématique fonctionnelle à l'université, et la nécessité de prendre en charge de façon plus explicite l'enseignement des moyens de gestion des ressources sémiotiques et des connaissances d'ordre pratique en jeu dans la résolution des problèmes.

Mots clés : transition Secondaire/Supérieur, notions ensemblistes fonctionnelles, praxéologie mathématique, résolution de problèmes, composantes théorique/pratique d'une technologie.

Remerciements

Ce travail a été réalisé sous la direction de Madame Michèle Artigue, Professeur des Universités de Paris Diderot-Paris 7 et la codirection de Monsieur Houcine Chebli, Professeur à la Faculté des Sciences de Tunis.

Je tiens à exprimer mes remerciements les plus sincères à Madame Michèle Artigue, pour la générosité sans limite avec laquelle elle a su me faire profiter de son savoir et de son expérience, pour son soutien, ses encouragements aux moments difficiles et l'attention constante qu'elle a portée à ce travail. Son regard critique, sa rigueur, son exigence dans la précision des idées ont toujours été mêlés à sa gentillesse et son optimisme.

Je remercie très chaleureusement Monsieur Houcine Chebli pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail, pour ses encouragements et son soutien moral. Je le remercie aussi de m'avoir épaulé dans les jours les plus difficiles et ce malgré ses lourdes charges.

Je remercie très vivement Madame Viviane Durand-Guerrier et Madame Hikma Smida qui m'ont fait l'honneur de consacrer leur temps à rapporter sur ma thèse. Qu'elles veuillent bien recevoir mes respectueux remerciements pour l'attention particulière qu'elles ont accordée à ce travail.

Je remercie Monsieur Jean-Baptiste Lagrange qui me fait l'honneur de présider le jury de soutenance de cette thèse.

Je remercie Monsieur Belhassen Dehman qui a bien voulu accepter de faire partie du jury de cette thèse.

Mes remerciements vont également à l'ensemble du laboratoire LDAR au sein duquel j'ai pu profiter d'une infrastructure et d'un environnement propice au travail. Je dois également remercier tous les membres de l'IREM de Paris 7 qui m'ont accueilli pendant ces années de préparation de thèse dans une ambiance conviviale et amicale.

Mes remerciements s'adressent aussi à l'Institut Supérieur de l'Education et de la Formation Continue de Tunis, ainsi qu'à l'unité de recherche de physico-chimie moléculaire de la Marsa, pour leur soutien financier lors de mes stages de recherche à Paris.

Que tous ceux qui m'ont aidé et soutenu tout au long de mon travail trouvent ici l'expression de ma sincère reconnaissance.

Table des matières

Introduction et problématique

I. Introduction

Un parcours professionnel de plus d'une vingtaine d'année dans l'enseignement, au Secondaire puis dans les classes préparatoires scientifiques, nous a permis de constater les difficultés que rencontrent les élèves et étudiants[1] (tunisiens) dans l'usage des notions ensemblistes et du formalisme mathématique dans leur pratique des mathématiques, et ceci au fil des réformes qui se sont succédées depuis celle des mathématiques modernes dans l'enseignement secondaire tunisien. Une première vision globale qui ressort de notre expérience d'enseignement, nous conduit à situer l'origine de ces difficultés à deux niveaux :

Le premier niveau concerne l'écologie des notions ensemblistes et de logique dans l'institution du Secondaire :

Les notions ensemblistes et les éléments de logique, qui ont vu leur apparition dans l'enseignement secondaire avec la réforme des "mathématiques modernes" dans les années soixante dix, n'ont pas complètement disparu dans les réformes ultérieures qui lui ont succédé, comme ce fut le cas pour les structures algébriques et l'algèbre linéaire. L'institution du Secondaire a choisi de garder l'usage de ces notions tout en modifiant leur écologie. Elle recommande ainsi de les introduire dans différents thèmes d'étude, au fur et à mesure des besoins d'enseignement, tout en stipulant de ne pas les considérer comme des objectifs d'apprentissage et d'éviter tout exposé général concernant ces concepts.

Cette situation crée une certaine ambiguïté institutionnelle quant à l'importance à accorder aux dites notions dans l'enseignement et laisse les choix sous la responsabilité du professeur de lycée et l'influence de ses rapports personnels à ces objets de savoir. L'élève se trouve ainsi d'une année à l'autre contraint de manipuler des notions et des symboles introduits sur le tas et au gré des besoins, et souvent sans que le sens de ces notions ne soit clarifié. L'absence de moments d'étude spécifiques visant à travailler sur le sens des notions ensemblistes et de logique introduites et sur l'utilisation du symbolisme associé ne semble pas donner des résultats satisfaisants. Ainsi n'est-il pas rare de rencontrer de nouveaux bacheliers, ayant obtenu le baccalauréat avec mention, ne pas pouvoir donner une définition correcte des notions d'application ou de bijection, ou confondre intersection et réunion, image et antécédent, implication et équivalence...

Le deuxième niveau où nous situons a priori l'origine des difficultés est celui de « l'obstacle du formalisme » dans l'institution du supérieur :

[1] Nous désignerons toujours par « élève » un apprenant au niveau Secondaire (Lycée) et par « étudiant » un apprenant au niveau Supérieur (Université).

A l'entrée à l'université, les enseignants du Supérieur considèrent généralement que les concepts de base de la théorie des ensembles et les règles élémentaires de logique ont été suffisamment manipulés par les nouveaux étudiants dans leur cursus Secondaire, pour leur être devenu familiers. Ils supposent de ce fait que les connaissances associées sont acquises. Ceci conduit à passer souvent rapidement sur le premier chapitre du cours d'Algèbre, traditionnellement consacré à l'étude de ces notions et de certaines de leurs extensions. Plus généralement, le symbolisme mathématique utilisé dans l'enseignement des mathématiques formelles du Supérieur n'est pas considéré comme un enjeu explicite d'enseignement. On suppose souvent que son usage par les étudiants va de soi s'ils ont compris les notions qui y sont engagées et qu'il n'est pas nécessaire de lui attacher une attention particulière. Cet état mène les étudiants à développer des mécanismes de travail peu réfléchi concernant l'usage du symbolisme mathématique, les conduisant souvent à des obstacles difficiles à surmonter.

Ce constat, n'est pas spécifique au système d'enseignement tunisien, dans leurs travaux sur l'enseignement de l'algèbre linéaire à l'université, Dorrier, Sierpinska et al. ont pointé de telles difficultés, qu'ils désignent par « *l'obstacle du formalisme* ». Sierpinska et al. précisent (1999, p. 12)[2] :

« *L'obstacle du formalisme se manifeste chez les étudiants qui opèrent sur la forme des expressions, sans considérer ces expressions comme faisant référence à autre chose qu'à elles-mêmes. Un des symptômes en est la confusion entre différentes catégories d'objets mathématiques ; par exemple, les ensembles sont traités comme des éléments d'ensembles, les transformations comme des vecteurs, les relations comme des équations, les vecteurs comme des nombres, et ainsi de suite. L'obstacle du formalisme fait produire aux étudiants un discours qui a les apparences du discours utilisé par l'enseignant ou le manuel. Pour être efficaces en tant qu'étudiants, ceux-ci vont souvent développer des automatismes. Un de ces automatismes est de construire une matrice et de la réduire à chaque fois qu'ils le peuvent, quelle que soit la question qui leur est demandée* »

Cette situation nous a incités à consacrer notre thèse à l'étude des effets des choix institutionnels concernant l'enseignement des notions ensemblistes et du formalisme mathématique, dans la transition Secondaire/Supérieur, sur les possibilités d'apprentissage des étudiants entrant à l'Université.

II. Délimitation du sujet de la thèse et première formulation des questions de recherche

L'omniprésence du formalisme mathématique dans les différents domaines mathématiques enseignés dans le Supérieur et son intervention à tous les niveaux de l'activité mathématique, nous incitent, pour des raisons d'efficacité et d'efficience de la recherche, à délimiter le champ des notions mathématiques sur lequel nous portons notre travail et à circonscrire le domaine d'activité où nous menons nos observations et nos analyses. En même temps, cette délimitation doit tenir compte de la transition Secondaire/Supérieur, dimension essentielle de notre problématique. Pour ces raisons, nous choisissons pour notre thèse l'étude de

[2] Traduction. Tanguay, 2002, p. 37.

l'enseignement des notions fonctionnelles dans leur aspect ensembliste et algébrique, et les formes d'intervention de ces notions dans l'activité de résolution de problème. Ce choix se justifie par les deux facteurs suivants :

Le premier facteur concerne le choix des notions fonctionnelles :

Les notions d'application et de fonction et les notions ensemblistes qui leur sont rattachées (bijection, bijection réciproque, image d'un ensemble, image réciproque…) sont forts présentes dans l'enseignement secondaire comme dans l'enseignement supérieur. Leur intervention dans les différents domaines mathématiques, les possibilités qu'elles offrent pour unifier certains thèmes d'étude (classes de fonctions, transformations géométriques, morphismes de structures algébriques…), l'économie de pensée qu'elles permettent dans la résolution des problèmes (résolution d'équations, transfert et conservation de propriétés, recherche d'ensembles de points, modélisation…), leur attribuent, avec d'autres fonctionnalités, une grande importance dans l'enseignement des mathématiques, au Secondaire comme au Supérieur. De plus, l'usage de ces notions, d'un point de vue ensembliste et algébrique (y compris celui de l'algèbre linéaire au Supérieur), fait souvent intervenir d'autres objets de la théorie des ensembles et met en œuvre tout le langage et le symbolisme ensembliste et de logique. Ces considérations font des notions fonctionnelles un candidat privilégié pour l'étude de notre problématique.

Notons que les études didactiques relatives au concept de fonction abondent. Ces études se sont intéressées à plusieurs aspects et divers rôles de ce concept : conception de l'objet fonction chez les élèves (Vinner, 1989 ; Dubinsky & Harel, 1992) , rôles que jouent les différents registres de représentations sémiotiques (numérique, algébrique, graphique, tableau de variation) dans l'opération de conceptualisation et dans la résolution de problèmes (Chauvat, 1999 ; Maschietto, 2001 ; Rogalski, 1990), étude de propriétés analytiques et/ou topologiques (limite, dérivée, différentielle, tangente…) liées aux fonctions (Cornu, 1983 ; Artigue 1993 ; Bloch, 2000 ; Praslon, 2000 ; Ghedemsi, 2008).

En ce qui concerne notre recherche, nous nous intéressons aux formes d'intervention et aux modes d'usage des notions fonctionnelles, particulièrement dans leur aspect ensembliste et algébrique, dans la résolution des problèmes. Dans ce contexte, nous nous restreignons dans l'institution du supérieur aux notions fonctionnelles étudiées dans le cours d'Algèbre (aspects ensemblistes et leurs extensions en algèbre des structures et en algèbre linéaire). Nous écartons par conséquent de notre travail l'étude des propriétés analytiques et topologiques de ces notions.

Le deuxième facteur concerne l'activité de résolution de problèmes :

Le rôle que joue la résolution de problèmes dans l'élaboration des connaissances mathématiques et le développement des habilités intellectuelles des sujets lui assigne une place primordiale dans l'apprentissage des mathématiques. Des courants pédagogiques (comme *le courant du Problem Solving*) l'adoptent même comme moyen d'enseigner les mathématiques. Son importance institutionnelle provient aussi du fait qu'elle constitue (dans le système d'enseignement tunisien, comme dans plusieurs autres systèmes) la base de l'évaluation en mathématiques à tous les niveaux de l'enseignement, du Primaire au Supérieur. La réussite des élèves et étudiants en mathématiques se trouve ainsi étroitement liée à leur possibilité de mettre en œuvre les savoirs enseignés au service de la résolution de problèmes.

En didactique des mathématiques, la résolution de problèmes constitue un large champ de recherche. La variété des facteurs dont dépendent l'activité de résolution de problèmes et leur complexité a conduit les chercheurs à adopter des approches diverses pour son étude : modélisation logique (Durand-Guerrier, 1996 ; Durand-Guerrier et Arsac, 2003), approche cognitive (Duval, 1995, 2000, 2003), preuve et démonstration (Arsac, 1996 ; Balacheff, 1988) ; mathematical thinking and problem solving (Schoenfeld, 1985. Dubinsky, 1991 ; Barnard & Tall, 1997, Tall, 2002)…

Notre propos dans cette recherche n'est pas de nous limiter à l'une de ces approches, ni d'étudier l'activité de résolution de problème en tant que telle. Nous nous intéressons plutôt à identifier les difficultés éventuelles qu'éprouvent les étudiants dans l'activité de résolution de problèmes, dues à l'usage du symbolisme mathématique, à leurs sources et aux moyens de remédier à ces difficultés. Comme nous l'avons indiqué au début, nous nous intéressons dans ce contexte particulièrement aux effets résultants des choix institutionnels dans la transition Secondaire/Supérieur concernant l'enseignement des notions ensemblistes et fonctionnelles. Nous nous référons dans notre travail à certains des travaux cités ci-dessus, que nous préciserons ultérieurement.

Choix de la population d'étude

Pour la partie expérimentale de cette recherche, nous avons choisi de mener les expérimentations avec nos étudiants de première année des classes préparatoires scientifiques de l'institut préparatoire aux études d'ingénieurs de Tunis (filière MP : Mathématiques-Physique). Deux facteurs nous ont suggéré d'adopter ce choix :

Le premier facteur est lié à notre objectif de recherche. Pour mener à bien l'étude des effets des choix institutionnels sur les rapports des étudiants au formalisme mathématique, nous sommes amenés à atténuer, autant que faire se peut, les effets des divers autres facteurs (sociaux, psychologiques, cognitifs…) intervenant dans les processus d'apprentissage. De tels facteurs se répercutent naturellement sur la motivation des étudiants, leur intérêt aux mathématiques et peuvent de cette manière fortement influencer les résultats expérimentaux de la recherche. Les étudiants de la filière MP des classes préparatoires scientifiques sont sélectionnés parmi les meilleurs bacheliers de la section "Mathématiques" du Secondaire. Les mathématiques constituent aussi la matière de base dans les deux années d'étude dans les classes préparatoires, et le classement des étudiants dans le concours sanctionnant le cycle préparatoire, pour l'entrée aux écoles d'ingénieurs, est fortement conditionné par leurs résultats dans l'épreuve de mathématiques. Ces facteurs font que les sujets de cette institution, en plus d'être de bons bacheliers, sont fortement investis dans le projet institutionnel d'enseignement/apprentissage, et le système de concours sanctionnant leurs études les incite à déployer le plus d'efforts possibles pour réussir. Pour ces raisons, nous considérons que les étudiants de cette institution constituent une population se situant dans des conditions favorables pour les expérimentations visées.

Le deuxième facteur qui a motivé notre choix concerne la réalisation de la partie expérimentale de la recherche et les contraintes institutionnelles qui pèsent sur la possibilité d'effectuer les expérimentations.

La partie expérimentale de notre recherche, que nous détaillerons ultérieurement, est composée de trois parties essentielles : test diagnostique, test d'évaluation et ingénierie didactique. La réalisation de ces différentes expérimentations requiert une certaine disponibilité de la part des étudiants et de leur enseignant, une bonne connaissance de l'enseignement dispensé, des aménagements horaires, ainsi que des interventions au niveau de l'enseignement. Or, nous avons trouvé difficile, voire même impossible, de satisfaire ces conditions avec des étudiants autres que les nôtres, et ce pour diverses raisons. D'une part, il y a le temps que doivent consacrer, enseignant et étudiants, à la réalisation des expérimentations, chose difficile à concilier dans une classe préparatoire avec les contraintes horaires, d'autre part, le fait qu'il n'y a pas encore de tradition d'études didactiques dans nos institutions universitaires, ce qui rend difficile de convaincre enseignants et/ou étudiants de l'intérêt de telles études et de les amener à adhérer à un projet de recherche didactique.

Pour contourner toutes ces difficultés, nous avons été contraints de mener les expérimentations avec nos propres étudiants, d'insérer le test d'évaluation dans l'évaluation ordinaire de la classe et d'effectuer l'ingénierie didactique avec un groupe réduit d'étudiants volontaires, en donnant aux cinq séances d'ingénierie le statut de séances de soutien et de consolidation de niveau.

Les questions de recherche

Compte tenu des facteurs que nous venons de préciser, déterminant l'environnement thématique et expérimental de notre recherche, nous orientons notre travail de thèse autour des questions suivantes :

1) Quelles sont les notions fonctionnelles et les notions ensemblistes associées, étudiées dans l'enseignement secondaire (ES) ? Comment est organisé leur enseignement et quelles sont les formes de leur intervention dans les exercices et problèmes ?

2) Comment est organisé l'enseignement de ces notions dans l'institution de première année des classes préparatoires scientifiques (CPS1) ? Quelles évolutions subissent-elles dans les différents thèmes d'étude, et quelles sont les formes de leur intervention dans les exercices et problèmes ?

3) Quelles connaissances ont les étudiants à propos des notions ensemblistes fonctionnelles à la fin de leurs études secondaires ?

4) Comment évoluent les rapports des étudiants aux notions ensemblistes fonctionnelles et au symbolisme mathématique dans l'institution CPS1 ?

5) Quelles sont les difficultés éventuelles qu'éprouvent les étudiants dans l'activité de résolution de problème, dues à l'usage des notions fonctionnelles et du symbolisme mathématique ? A quel niveau se situent ces difficultés, et quelles sont leurs origines ?

6) Quelles actions didactiques peut-on entreprendre pour aider les étudiants à surmonter les difficultés observées ?

Chapitre I : Cadres théoriques et organisation de la thèse

Dans ce chapitre nous décrivons en premier lieu l'essentiel des cadres théoriques auxquels nous avons eu recours dans notre travail. Ceux-ci s'appuient conjointement sur des travaux de l'école francophone de didactique des mathématiques et des travaux anglophones concernant la construction des connaissances mathématiques et la pensée mathématique avancée (Advanced Mathematical Thinking (AMT)). Nous évoquons ensuite un ensemble de travaux de didactique des mathématiques menés dans divers pays qui se sont intéressés aux difficultés d'enseignement et d'apprentissage résultant de la transition Secondaire/Supérieur. Nous finissons en précisant l'organisation générale de la thèse.

I. Cadres Théoriques

Pour répondre aux questions de notre recherche, nous avons eu recours à divers outils émergeant des recherches en didactique des mathématiques. La théorie anthropologique du didactique constitue le cadre général des analyses que nous effectuons concernant les contenus mathématiques, les rapports institutionnels et les rapports personnels aux objets de savoir enseignés. Pour étudier les différentes formes d'usage des connaissances mathématiques et les apprentissages en jeu dans la résolution de problèmes, nous nous référons d'une part aux travaux de Dubinsky dans le cadre de la théorie APOS et de Tall distinguant trois mondes mathématiques concernant la construction et l'usage des concepts mathématiques chez un sujet, et d'autre part au travail de Robert concernant la mise en fonctionnement des connaissances mathématiques dans la résolution des problèmes.

I.1. Théorie anthropologique du didactique

La Théorie Anthropologique du Didactique (TAD), initiée par Chevallard (1989), situe la didactique des mathématiques dans le vaste champ de l'anthropologie, c'est à dire de l'étude de l'homme en général. Cette approche suppose que le fonctionnement des systèmes didactiques est conditionné par celui des institutions de la société dans laquelle ces systèmes prennent place.

I.1.1. Termes primitifs : Objet, Individu, Institution, Rapport au Savoir

Le point de départ de l'approche anthropologique est que *« tout est objet »* : l'école, le professeur, le savoir, l'apprentissage, la fonction logarithme… L'auteur distingue néanmoins trois types d'objets particuliers: *individu* ***X*****,** *institution* ***I*** (école, séance de cours, séance de travaux dirigés, famille, système éducatif, etc.) et les positions ***p*** qu'occupent les individus dans les institutions. Un objet ***O*** de savoir existe dès lors qu'un individu *X* ou une institution *I* reconnait *O* comme existant. On dira que *X* (ou *I*) connaît *O*. Plus précisément, *O* existe pour *X* s'il existe un *rapport personnel* de *X* à *O* (noté ***R(X,O)***). Ce rapport personnel est l'ensemble des interactions que *X* peut entretenir avec *O* (le manipuler, l'utiliser, en parler, y rêver, etc.). De même, un objet *O* de savoir existe pour une institution *I*, s'il existe un *rapport institutionnel* de *I* à *O* en une position ***p*** (noté $\boldsymbol{R_I(p,O)}$). Ce rapport *« énonce, en gros, ce qui peut se faire dans I avec O, comment O y est mis en jeu, ou encore, en termes imagés, ce qu'est le destin de O dans I »* (ibid., p. 213). Le rapport institutionnel de *I* à *O* est considéré comme le rapport à *O* du *sujet idéal* de *I*.

Chevallard précise : *« Tout savoir S est ainsi attaché à une institution I au moins, dans la quelle il est mis en jeu par rapport à un domaine de réalité D. Le point essentiel est alors qu'un savoir n'existe pas* ***in vacuo****, dans un vide social : tout savoir apparaît, à un moment donné, dans une société donnée, comme ancré dans une ou des institutions. »* (ibid., p. 213)

Selon cette approche, les objets n'existent pas en eux-mêmes, mais sont des produits institutionnels qui émergent des systèmes de pratiques qui les caractérisent dans les institutions. Pour un objet *O* ayant une existence au sein de deux institutions *I* et *I'* (*I* représentant pour nous l'enseignement secondaire, *I'*, l'université et *O* l'objet « fonction », ou l'objet « langage ensembliste»), les différences entre rapport $R_I(p,O)$ à l'objet *O* dans l'institution *I* et rapport $R_{I'}(p',O)$ dans l'institution *I'*, vont amener un sujet *X* en transition de *(I, p)* vers *(I', p')* à modifier son rapport personnel *R(X,O)* de façon à ce qu'il devienne le plus conforme possible à $R_I(p,O)$.

Dire que *X* est un *bon sujet* de *I* en position *p*, c'est dire que *X* arrive à modifier ses rapports personnels *R(X,O)* aux objets *O* qui existent pour *I* en position *p*, de manière à ce qu'ils s'approchent le plus possible aux rapports institutionnels $R_I(p,O)$. Dans le cas contraire, X sera qualifié de *mauvais sujet*.

Selon cette perspective, il n'existe pas de « bon rapport » *universel* à un objet donné, reconnu comme tel pour toute institution. *Bon sujet* et *mauvais sujet* ne renvoient plus à la bonne et mauvaise connaissance d'un objet par un sujet, ils sont seulement des appréciations de la conformité du rapport personnel *R(X,O)* au rapport institutionnel $R_I(p,O)$: *« une personne Y appelée à juger la connaissance qu'a une personne X d'un objet O ne sait guère qu'apprécier la conformité du rapport personnel R(X,O) au rapport institutionnels* $R_I(p,O)$*, où p est la position que X est censée occuper au sein de I »*. (Chevallard, 2003, p. 4)

Ces considérations ne sont généralement pas prises en compte par l'institution du Supérieur, qui, constatant les difficultés que rencontrent les nouveaux bacheliers (même les bons) au début de leurs cursus universitaire à se conformer aux exigences du travail mathématique dans le Supérieur, met souvent en cause un niveau faible des étudiants ou une inadéquation de la formation dispensée dans l'institution du Secondaire aux besoins du Supérieur. Aussi, les nouveaux étudiants de l'institution Supérieur, et particulièrement ceux des classes préparatoires, acceptent-ils mal la baisse spectaculaire des notes qu'on leur attribue dans les devoirs et examens[3] et ne comprennent pas pourquoi les connaissances qu'ils ont apprises tout au long de l'enseignement secondaire, même s'ils y ont excellé, ne les aident pas (ou que peu) dans leurs études supérieures. En nous situant dans l'approche anthropologique, notre thèse tente donc d'identifier les caractéristiques des rapports institutionnels dans chacune des institutions ES et CPS1 (pour les objets notions fonctionnelles et langage ensembliste) et d'étudier dans quelle mesure ces caractéristiques peuvent expliquer les décalages d'évaluations observés.

I.1.2. Praxéologies mathématiques – Praxéologies didactiques

Pour Bosch et Chevallard (1999, p. 83), *« le **savoir mathématique**, en tant que forme particulière de connaissances, est le fruit de l'action humaine institutionnelle : c'est quelque chose qui se produit, qui s'utilise, s'enseigne ou, plus généralement se transpose dans des institutions »*. Pour étudier les pratiques institutionnelles relatives à un objet de savoir, Chevallard propose de modéliser l'activité mathématique en termes d'*organisations praxéologiques* ou *praxéologies*.

Une praxéologie est un quadruplet $[\mathbf{T}, \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Theta}]$, formé de :

- *Une tâche* **T** : c'est un construit institutionnel qui s'exprime par un verbe : *diviser* un entier par un autre, *calculer* la valeur d'une fonction en un point, étudier la convergence d'une suite… Souvent, pour analyser une praxéologie on regroupe des tâches d'un même type dans une même catégorie appelée *type de tâches*.

- *Une technique* $\boldsymbol{\tau}$: c'est une manière de faire ou de réaliser une tâche de type T.

Pour un individu X, un type de tâche T est soit *routinier* (si X dispose d'une technique relative à T) soit *problématique* (dans le cas contraire). La notion de *problématique/routinière* n'est pas absolue, elle dépend et de l'individu qui est appelé à accomplir la tâche T et du "vieillissement"[4] de la praxéologie dans le temps d'enseignement. La partie $[\mathbf{T}, \boldsymbol{\tau}]$ représente selon Chevallard, le bloc *pratico-technique*, usuellement appelé savoir-faire.

- *Une technologie* $\boldsymbol{\theta}$: c'est un discours rationnel ayant pour objet de justifier la technique $\boldsymbol{\tau}$, et/ou de la rendre intelligible. La forme de rationalité mise en jeu pour une technologie $\boldsymbol{\theta}$

[3] Généralement, ces étudiants sont habitués à avoir de très bonnes notes en mathématiques dans le Secondaire. Pour les étudiants de première année MP de l'Institut préparatoire aux études d'ingénieurs de Tunis, où nous avons mené nos expérimentations (année universitaire 2006/2007), la plupart d'entre eux (environ 70 %), ont eu une note supérieure ou égale à 17 sur 20 en mathématiques au Baccalauréat (pour les 30 % autres, la note est située entre 15 et 17). Les moyennes des notes en mathématiques de ces étudiants en première année des classes préparatoires dans les trois trimestres de l'année universitaire sont respectivement de : 8,87 ; 9,89 et 10,63. Notons cependant que, dans l'institution « Classe Préparatoires », le classement compte d'avantage que les notes brutes.

[4] Selon Chevallard : « *Les praxéologies vieillissent : leurs composants théoriques et technologiques perdent de leur crédit et deviennent opaques, tandis que des technologies nouvelles émergent qui, par contraste, portent à suspecter d'archaïsme les techniques établies* » (Chevallard, 1998)

varie selon l'institution, et en une institution donnée, au fil de son histoire. Une technologie peut aussi avoir pour fonction la production d'une technique.

- *Une théorie* Θ : c'est une technologie de la technologie θ.

En effet, une technologie θ doit elle-même être produite, justifiée et intelligible, ce rôle est assuré à son égard par la théorie Θ. Généralement une théorie se distingue d'une technologie par le fait qu'elle a une généralité plus grande ; mais parfois les deux niveaux engendrent des résultats équivalents. On parlera alors dans ce cas du niveau (ou du bloc) *technologico-théorique*.

Dans le cas où les composants T, τ, θ et Θ d'une praxéologie sont de nature mathématique, on parle de *praxéologie mathématique*, ou d'*organisation mathématique* (OM). *« Un complexe de techniques, de technologies et de théories organisées autour d'un type de tâches forme une praxéologie* ***ponctuelle****. L'amalgamation de plusieurs praxéologies ponctuelles créera une praxéologie* ***locale****, ou* ***régionale*** *ou* ***globale****, selon que l'élément amalgamant est, respectivement, la technologie, la théorie ou la position institutionnelle considérée »* (ibid., p. 86). Si nous considérons, par exemple, l'enseignement des mathématiques au lycée[5] (en Tunisie), nous pouvons parler d'organisations praxéologiques ponctuelles autour de la résolution d'un système de deux équations à deux inconnues et d'une organisation locale, autour de la résolution de différents types de systèmes linéaires à n équations et p inconnues. A l'université, ces praxéologies peuvent se réunir autour d'une praxéologie régionale relative à la théorie « *applications linéaires et espaces vectoriels* », et autour d'une praxéologie globale si nous considérons *l'algèbre linéaire* comme un domaine dans lequel la résolution des systèmes linéaires occupe une position institutionnelle.

Une praxéologie mathématique étant construite, il importe alors de savoir :

- Comment étudier cette praxéologie ?

- Quel rôle doit jouer chacun des individus (élèves, professeur, etc.) d'une institution donnée pour accomplir les tâches constituant cette praxéologie ?

La réponse à ces questions se traduit pour Chevallard par la mise en place de ce qu'il appelle : *praxéologie* (ou *organisation*) *didactique*.

Chevallard considère que les tâches didactiques sont, dans un certain nombre de contextes, *coopératives*, en ce sens qu'elles doivent être accomplies en collaboration par les différents acteurs d'une institution. Cependant, il est parfois possible qu'un individu X de l'institution soit appelé (momentanément) à réaliser une partie (sous-tâche) t d'une tâche T en autonomie relative par rapport aux autres individus. L'ensemble de ces tâches, sous-ensemble du rôle de

[5] Elève de 15/16 à 18/19 ans

X, lorsque T est accomplie selon une technique τ, est nommé alors le *topos* de X dans la tâche T.

« L'une des difficultés didactiques les plus ordinaires et les plus pressantes pour un professeur est celle qu'il rencontre pour ***donner une place aux élèves****, c'est à dire pour créer, à leur intention, et à propos de chacun des thèmes étudiés, un* ***topos*** *approprié, qui donne à l'élève le sentiment d'avoir* ***un vrai rôle à jouer*** *».* (Chevallard 1998)

En mathématiques, la transition Secondaire/Supérieur et particulièrement ES/CPS1[6], est caractérisée, entre autres choses, par des bouleversements dans l'organisation générale du couple (cours/exercices) et dans les rapports entre « théorie » et « pratique ». Ceci entraîne naturellement des changements au niveau des exigences de travail des étudiants et des modifications dans les *topos* respectifs des enseignants et enseignés.

Dans l'enseignement secondaire, le cours est (de façon générale) dépouillé de toute problématisation théorique, les concepts et théorèmes sont présentés sous l'angle de la fonctionnalité et sont illustrées par de nombreuses applications. Les élèves, dont le travail est essentiellement axé sur la résolution d'exercices guidés et relativement stéréotypés, se soucient peu des démonstrations données dans le cours, car les techniques et démarches mises en jeu dans un grand nombre de ces démonstrations s'écartent de ce dont ils auront besoin dans les exercices et problèmes. En classe terminale[7] particulièrement, il n'est pas rare de trouver des enseignants qui préfèrent remplacer des démonstrations de théorèmes par un travail sur les exercices qu'ils trouvent mieux à même de contribuer à préparer les élèves à l'examen de Baccalauréat. Le travail des démonstrations, qui donne l'occasion d'accéder à un certain niveau théorique et de formalisation mathématique, se trouve ainsi marginalisé par l'institution du Secondaire et reste, généralement, confiné dans le *topos* des enseignants.

En revanche, dans les classes préparatoires scientifiques, il est bien connu que l'étude du cours joue un rôle central dans le travail personnel des étudiants et qu'il devient indissociable de l'étude des exercices et problèmes. Ceci provient, d'une part des opportunités que donne le cours pour étudier les techniques de raisonnement et les démarches mises en jeu dans les démonstrations, d'autre part du fait que les techniques que requiert la résolution des exercices et problèmes donnés aux étudiants dans les séances de travaux dirigés (TD), ou dans les devoirs et examens, ressemblent, dans une certaine mesure, à celles utilisées dans les démonstrations du cours. Pour cette raison, les enseignants laissent souvent à la charge de leurs étudiants les démonstrations de certaines propriétés et théorèmes du cours, et dans les fiches de TD, on donne souvent des exercices qui proposent de démontrer des corollaires aux théorèmes du cours ou des extensions théoriques de parties étudiées dans le cours.

[6] Enseignement Secondaire/Première année MP des Classes Préparatoires Scientifiques.
[7] Nous désignons par classe terminale, la dernière classe de lycée, désignée encore par classe de quatrième année de l'enseignement secondaire.

Contrairement au Secondaire, dans l'institution CPS1, le *topos* de l'enseigné, en ce qui concerne la pratique mathématique, tend à se rapprocher de celui de l'enseignant.

Nous étudierons dans notre recherche les changements qui existent au niveau des *topos* des enseignants et des enseignés entre les institutions ES et CPS1, et nous regarderons dans quelle mesure ces changements pourraient expliquer certaines des difficultés qu'éprouvent les étudiants au début de leur cursus universitaire.

I.1.3. Ostensifs et non-ostensifs

La question de la *nature* des objets mathématiques et de leur fonction dans l'activité mathématique a conduit Bosch et Chevallard (1999) à distinguer deux types d'objets : les objets *ostensifs* et les objets *non ostensifs* :

- les objets *ostensifs* réfèrent aux objets ayant une nature sensible, une certaine matérialité, et qui, de ce fait, acquièrent pour le sujet humain une réalité perceptible.

- les objets *non ostensifs*, sont les objets qui, comme les idées, les intuitions ou les concepts, existent institutionnellement sans pourtant pouvoir être vus, dits, entendus, perçus ou montrés par eux-mêmes : ils ne peuvent qu'être *évoqués* ou *invoquées* par la manipulation de certains objets ostensifs associés.

Ainsi, pour résoudre l'équation $2^x = 10$, on peut « penser à utiliser la fonction logarithme ». On évoque ainsi mentalement l'objet non ostensif « fonction logarithme ». Pour effectuer ou expliquer la résolution, on sera, par exemple, amené à prononcer : "on applique la fonction *log*", et à écrire :

$$2^x = 10 \quad \Leftrightarrow \quad x\,log\,2 = log\,10 \quad x = \frac{log\,10}{log\,2}$$

Le nom prononcé « fonction *log* » et l'écriture « *log* » sont des objets ostensifs.

Généralement, « *en toute activité humaine il y a co-activation d'objets ostensifs et d'objets non ostensifs* » (ibid., p. 92)

Pour les auteurs, la dialectique ostensif/non-ostensif est généralement conçue en termes de signes et de signification : les objets ostensifs sont des signes d'objets non ostensifs qui en constituent le *sens* ou la *signification*.

Un objet ostensif se voit ainsi attribuer une double fonction, ou une double *valence*, *instrumentale* et *sémiotique* :

- Dire qu'un ostensif a une valence *instrumentale* signifie qu'il permet d'agir, de travailler, qu'il s'intègre dans des manipulations techniques, technologiques et théoriques.

- Dire qu'un ostensif a une valence *sémiotique* signifie qu'il permet de produire du sens, de voir, d'apprécier de manière sensible, le travail *fait*, le travail en *train de se faire*, et d'envisager le travail *à faire*.

Pour Bosch et Chevallard, la fiabilité de toute technique, supposée accomplir une tâche donnée, est conditionnée par la double valence, instrumentale et sémiotique, de chacun des ostensifs mis en jeu dans la réalisation de cette technique et des interrelations qui s'établissent entre ces ostensifs. Néanmoins, si l'un et l'autre des deux aspects d'un ostensif coopèrent de façon étroite dans la réalisation de la technique, c'est en fait la valence instrumentale qui détermine le rendement de l'ostensif et définit sa potentialité opératoire. Cette instrumentalité dépendra alors « *du nombre de techniques dans lesquelles [l'ostensif] peut intervenir et elle sera d'autant plus grande que ces techniques se montreront robustes et fiables dans l'accomplissement des tâches concernées* ». (ibid., p. 108). La sémioticité, quant à elle, permet, au sujet comme à l'observateur, de témoigner de l'intelligibilité du travail accompli et de l'efficacité ou de l'inadéquation de l'ostensif choisi.

Beaucoup de difficultés rencontrées par les étudiants en mathématiques au début de leurs études supérieures résultent d'une insuffisance dans la compréhension du sens des objets ostensifs constituants du langage symbolique qu'ils manipulent, et d'un manque de sensibilité au rôle opératoire du symbolisme utilisé. C'est que *« l'écriture formelle n'est pas en elle-même porteuse de la signification des lois qu'elle énonce et des objets qu'elle met en jeu »* (Bloch et al., 2006). Cette signification est subordonnée au rapport du sujet à l'activité mathématique à travers laquelle ces ostensifs fonctionnent et évoluent :

« Le statut et les fonctions assignés aux objets ostensifs sont indissociablement liés à notre rapport à l'activité mathématique, rapport qui détermine les éléments de cette activité que l'on met en avant et ceux que l'on refoule, explicitement ou implicitement, hors de son champ d'action ». (Bosch et Chevallard, 1999, p. 119).

Dans l'approche anthropologique, cette activité mathématique, ses composants, son évolution et ses produits sont une construction institutionnelle et le fruit d'un apprentissage. La question qui se pose alors est de savoir comment, au niveau de l'enseignement, amener les étudiants à prendre conscience du rôle que jouent les objets ostensifs dans la pratique mathématique et quelle nécessité d'apprentissage en résulte. Dans la partie expérimentale de notre recherche, nous montrerons, à travers l'analyse de productions d'étudiants, comment la réussite et l'échec dans l'activité de résolution de problèmes est conditionnée par l'usage du symbolisme mis en jeu dans cette activité et nous essayerons de voir quelles actions didactiques il est possible d'entreprendre pour faire évoluer le rapport des étudiants au matériau ostensif et aux représentations sémiotiques qu'ils manipulent.

I. 2. La dimension cognitive de la transition Secondaire/Supérieur

L'étude de la transition Secondaire/Supérieur, si elle se trouve, selon l'approche anthropologique, étroitement liée à celle des choix et des pratiques institutionnelles, ne peut ignorer les changements qui se produisent sur le plan cognitif, à propos des modes de construction des connaissances, du fonctionnement mathématique et des exigences de flexibilité cognitive.

Dans sa thèse sur l'enseignement de l'algèbre linéaire, Alves Dias remarque :

« De plus en plus, nous semble-t-il, en didactique des mathématiques, la flexibilité entre formes de connaissances et de représentation sémiotique tend à être reconnue comme une composante essentielle de la compréhension et de l'efficacité du fonctionnement mathématique. » (Dias, 1998, p. 5)

De très nombreux travaux de recherche, notamment anglo-saxons, se sont intéressés à la dimension cognitive de l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Nous nous intéressons particulièrement dans notre recherche aux travaux de Dubinsky et Tall, concernant la transition *processus/objet* (ou *procédural/structural*) dans le passage d'une pensée mathématique élémentaire à une pensée mathématique avancée. Nous nous référons également au modèle introduit par Robert concernant *les niveaux de mise en fonctionnement des connaissances mathématiques*. Nous résumons ci-après ce que nous retenons pour notre travail de ces travaux.

I. 2.1. La théorie APOS

Dans la théorie APOS (Action-Processus-Objet-Schéma) (Dubinsky, 1991, Dubinsky & McDonald, 2001), Dubinsky propose un modèle du développement des connaissances mathématiques inspiré de la notion de *« reflective abstraction »* introduite par Piaget (Beth & Piaget, 1966). Il distingue quatre phases dans la construction par un sujet d'une connaissance mathématique : *action, processus, objet et schéma*.

Action : c'est une transformation que le sujet exerce et perçoit en réagissant à des indications externes qui lui indiquent les pas à suivre. Elle est considérée comme le début crucial de la formation d'un concept.

Processus : une répétition <u>réfléchie</u> d'une *action* permet à celle-ci de <u>s'intérioriser</u> et de devenir un *processus*. Il s'agit d'une construction mentale interne permettant de reproduire par la pensée la même action sans l'effectuer réellement. Le sujet, à cette étape, devient capable de concevoir des opérations sur le processus en l'<u>inversant</u> ou en le <u>mettant en relation</u> avec d'autres processus.

Objet : lorsque le sujet perçoit un processus dans sa totalité et se rend compte des opérations pouvant être effectuées sur lui (<u>coordination</u> avec d'autres processus, <u>inversion</u>, <u>généralisation</u> du processus à un champ d'application plus large) et des transformations qui en résultent, on dit que le processus s'est <u>encapsulé</u> en un *objet*.

Schéma : c'est une collection d'actions, de processus, d'objets et éventuellement d'autres schémas se référant à un même concept et liés entre eux par des principes généraux pour former une structure cohérente que le sujet serait capable de mettre en œuvre, globalement ou partiellement, dans la résolution de problèmes. Le sujet, à cette étape, est censé pouvoir décider, implicitement ou explicitement, entre les types de problèmes qui peuvent être résolus en utilisant ce *schéma* et ceux où celui-ci s'avère inutile.

Ainsi, des correspondances terme à terme entre les éléments de deux ensembles (par exemple, associer à des entiers naturels donnés leurs doubles, à des points représentés dans un plan P leurs symétriques par rapport à une droite donnée D), peuvent être considérées comme des actions qui vont permettre un premier contact du sujet avec la notion de « fonction » (ou d'application). Des répétitions réfléchies de telles actions peuvent conduire le sujet à concevoir mentalement la « loi » ($f(x)$) selon laquelle s'effectue l'action, l'étendre à un champ d'éléments plus large (par exemple, $f(n)=2n$, pour tout entier n de **N**, $f(M)=S_D(M)$, pour tout point M d'une figure donnée dans P), imaginer l'action inverse et éventuellement concevoir d'autres actions de même type.

A cette étape, le concept de « fonction » est conçu comme un processus permettant de « produire » des éléments à partir d'autres via une, ou plusieurs, opération(s) bien déterminée(s).

Lorsque le sujet arrive à percevoir les éléments intervenant dans le fonctionnement de chaque processus (f va de I**N** vers 2I**N**, et à tout entier n associe son double, S_D va de P vers P et à tout point M associe le point M' tel que D soit la médiatrice du segment [MM']), saisir tous ces éléments en tant que constitutifs d'une même entité et se rendre compte des transformations pouvant être réalisées sur de telles entités (composer, additionner, multiplier, inverser…), on considère dans la théorie que les processus sont encapsulés en des objets, qu'on désigne alors à l'aide d'ostensifs spécifiques (en l'occurrence « fonction » ou « application » f, S_D …).

Le stade de schéma, quant à lui, correspond à une étape de conceptualisation, de traitement et de mise en œuvre des objets plus développée. Dans le cas des fonctions, par exemple, ceci peut correspondre à la possibilité de classer les fonctions selon les genres de processus auxquels elles se rapportent (fonctions linéaires pour les processus de proportionnalité, fonctions exponentielles pour des processus de croissance rapide, fonctions sinusoïdales pour des processus périodiques, isométries pour des transformations géométriques conservant les distances…), de connaitre les liens éventuels qui peuvent s'établir entre les fonctions d'une même classe et des fonctions de classes différentes, d'organiser les classes de fonctions selon des structures générales permettant de mieux comprendre les liens établis (groupes de fonctions linéaires, anneau des fonctions numériques de I**R** dans I**R**, groupe des isométries du plan…), à la possibilité de mettre en œuvre ces connaissances dans des situations de résolution de problèmes et de savoir déterminer dans chaque situation les éléments à prendre en considération et les éléments qui s'avèrent inutiles.

Selon Dubinsky, dans des situations de résolution de problèmes, un *schéma* sera soumis à des opérations d'adaptation, de restriction, de réorganisation, de désencapsulation …, lui permettant de s'intérioriser et de devenir un objet assujetti lui même à un nouveau cycle d'"*action-objet-processus-schéma*".

Dubinsky illustre le cycle de construction des schémas par la figure ci-dessous :

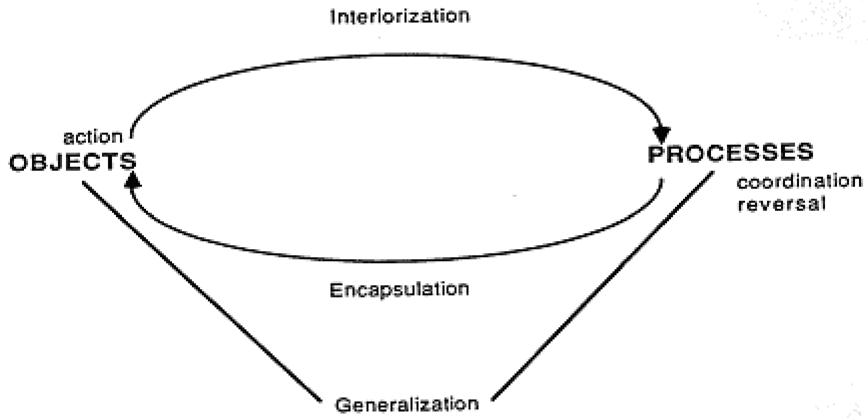


Figure 1. Schéma (Dubinsky, 1991. p. 33)

Notons que, dans cette théorisation, le mot *objet*, ne se limite pas au sens usuel d'objet mathématique comme concept défini de façon pragmatique (comme : *un point est ce dont la partie est nulle* ; chez Euclide) ou axiomatique (*un point est un élément d'un espace affine*), il s'étend à des constructions mathématiques ou cognitives plus générales comme par exemple des théorèmes, des types de preuves, des algorithmes de calcul, des structures algébriques…

Pour illustrer le modèle de construction des schémas, nous reprenons l'analyse que fait Dubinky à propos de la genèse de la notion de dual algébrique :

In the beginning, there are vectors, which are the objects, and actions on vectors including addition, scalar multiplication and the gathering together of vectors in a set with these operations, to form a ***vector space****. This is a schema that we assume the subject possesses. We also assume that the subject has a schema for function that transform numbers into numbers. The first step, according to our conjecture, is to generalize the function schema to include as a function any process that transforms vectors into scalars. This could then be coordinated with the addition of vectors and their multiplication by scalars to restrict the functions to processes that transform vectors into scalars, but preserve the algebraic operations of addition and scalar multiplication. We would then say that these functions are encapsulated into objects called linear functionals and collected together in a single set. At this point we would like to suggest that, although the assigning of a name like linear functional to a process is closely connected with its encapsulation into an object, it is the encapsulation that is fundamental and gives "meaning" to the name. To name processes without encapsulating them is the essence of jargon […]. In any case, the set of linear functionals can be assimilated* *to the vector space schema […] by defining addition and scalar multiplication of these functionals. This can be done very naturally, interpreting the functions as processes and using " point-wise operation". In this way, the set of linear functionals becomes a vector space, called the algebraic dual. Now comes a major interiorization. What we have been describing is an action applied to a vector space E that constructs its algebraic dual E*. When this has been interiorized, one has constructed the beginning of duality theory. One can reverse the process to look for a "pre-dual", that is, given a vector space F, can one find a vector space E whose algebraic dual is F ? […]. Or one can perform the process twice. When two instantiations are coordinated, one obtains the bidual E**. » (ibid., p. 108-109)*

Cette analyse montre l'importance de l'opération d'encapsulation dans la formation des schémas. Dans ses recherches sur les fonctions, Dubinsky montre que les sujets appliquent et généralisent sans difficultés majeures les processus liés à l'objet « fonction », mais c'est le mécanisme d'encapsulation, permettant la transformation des processus en objets, qui présente selon lui le plus de difficulté chez les étudiants sur le plan cognitif.

Une théorisation proche de celle de Dubinsky a été développée par Tall. Elle s'en est progressivement distinguée et est aujourd'hui présentée par ce dernier dans une construction distinguant trois mondes mathématiques :

I. 2. 2. Les trois mondes mathématiques de Tall

Pour expliquer le développement cognitif permettant le passage d'une pensée mathématique élémentaire (EMT) à une pensée mathématique avancée (AMT), Tall (2002, p. 5) postule l'existence de trois mondes des mathématiques :

- *The* ***Embodied world*** *of perception and action, including reflection on perception and action, which develops into a more sophisticated Platonic framework.*
- *The* ***Proceptual world*** *of symbols, such as those in arithmetic, algebra and calculus that act as both processes to do (e.g. 4+3 as a process of addition) and concepts to think above (e.g. 4+3 as the concept of sum) […]*
- *The* ***Formal world*** *of definitions and proof leading to the construction of axiomatic theories.*

Bien que Tall estime que chacun de ces mondes est caractérisé par un mode opératoire spécifique, des règles de validité et des formes de vérité qui lui sont propres, il reconnaît toutefois une certaine similarité dans la façon dont se forment les concepts mathématiques dans chacun de ces mondes. Ainsi, dans le premier monde (e*mbodied world*), les objets mathématiques, préalablement distingués par leurs caractéristiques physiques (un cercle est rond, un carré a des côtés égaux et des angles droits), ou reconnus comme résultat d'une action (j'ai 1, 2, 3, 4 jouets dans mon sac : 4 est donc le résultat d'une action de dénombrement), se voient attribuer, sous l'effet <u>d'actions réfléchies</u> (procédures) intériorisées, des définitions pragmatiques verbales conduisant à ce qu'il appelle des *embodied concept* (Un cercle est une figure dont les points sont également éloignés à un même point. Un nombre (entier positif) est un représentant de tous les ensembles ayant une même cardinalité). De nouvelles procédures exercées sur de tels concepts pourraient conduire à une certaine catégorisation des objets construits et/ou à établir des liens entre eux. Ceci, d'après Tall, amène progressivement à la constitution du raisonnement déductif.

As soon as an object has a definition, say an isosceles triangle is "a triangle with two sides equal" then we can see if this implies that it has other properties, for instance that it is "a triangle with two angles equal". Definitions of concepts naturally lead to a process of deduction: if the object has these properties, then it will have those properties. In this way, using the idea of "congruent triangles" to establish a template for "sameness", Euclidean proof is developed as a verbal formulation of embodied properties of geometric figures. (ibid., p. 6)

Dans le monde *proceptuel* (*proceptual world of symbols*), chaque objet est l'effet d'un processus (ou action) et il est distingué au moyen d'un symbole qui évoque chez le sujet à la fois le concept-objet auquel il se réfère et le processus qui était à l'origine de sa création. Tall désigne ce triplet, ***pro**cessus-con**cept**-symbole* par *procept élémentaire* et appelle *procept* une collection de procepts élémentaires se référant au même objet.

- *An elementary **procept** is the amalgam of three imagery components : a process which produces a mathematical object, and a symbol which is used to represent either process or object.*

- *A **procept** consists of a collection of elementary procepts which have the same object.* (Gray & Tall, 1994, p. 3-4)

Le passage des désignations pragmatiques verbales aux désignations symboliques des objets manipulés constitue, selon Tall, le point essentiel qui distingue les deux premiers mondes des mathématiques. Pour lui, le rôle des symboles dans le monde proceptuel ne se limite pas à la désignation des objets auxquels ils se réfèrent, mais il évoque aussi les processus qui étaient à l'origine de ces objets. Cette dualité *processus/objet* qu'offre l'usage des symboles commence souvent par l'application de processus élémentaires (procédures) qui, par des *répétitions routinières* et des *compressions* mentales successives, *s'encapsulent* en des objets pensables via des symboles. De nouveaux processus appliqués à ces objets peuvent conduire à l'apparition de nouveaux procepts, et des procepts ayant trait à un même objet s'organisent et se généralisent pour former un domaine mathématique. Ainsi, le symbole « 3+4 » désigne à la fois le processus de l'opération d'« addition » et le concept de «somme». La répétition d'un processus d'addition utilisant un même nombre (multiplication) conduit au concept de « produit », lequel, par répétition, conduit au concept de « puissance ». De tels procepts *s'organisent* progressivement et forment ensemble le « calcul numérique », qui, à son tour, se développe et *se généralise* pour donner naissance au « calcul algébrique ». (cf., Tall, 2005)

La description des deux mondes « embodied » et « proceptual » que nous venons de faire présente des similarités évidentes avec celle fournie pour la théorie APOS. Cette similarité apparaît surtout dans les étapes de construction d'un objet mathématique (*Action*, *Processus*, *Objet*), ainsi que dans le mécanisme de développement et d'évolution de ces différentes étapes (*intériorisation, encapsulation, organisation, généralisation*). Nous notons toutefois une attention particulière portée dans le modèle de Tall au rôle que jouent les représentations symboliques dans la construction des objets dans le monde proceptuel, chose qui reste implicite dans la théorisation de Dubinsky.

Tall considère par ailleurs, que les actions pas à pas (procédures) par lesquelles le sujet commence à réagir aux indications externes d'une situation, renvoient à un savoir *procédural* pouvant intervenir aussi bien dans le premier que dans le deuxième monde. Il illustre le modèle conceptuel selon lequel se développe la connaissance mathématique dans ces deux mondes par la figue suivante :

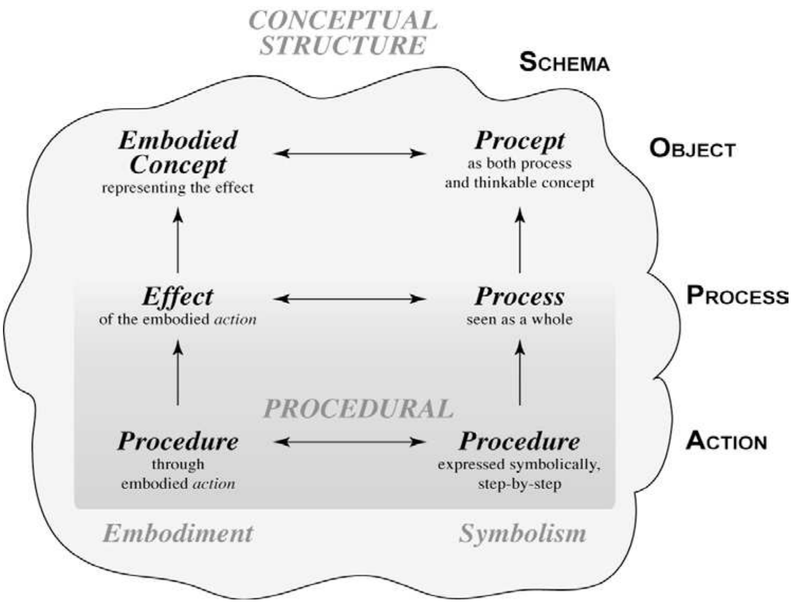


Figure 3. (Tall, 2005, p. 13)

Finalement, dans le monde formel (*Formal world of definitions and proof*), les objets mathématiques ne résultent plus de l'effet d'une action, mais sont définis préalablement de façon axiomatique en utilisant un langage formel. Ces définitions, ajoutées à des principes de base posés comme vrais (axiomes) vont engendrer, sous l'effet de preuves formelles, des théorèmes et des propriétés, et conduire éventuellement à poser de nouvelles définitions. Il s'agit là d'une inversion de l'ordre dans lequel se développe la connaissance mathématique par rapport aux deux premiers mondes, entraînant un changement significatif dans la construction du sens des objets.

« This move from the embodied "concept giving rise to definitions" to the formal "definition" giving rise to concepts is a change in emphasis that involves a significant reconstruction of meaning » (Tall, 2002, p. 5)

Un autre facteur qui distingue les trois mondes est ce que Tall appelle « *The warrant for truth* », que nous traduisons par « *le contrôle de vérité* ». Dans *The embodied world*, je contrôle la vérité par *la vision et la perception* : (2 et 3) est la même chose que (3 et 2) parce que je vois que c'est vrai. Dans *The proceptual world*, le contrôle se fait par le calcul ou par des principes généraux d'arithmétique : 2+3=3+2 est vrai car le calcul donne la même somme. Dans *The Formal world*, la vérité est garantie par des preuves formelles ou par référence à des résultats établis : dans **R**, $x + y = y + x$ car la commutativité de l'addition est un axiome.

Faisant référence à la thèse de Pinto[8], Tall rapporte que différentes stratégies sont suivies par les étudiants pour gérer la transition *proceptuel world/formal world*. Deux stratégies sont particulièrement utilisées : (Tall, 2005, p. 10)

- ***Natural approach** : <u>giving meaning</u> to a definition and formal deduction from a range of personnel images, procepts, processes, examples, non-examples, etc.,*
- ***Formal approach** : <u>extracting meaning</u> from definitions by working through giving theorems until they make sense.*

La première approche peut traduire un attachement aux modes de travail des deux premiers mondes, source de difficultés pour s'insérer dans le monde formel.

Pour étendre le modèle de construction du monde proceptuel au monde formel, Chin et Tall (2002) proposent de qualifier les textes mathématiques (définitions, axiomes, théorèmes, preuves…) de « *formal procept* » s'organisant au niveau de l'apprentissage dans une dualité *processus/objet*. Ainsi, l'écriture symbolique AX=Y, pourrait évoquer le processus de transformation d'un système d'équations linéaires en écriture matricielle. En même temps, cette écriture peut être considérée comme un *procept* formel, permettant d'utiliser le système, de connaître ses propriétés et même de le résoudre, sans avoir besoin de le remettre sous sa forme initiale. De manière similaire, l'énoncé d'un théorème peut être regardé comme un *symbole* évoquant à la fois un *concept* (le sens du théorème) et un *processus* représenté par le processus de preuve qui le justifie.

*[…] If we consider the definition of "procept" in a prescriptive view, it seems applicable to extend the notion of "procept" to the notion of formal proof, which can be called "**formal procept**", by adding the following analysis.*

*[…] The **symbol** is the statement of what is going to be proved [which can be a theorem or a question]. The **process** is the deduction of the whole proof. And the **object** is the concept of*

[8] Pinto, M. M. F. (1998). *Students' Understanding of Real Analyses*. PhD Thesis, Warwick University.

the notion of proof, i.e. the real meaning of the theorem [or question]. The statement of a theorem [or question] as a ***symbol*** *may evoke the proof deduction as a* ***process*** *that may contain sequential procedures and require the synthesis of distinct cognitive units*[9] *or the general notion of the theorem or question as an* ***object*** *like a manipulable entity to be used as inputs to other theorems re questions. (Chin & Tall, 2002, p. 2)*

Le jeu qu'entraine cette théorisation entre le *symbole* et la dialectique *processus/objet* pose le problème de la *flexibilité* dans l'usage du symbolisme mathématique. Pour expliquer ce phénomène et les possibilités d'acquisition de moyens de pensée efficaces, Barnard et Tall (1997), introduisent la notion d'*unité cognitive* :

« A ***cognitive unit*** *consists of a cognitive item that can be held in the focus of attention of an individual at one time, together with other ideas that can be immediately linked to it. »* (Barnard & Tall, 1997, p. 2)

« The identification of schema and concept works only when the individual can comprehend the whole schema as a single cognitive unit. » (ibid. p. 9)

Il s'agit d'une construction proche de la structure de schéma de Dubinsky. Néanmoins, les auteurs ici distinguent deux types de structures : une structure dont les composants sont encore diffus et les liens internes sont faibles, ce qui ne permet pas un usage flexible et efficace du schéma, et une deuxième structure compacte, dont les items sont bien compressés et fortement liés. Celle-ci correspond à la notion d'unité cognitive.

Barnard et Tall postulent que la construction d'une pensée mathématique flexible et opératoire dépend de deux facteurs essentiels et complémentaires : la faculté de pouvoir compresser l'information dans des unités cognitives et la faculté d'établir des connexions dans et entre les unités cognitives :

« […] two complementary factors are important in building a powerful thinking structure :

1) The ability to ***compress*** *information to fit into cognitive units.*

2) The ability to make ***connections*** *within and between cognitive units so that other relevant information can be pulled in and out of the focus of attention at will.*

[…] An individual with compressed cognitive structures and relevant internal links will be able to make relationships between them far more efficiently than one who has a more diffuse cognitive structure. »(ibid. p. 16)

Suite à des expérimentations menées avec des étudiants de première année universitaire, les auteurs concluent que cette capacité de manipuler de manière flexible les théorèmes

[9] "A *cognitive unit* consists of a cognitive item that can be held in the focus of attention of an individual at one time, together with other ideas that can be immediately linked to it." (Barnard & Tall, 1997, p. 2)

comme « *formal procept* » ne peut être acquise (par la plupart des étudiants) dès la première année universitaire. Elle requiert de la durée.

Praslon dans sa thèse (2000), remarque que : *« l'un des problèmes de l'enseignement supérieur consiste à savoir quels moyens mettre en œuvre pour prendre en compte et faciliter cette flexibilité attendue, qui, jusqu'alors, a été traitée comme si elle « allait de soi », ou relevait du seul travail privé de l'étudiant. Elle s'avère, selon A. Robert, d'autant plus nécessaire au niveau post-bac, que l'étudiant est confronté à une « **combinatoire explosive des possibilités** » au niveau des problèmes rencontrés, dont la résolution nécessite donc organisation, efficacité, adaptation des connaissances, puisque les situations nouvelles sont alors plus fréquentes. »* (ibid., p. 45)

Ceci nous amène à nous interroger sur la nature et les origines des difficultés que rencontrent les étudiants dans la mise en œuvre des connaissances mathématiques acquises, en faisant référence aux niveaux de mise en fonctionnement des connaissances mathématiques dans la résolution des problèmes.

I. 2. 3. Niveaux de mise en fonctionnement des connaissances

En se référant aux pratiques « expertes » des mathématiciens professionnels, Aline Robert (1998) trouve qu'en dépit d'une grande variabilité de ces pratiques, dépendante des domaines de recherche, des personnalités des mathématiciens, des époques où ils ont vécu, il existe des éléments communs qui caractérisent toute activité mathématique « experte ». Les plus marquants de ces éléments, selon elle, étant :

- Le caractère « *disponible* » d'un grand nombre de connaissances et de leur « *organisation* ».

- L'existence de « *repères* » dépendant du stock de connaissances organisées du mathématicien, et permettant un contrôle (systématique) interne dans toute situation mathématique. Ce contrôle se traduit généralement par plusieurs types de questionnements (explicites ou implicites) concernant : la structure, l'homogénéité, la cohérence, le caractère local ou global, fini ou infini…

- L'existence de « *situations de référence* » constituant des points d'appui qui permettent de repérer une anomalie, de tester une hypothèse ou un calcul, de conjecturer…

- La possibilité de généraliser, de particulariser, de « *mettre en relation* » des situations différentes, des problèmes variés, des aspects différents d'un même énoncé (changement de points de vue)…

- La possibilité de calculer, longtemps si la situation l'exige.

- Le rôle de l'écrit (notamment dans la phase finale) comme générateur d'une dynamique de questionnements plus précis, rendue possible par « *une exigence de rigueur* » sur la chose écrite.

Considérant ainsi qu'à partir du lycée les mathématiques enseignées commencent à ressembler à celles des « experts » (elle les qualifie alors de connaissances complexes), tant en ce qui concerne les savoirs que les pratiques attendues de la part des élèves et des étudiants, Robert estime que la prise en compte des « *pratiques expertes* » pourrait contribuer d'une part à nous éclairer sur les difficultés auxquelles se heurtent les apprenants dans leurs pratiques mathématiques, d'autre part à nous inspirer des « *conditions suffisantes* » d'acquisition de connaissances mathématiques complexes notamment au niveau du lycée et de l'université. Il devient dès lors impératif pour un chercheur « *d'être mieux armé, mieux outillé, pour faire des analyses adaptées aux spécificités de la complexité des contenus de ces niveaux, que ce soit à des fins d'évaluation, pour des diagnostics ou d'élaboration de séquences et de scénarios.* » (Robert, 1998, p. 142)

En vue d'accéder à cette complexité, l'auteur introduit quatre dimensions d'analyse des contenus : les trois premières sont des caractéristiques strictement liées aux notions à enseigner et à leurs domaines d'applications. Elles concernent :

- Le statut de ces notions quant à leur insertion dans le paysage mathématique des élèves.

- La dimension : outil/objet, cadre (Douady, 1986), registre (Duval, 1995). Elle permet pour chaque notion de distinguer ses occurrences contextualisées et décontextualisées (outil/objet), de repérer les diversités liées aux domaines du travail mathématique (cadres) et celles liées aux domaines d'écritures mathématiques (registres).

- Les niveaux de conceptualisation. Ils décrivent, dans un champ de connaissances mathématiques, différents niveaux d'organisations cohérentes de connaissances relevant d'une même notion. L'étude de ces organisations ainsi que de leurs imbrications successives permet des analyses longitudinales relatives au temps d'enseignement.

La quatrième dimension d'analyse des contenus s'intéresse, quant à elle, aux « *mises en fonctionnement* » des connaissances. Robert distingue dans ce contexte trois niveaux de mises en fonctionnement des connaissances par les sujets (Robert, 1998, p. 165-166) :

- ***Le niveau technique** : ce niveau correspond à des mises en fonctionnement indiquées, isolées, mettant en jeu des applications immédiates de théorèmes, propriétés, définitions, formules, etc. Les notions mathématiques sont utilisées ici essentiellement dans leur fonction d'« outil ». L'habileté à mener des calculs standards relève aussi de ce niveau.*

Concernant les connaissances liées à la notion de fonction, il peut s'agir selon nous, au lycée, de simplifier l'expression de f(x), de calculer l'image d'un nombre, de déterminer la composée de deux fonctions, de construire dans un repère orthogonal, à partir de la courbe d'une fonction f continue et strictement monotone, la courbe de f^{-1}. Au niveau de première année du supérieur, il peut s'agir par exemple de vérifier qu'une application définie entre deux espaces vectoriels est linéaire, de montrer que les isométries du plan forment un groupe pour la composition des applications…

- ***Le niveau des connaissances mobilisables*** *: dans ce niveau, les connaissances en jeu sont encore explicites et indiquées, mais il ne suffit plus d'appliquer immédiatement une propriété ou un théorème. Il peut être nécessaire d'adapter ses connaissances, de changer de points de vue. Les caractères « outil » et « objet » peuvent être concernés. La solution peut requérir plusieurs étapes. Ce niveau teste une mise en fonctionnement où existe un début de juxtaposition de savoirs dans un domaine donné, voire d'organisation.*

En classe terminale, montrer, sans indication, qu'une équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans un intervalle I, lorsqu'il y a lieu de montrer que f est continue et strictement monotone sur I et que $0 \in f(I)$, ou encore déterminer l'ensemble décrit par un point M en montrant que M est l'image par une transformation plane (à déterminer) d'un point dont on connaît le lieu géométrique, nous semblent mettre en jeu le niveau mobilisable. En première année supérieure, il en va de même, pour nous, pour les tâches :

- Montrer que l'image réciproque d'un sous-groupe H par un morphisme de groupes f, est un sous-groupe (considérer la structure de sous-groupe de H, gérer convenablement le passage entre éléments de $f^{-1}(H)$ et éléments de H, utiliser les propriétés de morphisme de f)

- Montrer que l'ensemble $F = \{(x,y,z) \in C^3 /(x+y+z=0 \text{ et } x+iy-z=0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}^3$, et en déterminer une base et la dimension (reformuler l'écriture de F en : $F = \{z(i,-1-i,1) ; z \in C\}$, et en déduire que F est le sous espace vectoriel de $\mathbf{C}^3$, de dimension 1, dont une base est le vecteur $(i,-1-i,1)$)

- ***Le niveau des connaissances disponibles*** *: Il correspond au fait de savoir résoudre ce qui est proposé « sans indications », de pouvoir « appliquer des méthodes non prévues », effectuer « des mises en relations », « donner des contre-exemples, changer de cadres sans suggestion ». Ce niveau de mise en fonctionnement est lié à une familiarité importante ainsi qu'à une organisation des connaissances, à la possibilité de se servir de situations de références variées. L'étudiant ici est autonome, il dispose de repères, de questionnements, et est capable, si besoin est, de se poser seul des problèmes ou de tirer des bilans.*

Par exemple, être capable, au niveau du lycée, d'étudier, sans indication, la convergence de la suite u définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = ln(3+u_n)$ et de calculer, éventuellement, sa limite l (ou une valeur approchée de l). Pour la convergence, l'élève serait amené à étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto ln(x+3)$ et à montrer par récurrence que u est croissante et majorée. Il y aura lieu éventuellement de faire appel au cadre graphique pour conjecturer le comportement de la suite u. Pour calculer la limite l, l'élève serait amené à montrer que sur un intervalle approprié I (à déterminer), l'équation $f(x)=x$ admet une solution unique, qui est la limite *l*. Pour cela, l'élève doit utiliser le théorème de bijection avec la fonction *g* définie sur I par *g(x) = f(x) – x*. Finalement, une valeur approchée de *l* pourrait être déterminée à l'aide d'un tableur ou par la méthode de dichotomie.

En première année supérieure, il nous semble que l'exercice :

> *(G, .) est un groupe fini muni de la relation d'équivalence :* $x\,R\,y \Leftrightarrow y = x$ *ou* $y = x^{-1}$.
> *Montrer que l'ensemble* $S = \left\{x \in G \,/\, x^2 = e \text{ et } x \neq e\right\}$ *est de cardinal impair.*

correspond au niveau disponible. En effet, il y a nécessité de voir l'intérêt de la donnée de la relation d'équivalence *R* et donc de considérer l'ensemble quotient G/R, de déterminer les classes d'équivalences de *G* selon *R* ($\{e\}$, les singletons $\{x\}$ pour $x \in S$ et les paires $\{x, x^{-1}\}$ pour $x \in H = G - (S \cup \{e\})$), de remarquer que *card(G)=1 + Card(S) + card(H)* et enfin d'en déduire le résultat.

Ces différents niveaux de mise en fonctionnement des connaissances restent pour Robert relatifs au niveau d'apprentissage auquel se situe le sujet. Ainsi, une mise en fonctionnement d'un certain niveau à un moment donné peut devenir ultérieurement une mise en fonctionnement d'un autre niveau. Il nous semble par ailleurs que ces niveaux peuvent être mis en relation avec les étapes d'acquisition des connaissances décrites dans les travaux de Dubinsky et Tall. Ainsi, le niveau de mise en fonctionnement technique peut être mis en relation avec le niveau procédural, où le sujet s'applique encore à utiliser les processus liés aux connaissances en jeu, sans que ces processus soient parfaitement intériorisés et transformés en objets. Le niveau mobilisable peut être associé à l'existence de connaissances intériorisées, à la possibilité de caractériser et d'utiliser les objets mis en jeu et à un début de constitution de la structure de schéma, avec toutefois des objets encore faiblement liés entre eux et des difficultés à organiser les savoirs acquis et à mobiliser et mettre en œuvre des connaissances non indiquées. Quant au niveau disponible, il correspond à des structures de schémas bien développées dont les objets et unités cognitives sont fortement reliés, et dotées d'une bonne flexibilité cognitive.

Notons que l'intérêt que représente pour notre travail les différentes approches que nous venons de présenter est double : d'une part, elles nous permettront de déterminer les niveaux de fonctionnement des notions ensemblistes et fonctionnelles dans chacune des institutions ES et CPS1, et ceci à travers l'analyse des documents de travail destinés aux élèves et étudiants concernant le travail de ces notions. Nous désignons ces niveaux par : ***niveaux institutionnels de fonctionnement des connaissances***. D'autre part, elle nous permettra d'étudier, à travers l'analyse des productions des étudiants, les niveaux d'acquisition et les possibilités d'usage des dites notions par les étudiants des classes CPS1. Nous désignons ces niveaux par : ***niveaux personnels de fonctionnement des connaissances***. Nous analyserons par la suite les rapports entre les différents niveaux de fonctionnement des connaissances établis (dans l'institution ES, dans l'institution CPS1 et personnels) et nous essayerons d'expliquer et d'interpréter ces rapports en nous référant aux cadres théoriques sus-cités.

Ceci dit, se pose alors la question des moyens permettant à l'étudiant de passer d'un niveau de fonctionnement à un autre, d'acquérir des pratiques expertes et d'affronter la complexité croissante des mathématiques auxquelles il est confronté, notamment lors du passage du Secondaire au Supérieur. Selon Robert (1998, p. 153) « *que l'on parle de disponibilité, d'organisation des connaissances ou de flexibilité, les exigences correspondantes peuvent paraître transparentes pour les enseignants, il peut être pour eux évident que les apprentissages comportent cette dimension, ce n'est pas toujours souligné dans les enseignements, et il n'y a pas toujours de moyens explicites mis en œuvre à cette fin : tout se passe comme si cet apprentissage se faisait tout seul, ou, en tout cas, était du seul ressort des étudiants* ». Plusieurs travaux en didactiques se sont intéressés au problème des connaissances requises en matière de pratiques mathématiques et des besoins d'apprentissage qui se trouvent institutionnellement ignorés, ou du moins implicites, mais qui s'avèrent nécessaires pour la réussite des étudiants. C'est ce point que nous abordons dans le paragraphe suivant en situant l'approche anthropologique par rapport aux approches relevant du *Problem Solving*.

I. 3. Résolution de problèmes et besoins d'apprentissage

Il est incontestable que l'apprentissage des notions et concepts mathématiques et la connaissance des règles et des lois qui les régissent, n'autorisent pas nécessairement des habilités à mettre en œuvre ces savoirs et ces connaissances dans la résolution des problèmes, considérée comme la plus essentielle des activités mathématiques, pour ce qu'elle offre d'occasions à familiariser les apprenants avec des situations de recherche, à s'approprier les bases du raisonnement mathématique et à développer leurs aptitudes intellectuelles. Niss exprime ce point de vue dans les termes suivants :

« There is no automatic transfer from a solid knowledge of mathematical theory to the ability to solve no-routine mathematical problems, or the ability to apply mathematics and perform mathematical modelling in complex, extra-mathematical contexts. For this to happen both problem solving and modelling have to be made object of explicit teaching and learning, and there is ample evidence that it is possible to design teaching settings so as to foster and solidify these abilities » (Niss, 1999, p. 21)

Conscients de l'importance que représente l'activité de résolution de problèmes dans l'enseignement des mathématiques, recherches et courants pédagogiques ont essayé de trouver un ajustement entre le savoir à dispenser aux apprenants et les moyens qui favorisent chez eux l'acquisition et le développement d'aptitudes et de compétences dans la résolution de problèmes. Le courant de recherche relevant du *Problem Solving*, très répandu chez les anglo-saxons, s'est traditionnellement positionné en avant des courants qui s'intéressent à l'étude des moyens permettant de développer chez les apprenants des heuristiques de résolution de problèmes. Ce courant s'est même constitué, dans plusieurs pays, en un courant pédagogique accordant une importance particulière à l'apprentissage du raisonnement et de stratégies générales de résolution de problèmes et dénonçant les pratiques d'enseignement trop centrées sur les contenus et sur la résolution mécanique d'exercices stéréotypés. L'approche cognitive à laquelle se réfère le *Problem Solving* postule que pour favoriser des conditions propices à une compréhension profonde des concepts mathématiques, il est nécessaire d'amener les étudiants à s'engager dans les processus liés à l'activité de résolution de problèmes : conjecturer, explorer, tester, vérifier, créer…(Lester et al., 1994). Une façon de procéder est décrite par Lithner (2000, p. 165-166) :

« Solving a mathematical task can be seen as solving a set of sub tasks of different grain size and character. If the sub task is not routine, one way to describe the reasoning is the following four-step structure:

1. *A problematic situation is met, a difficulty where it is not obvious how to proceed.*
2. *Strategy choice : one possibility is to try to choose […] a strategy that can solve the difficulty. This choice can be supported by predictive argumentation : will the strategy solve the difficulty ? If not, choose another strategy.*
3. *Strategy implementation : this can supported by the verificative argumentation : did the strategy solve the difficulty ? If not, redo 2 or 3 depending on if one thinks the problem is in the choice or in the implementation of the strategy.*
4. *Conclusion : a result is obtained. »*

Dans le même contexte, Schoenfeld suggère que l'objectif des problèmes proposés aux étudiants doit aller au-delà de l'application et de la consolidation des acquis. Ces problèmes doivent aussi permettre d'explorer des possibilités de généralisation et de construction de stratégies complexes pour résoudre des tâches non routinières. Il décrit ainsi trois caractéristiques auxquels doit répondre un « bon problème » (Schoenfeld, 1994) :

- Valoriser les processus de mathématisation et d'abstraction.
- Développer des compétences au sujet des outils spécifiques du travail mathématique
- Permettre l'intériorisation et la généralisation des schèmes mis en jeu.

La perspective dans laquelle se situe la recherche sur le *Problem Solving* tâche à prendre de la distance vis-à-vis des contenus mathématiques mis en jeu dans les problèmes, ceci dans l'objectif d'établir des heuristiques d'exécution et de commande générales pouvant s'appliquer aux problèmes des divers domaines mathématiques. A ce niveau, le *Problem Solving* se distingue de l'approche anthropologique qui attribue à la résolution de problèmes un rôle dans la structuration et l'unification des différents niveaux de détermination mathématique proposés par Chevallard (2003) :

Discipline $\rightarrow$ Domaine $\rightarrow$ Secteur $\rightarrow$ Thème $\rightarrow$ Sujet

En effet, pour Bosch et Gascon (2005, p.107), s'agissant de la question de savoir *« comment obtenir que les élèves apprennent à construire et à utiliser adéquatement des stratégies complexes pour résoudre de "vrais" problèmes mathématiques, une fois qu'ils dominent les techniques mathématiques élémentaires et qu'ils ont acquis les connaissances nécessaires qui leur sont associées ? »* (les auteurs désignent ce questionnement par le *problème de Polya*), trois niveaux de traitement peuvent être engagés pour y répondre :

- Le niveau *ponctuel* : où *« la résolution de chaque problème est considérée comme une fin en soi et se maintient relativement isolée du reste des activités mathématiques ».* (ibid., p. 109)
- Le niveau *local* : *« où la résolution de problèmes s'intègre à l'étude des différents thèmes mathématiques traités à l'école (par exemple, les constructions géométriques, les suites récurrentes ou l'optimisation de fonctions) »*. (ibid., p. 109)
- Les niveaux *plus génériques « dans lesquels la résolution de problèmes est reliée à l'organisation globale du curriculum ou des grands domaines qui le composent, et apparaît comme une activité structurante qui, partant d'un certain nombre de "grandes questions", devrait permettre de conférer une unité aux différents thèmes d'un même domaine mathématique, voire de relier différents domaines entre eux ».* (ibid., p. 109)

Pour ces auteurs, la perspective cognitive dans laquelle se situe le courant du *Problem Solving* donne une réponse d'un niveau ponctuel au *problème de Polya*, ceci bien que l'objectif visé par cette perspective *« se situe généralement à des niveaux de plus grande généricité allant même parfois au-delà du niveau global (par exemple l'étude de processus métacognitifs ou de démarches de preuve qui ne seraient pas spécifiques de l'activité mathématique) »* (ibid., p. 112). Les auteurs expliquent ce sorte de paradoxe par le fait que le caractère essentiellement cognitif du *Problem Solving*, s'intéressant à l'acquisition d'habilités heuristiques et de compétences transversales, lui impose de prendre toujours *« comme point de départ la résolution d'un unique spécimen de problème dont il est important que le "résolveur" ne connaisse pas le type auquel ce spécimen appartient. En d'autres termes, l'activité de résolution de problèmes ne doit jamais se dérouler dans un environnement mathématique délimité à l'avance, car la délimitation de cet environnement, c'est-à-dire la détection du type de problèmes auquel le spécimen appartient, fait partie du travail de résolution ».* (ibid., p. 110)

En revanche, l'approche que propose la TAD rompt l'isolement des problèmes, non en s'intéressant au problème concret que l'on essaie de résoudre, mais *« en postulant d'emblée que, dans la vie des institutions, ce qui importe […est] ce qui pourra être fait après avec la réponse fournie [au problème], soit le* ***type*** *de problèmes que celle-ci permettra de résoudre et qui ont des chances de se reproduire plus tard. Ce postulat anthropologique peut se synthétiser en disant que le* ***processus d'étude*** *d'une question problématique conduit à la* *considération* ***d'un type de problèmes*** *auquel on rattache la question, processus qui aboutit à la mise en place d'****organisations ou praxéologies*** *mathématiques de complexité croissante :* ***ponctuelle*** *si elle ne répondent qu'à la réalisation du type de tâches,* ***locales*** *si elles regroupent différents types de tâches et de techniques autour d'un discours technologique commun,* ***régionales*** *lorsqu'elles regroupent les organisations mathématiques locales qui partagent la même théorie. »* (ibid., p. 113).

Pour les auteurs, ce cadre d'analyse permet d'interpréter le *problème de Polya « comme un aspect, et même un effet, du phénomène d'****atomisation scolaire du curriculum de mathématiques*** *qui se manifeste à tous les niveaux de détermination didactique »* (ibid., p. 113). Pour leur importance dans notre travail, nous citons deux des traits essentiels de ce phénomène :

> « **(a**) *Dans l'enseignement des mathématiques au Primaire et au Secondaire, mais aussi de manière croissante à l'Université, il existe une tendance à « atomiser » les contenus mathématiques en une suite de* ***questions ponctuelles*** *relativement indépendantes entre elles. Le manque de lien entre les différentes questions est tel qu'il peut arriver à convertir l'enseignement des mathématiques en l'étude d'un ensemble d'anecdotes ou de « devinettes ». En particulier, les techniques mathématiques s'utilisent de manière isolée et présentent une grande rigidité, ce qui se manifeste surtout dans le passage du Lycée à l'Université. Il existe des preuves empiriques sur les différents aspects de cette rigidité extraites aussi bien de l'activité mathématique des élèves que des manuels et autres documents curriculaires. Malgré la présence d'une certaine « idéologie moderniste » qui, en accord avec le mouvement du* ***Problem Solving****, identifie l'enseignement des mathématiques avec l'enseignement d'une activité libre et créative autour de problèmes isolés, on observe une pratique d'enseignement qui a du mal à aller au-delà de l'enseignement de techniques de résolution presque algorithmiques.*
>
> **(b)** *L'atomisation du curriculum ne se produit pas uniquement au niveau des questions mathématiques étudiées à l'école. On constate en effet dans les curriculums actuels l'absence d'une* ***structuration des domaines ou secteurs*** *qui regroupent les thèmes étudiés. Cette absence se manifeste, par exemple, dans l'abandon, de la part du professeur, des niveaux supérieurs de l'organisation didactique, ce qui provoque un repli de son action sur le niveau des* ***thèmes****. Cet « enfermement dans les thèmes » constitue un phénomène didactique que Chevallard a désigné comme l'« autisme thématique du professeur » (Chevallard 2003). Il peut être rapproché de la structuration spontanée que propose le courant du Problem Solving en prétendant donner une réponse à la structuration du curriculum directement par la considération de problèmes « génériques », c'est-à-dire isolés. Le*

manque d'articulation entre thèmes semble empêcher alors une articulation ***entre les secteurs d'un même domaine*** *des mathématiques scolaires, par exemple (au moins en Espagne) entre la géométrie synthétique et la géométrie analytique ou vectorielle ou entre l'algèbre élémentaire et les fonctions à une variable réelle. La permanence de ce fait, qui se maintient malgré les différentes réformes curriculaires, semble indiquer qu'il ne s'agit pas d'une séparation accidentelle mais d'un phénomène didactique qui mérite d'être expliqué. »* (Bosch et Gascon, 2005, p. 113)

Dans ce cadre d'analyse, les auteurs situent le *problème de Polya* au niveau du *programme d'étude* de toute une étape éducative, voire même dans l'articulation entre différentes étapes. Ils le reformulent alors dans les termes plus génériques suivants :

« Quelles doivent être la structure et les fonctions des dispositifs d'une organisation didactique scolaire qui permette de reprendre les contenus anciens, même ceux étudiés dans des étapes antérieures, pour les questionner, les développer et les articuler afin de former des organisations mathématiques plus larges et complexes ? » (ibid., p. 114)

Cette formulation montre qu'une réponse au *problème de Polya* doit prendre en considération l'organisation d'un processus d'étude permettant l'articulation des différents niveaux (thème, secteur, domaines, discipline) de l'activité mathématique scolaire, et ceci « *depuis le travail le plus routinier jusqu'à la résolution de problèmes plus « ouverts » - au sens qu'ils se situeraient aux « bords » des organisations mathématiques élaborées-».* (ibid., p. 114)

Le traitement d'un point de vue organisationnel et curriculaire du *Problème de Polya* ainsi présenté nous conduit à nous interroger quant à son traitement aux niveaux inférieurs de détermination mathématique, c'est à dire au niveau du sujet et du thème d'étude. Plus précisément, nous nous interrogeons quant à la nature des connaissances liées aux organisations mathématiques ponctuelles intervenant dans l'activité de résolution de problème et dont le manquement pourrait expliquer les difficultés que rencontrent les apprenants au niveau de la résolution de problèmes, et pourrait en même temps mettre en évidence des nécessités d'apprentissage.

Corine Castela (2007a, 2007b, 2008a, 2008b) a pointé l'existence de telles nécessités d'apprentissage chez de bons élèves de Première S[10] qui, malgré leur performance, se trouvent désarmés devant des tâches de résolution de problème exigeant initiative, adaptabilité et inventivité. Partant de l'hypothèse que ces nécessités ne peuvent résulter d'une insuffisance dans l'appropriation d'éléments du savoir savant par les élèves (compte tenu du contexte dans lequel est menée la recherche), Castela (2008b) postule que les professeurs, dans leur très grande majorité, se trouvent à ce niveau d'enseignement (caractérisé par une évolution

[10] Deuxième année de lycée, option scientifique, 16-17 ans. (Il s'agit du système d'enseignement français)

significative dans le contenu et le volume des programmes et par une accélération dans le rythme d'enseignement par rapport au collège) contraints de réduire l'étude en classe de chacun des thèmes enseignés. Ils laissent pour l'essentiel à la charge des élèves la construction d'un complément de connaissances qui déborde le cadre du savoir théorique (décrit dans le texte des programmes officiels) et dont il s'avère que seulement certains élèves, par un cheminement personnel et/ou grâce à des soutiens extérieurs à l'école, arrivent à le réaliser.

Dans l'objectif de décrire les besoins d'apprentissage qui font défaut et prouver leur nécessité pour la réussite des élèves, et en adoptant le modèle des organisations praxéologiques, Castela (2008b) distingue au niveau de la technologie de toute organisation mathématique ponctuelle (OMP) intervenant dans un problème deux composantes, respectivement théorique et pratique. La composante théorique d'une technologie, constituée d'éléments de savoirs théoriques, assure la validité de la technique utilisée, quant à la composante pratique, caractérisée par des connaissances qualifiées d'opératoires, pragmatiques, pratiques, elle correspond à *« ce que certains mathématiciens anglais considèrent comme a* ***mathematical folklore*** *[…], c'est à dire certains savoirs très ancrés dans l'expérience, permettant de choisir, de mettre en œuvre, de piloter la technique »*. (Castela, 2007b. p. 7). Pour Castela, ces connaissances d'ordre pratique peuvent être associées à ce que le courant cognitif définit comme heuristiques générales et des stratégies de résolution, lesquelles, peuvent être assimilées à des technologies à faible contenu théorique, associées à des types de tâches à grand degré de généralité. D'un autre côté, tenant compte de l'effet du contexte (savoirs déjà institutionnalisés ou en cours d'enseignement, problèmes nouveaux ou déjà résolus, cadre d'enseignement, existence de techniques usuelles, présence d'ostensifs pouvant renvoyer à une certaine technique de réalisation…) sur les possibilités de réalisation d'une tâche ainsi que sur la détermination des connaissances à mettre en œuvre, Castela (2008b) introduit la notion de *tâche prescrite* pour désigner le couple associant l'énoncé de la tâche et le contexte de prescription et distingue deux types de tâches prescrites, les *tâches potentielles*, déterminées par l'énoncé et le contexte et la *tâche effective* qui tient compte de l'activité des élèves sollicitée (et éventuellement de l'intervention du professeur en situation) et pourrait ainsi permettre d'identifier des besoins d'apprentissage d'ordre pratique. Dans ce contexte, une attention particulière est portée par l'auteur aux OMP impliquées dans la réalisation des tâches, à leurs modes d'intervention dans les problèmes et aux responsabilités dévolues au résolveur relativement à l'emploi de ces OMP. Les tâches sont ainsi différentiées selon deux niveaux d'intervention :

- niveau de OM ***r****-convoquée*, où l'identification du type de tâche T_0, et/ou le choix de l'OM_0 parmi plusieurs OM associée à T_0, pour mener à bien la résolution, est à la charge du résolveur ;

- niveau de OM ***t**-convoquée,* où les mêmes rôles sont mobilisés par la tâche même.

Castela remarque que ces niveaux pourraient être associés aux niveaux de mise en fonctionnement des connaissances *disponible* et *mobilisable* (respectivement) introduits par Robert (1998), mais considère que les termes ***r**-convoquée* et ***t**-convoquée* sont mieux à même de répondre à l'approche qu'elle propose, notamment dans la prise en compte du rôle du résolveur dans la réalisation de la tâche et de la modélisation des enjeux d'apprentissage requis par le curriculum praxique[11] dans une institution. Pour notre part, nous utilisons dans nos analyses la classification (*technique, mobilisable, disponible*) lorsque nous nous intéressons aux caractéristiques *potentielles* (Castela) d'une tâche, notamment celles qui concernent la complexité des données et la difficulté de réalisation et font clairement intervenir les trois niveaux de mise en fonctionnement distingués par Robert[12]. Dans le cas où il y a une intention d'enseignement axée sur la pratique de résolution, en revanche, la dichotomie *r*-convoquée/*t*-convoquée nous paraît mieux adaptée à l'analyse des tâches intervenant dans les exercices et problèmes proposés[13].

Ceci dit, Castela considère que les connaissances d'ordre pratique en mathématiques, si elles sont dotées d'une légitimité mathématique (par référence à l'activité du mathématicien) et se trouvent implicitement reconnues par l'institution éducative (vu que leur nécessité se manifeste dans les tâches d'évaluation et c'est leur absence qui est institutionnellement évoquée comme facteur d'échec), celle-ci reste muette à leur propos et n'organise aucun système didactique visant explicitement à permettre leur apprentissage. Ces considérations sollicitent le développement d'autonomie mathématique (qualifiée par Castela d'autonomie *autodidacte*) et font apparaître le travail personnel des élèves comme un facteur déterminant pour faire face à cette situation.

Pour atténuer les effets de cette situation, et vu que la plupart des élèves n'arrivent pas à réaliser par eux mêmes les apprentissages ignorés[14] par le système d'enseignement, pourtant nécessaires à leur réussite, Castela (2008a) trouve impérative que l'institution assume la responsabilité didactique d'organiser l'enseignement de tels enjeux d'apprentissage et qu'*« il appartient aux professeurs de mathématiques de participer à la construction chez les élèves*

[11]« *Les étapes de ce curriculum sont définies à partir des corpus d'exercices et problèmes effectivement prescrits aux élèves, elles s'expriment en termes de OM et de niveaux d'intervention de ces OM* ». Castela précise que ce curriculum est « *pour l'essentiel non explicitée institutionnellement* » (Castela, 2008b)

[12] Ce sera le cas dans l'analyse des tâches lors de l'étude des rapports institutionnels et des rapports personnels, où le rôle du résolveur en situation n'est pas pris en considération.

[13] Ce sera le cas lors de l'analyse des exercices proposés dans les séances de remédiation de l'ingénierie didactique. (cf. Chapitre V)

[14] *« dans le sens où [l'institution], même si elle en connaît l'existence, ne s'exprime pas à leur propos et n'en assume pas la responsabilité »* (Castela, 2008b)

d'un rapport stratégique au monde et de les préparer à assumer la responsabilité autodidacte[15] *»*. (ibid., p. 25)

II. Des travaux de recherche concernant la transition Secondaire/Supérieur

Plusieurs travaux de recherche, dans différents pays, se sont intéressés à l'étude des difficultés qui se posent au niveau de l'enseignement et/ou de l'apprentissage des mathématiques dans la transition Secondaire/Supérieur. Nous présentons dans ce paragraphe certains de ces travaux et nous organisons notre travail suivant trois axes décrivant les principaux aspects de cette transition : l'aspect culturel, l'obstacle du formalisme et la discontinuité des organisations praxéologiques.

II. 1. Secondaire/Supérieur, une transition culturelle

Pour Artigue (2004), chaque institution où se fréquentent les mathématiques développe sa propre culture mathématique, caractérisée, non seulement par les objets de savoir qui s'y enseignent, mais aussi par des savoir-faire, des modes de pensée et des pratiques noosphériennes qui orientent la transposition et influencent les pratiques et les conceptions. De ce point de vue, la transition entre le secondaire et le supérieur est une transition entre deux cultures : la culture secondaire et la culture universitaire.

Se référant à Hall (1986), Artigue distingue dans une culture mathématique trois niveaux :

- le niveau ***formel*** *correspond aux croyances sur ce que sont les mathématiques, ce qu'en sont les outils et méthodes légitimes,*

- le niveau ***informel*** *correspond aux schémas d'action et de pensée, aux manières non explicitées de faire les choses, de penser et raisonner qui résultent de l'expérience et de la pratique […].*

- le niveau ***technique*** *[…] correspond à la part explicite de la connaissance, aux techniques institutionnalisées et aux théories.* (Artigue, 2004, p. 2)

Artigue souligne que, dans une institution donnée, une grande partie des connaissances mathématiques des sujets se situent au niveau informel. *« Elles sont acquises par l'action, l'expérience, l'imitation ; elles sont non verbalisées et souvent non verbalisables ».* (ibid., p. 6). De plus, la mémoire et le contrat didactiques conditionnent la mobilisation d'une partie non négligeable des connaissances des sujets, ce qui rend ces connaissances difficiles à exploiter dans un changement d'institution. En prenant l'exemple de l'enseignement secondaire français, Artigue remarque qu'en dépit des réformes successives qui s'y sont succédées depuis la contre-réforme des années 80, la culture mathématique du Secondaire

[15] Pour ce faire, Castela (2008a) trouve nécessaire que le système didactique *« prend en charge une triple dévolution à l'élève : dévolution de la position de mathématicien, dévolution de la position d'apprenant stratégique et dévolution de la position d'autodidacte »* (p. 25). Elle remarque en même temps que jusqu'à présent, la didactique n'a pris en compte que la première de ces dévolutions.

reste caractérisée par la fragilité des connaissances des élèves qui terminent le lycée, une fragilité accrue par un enseignement « *où la composante d'explicitation et de structuration du savoir a plus de difficultés à vivre que par le passé* » (ibid.).

D'autres chercheurs (Praslon, 2000), (Bloch, 2000 & 2005), (Gueudet, 2005), (Ghedemsi, 2008) ont mis en évidence des éléments qui caractérisent le changement culturel dans le passage du lycée à l'université et favorisent le développement de ruptures entre les deux niveaux d'enseignement. Parmi ces éléments, nous citons :

- l'accélération du temps didactique à l'université et l'évolution de la dialectique cours/exercices, ce qui limite le travail des techniques et rend plus difficile, faute de maîtrise technique, la prise d'initiatives dans la résolution des exercices et problèmes ;

- l'évolution du degré d'autonomie requis pour la réalisation d'un certain nombre de tâches, même élémentaires, et pour l'acquisition de méthodes de travail (savoir-faire). Pour Praslon (2000) *« l'institution universitaire ne s'impose pas toujours, en matière de savoir-faire, des objectifs bien circonscrits, comme le fait le lycée, qui s'appuie en ce domaine sur des textes de programmes très précis. »* (Praslon, 2000, p. 50) ;

- l'évolution des objets d'enseignement : passage d'objets pré-construits à des objets définis de façon axiomatique et formelle (comme les notions de limite et de nombre réel), enseignements de concepts généralisateurs, unificateurs, simplificateurs qui s'accompagnent d'une formalisation entraînant une perte de lisibilité et limitant le rôle de la perception en résolution de problèmes, accroissement du niveau d'abstraction ;

- la modification du contrat didactique, notamment au niveau des exigences de rigueur et des modes de validation.

Pour Artigue (2004), prévoir des dynamiques qui permettront les évolutions nécessaires et aideront les étudiants à surmonter difficultés et obstacles ne peut se faire en rompant brutalement avec la culture du Secondaire. Cette culture, aussi limitée soit-elle, présente en effet une certaine potentialité et il revient à l'institution du Supérieur de déterminer comment en tirer parti et comment aider les nouveaux venus à l'université à comprendre et à répondre à ses attentes. Ceci, selon Artigue, demande de *« comprendre suffisamment ce que savent réellement les étudiants qui arrivent à l'université pour déterminer ce qui est exploitable de ces connaissances, ce qui a besoin d'être reconstruit et sur quelles bases peut s'opérer cette reconstruction »* (ibid., p. 7), mais aussi de ne pas chercher à tout prix à se situer dans la stricte continuité du lycée. Ce serait, selon l'auteur, une erreur aussi profonde que celle, très fréquente, qui consiste à rejeter ou ignorer la culture du lycée.

II. 2. Secondaire/Supérieur, l'obstacle du formalisme

Plusieurs travaux qui se sont intéressés à l'étude de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques au Supérieur ont mis en évidence les difficultés des étudiants dues à l’usage du formalisme mathématique. C’est le cas notamment des recherches menées dans différentes universités françaises entre les années 1987 et 1994 au sujet de l’algèbre linéaire (Dorier, 1990), (Robert et Robinet, 1989), (Rogalski, 1991). Elles ont montré que les difficultés des étudiants dans ce domaine *« sont […] révélatrices d’un même obstacle, massif, qui apparaît pour toutes les générations successives, et pratiquement pour tous les modes d’enseignement : c’est ce que [les auteurs appellent] naïvement :* ***l’obstacle du formalisme****. »* (Dorier et al., 1997, p. 105). Les expérimentations, de type diagnostic, menées dans le cadre de ces recherches, ont permis de montrer à quel point le manque de maîtrise du langage ensembliste et la déficience dans les connaissances de logique élémentaire conduisent à des blocages dans la résolution de problèmes et rendent inopérantes les connaissances d’algèbre linéaire étudiées. Pour Dorier et al., les difficultés observées sont ainsi en grande partie dues au peu d’utilisation des notions de logique et du langage de la théorie des ensembles avant l’introduction même de l’algèbre linéaire. Ce langage, écrit-il, *« n’est pas vraiment introduit, pas même partiellement en ce qui concerne le lycée, et seulement « par la bande » en première année d’université. Son caractère formalisateur et généralisateur n’est pas problématisé. Et on passe ensuite rapidement à de "vraies mathématiques" »* (ibid., p. 145)

De façon similaire, dans son mémoire en didactique des mathématiques intitulé *« arrimage Secondaire-Collégial : démonstration et formalisme »*, Corriveau (2007), étudie la transition du Secondaire vers le Collégial dans le système d’enseignement québécois, particulièrement en ce qui concerne les difficultés liées à l’usage du symbolisme mathématique et des règles de logique dans l’établissement de démonstrations par les étudiants. Elle remarque qu’au collégial, les symboles représentant les nouveaux objets mathématiques et leurs relations sont introduits par l’enseignant sans insistance sur les choix effectués ni sur les règles qui régissent leur manipulation et dont dépendent les propriétés des objets enseignés. Corriveau montre dans son travail que cette situation conduit la majorité des étudiants à perdre le sens du langage symbolique qu’ils manipulent et le contrôle du travail qu’ils effectuent, ce qui aboutit souvent à des résultats incohérents ou vides de sens. L’auteur ajoute que : *« comme la logique ne fait plus partie explicitement du programme du secondaire, l’utilisation des règles de logique se fait, en partie, inconsciemment de la part des étudiants »* (ibid., p. 18), ce qui complexifie les tâches de démonstration et entraîne un manque de contrôle sur la structure logico-déductive de la preuve.

Plusieurs autres chercheurs se sont intéressés à la question des difficultés en logique que rencontrent les étudiants entrant à l’université. Dans sa thèse, consacrée à l’étude de la place de la logique dans l’activité mathématique des étudiants, El Faqih (1991), repère chez des étudiants français de DEUG-A (première année université), un certain nombre de lacunes en logique dont l’analyse lui permet d’établir une différence entre *le fonctionnement des éléments de logique qui apparaît spontanément* chez les étudiants et *le fonctionnement logico-mathématique*. Cette inadéquation apparaît sous deux formes :

- *comme défauts d'interprétation* (ce qui correspond à une lecture du discours mathématique non conforme au sens logico-mathématique)

- *comme erreurs opératoires* (liées à une méconnaissance des lois et règles de logique : lois de De Morgan, interversion des quantificateurs…)

Selon l'auteur, ces lacunes *« apparaissent […] comme un véritable handicap, leurs effets négatifs dépassent parfois toute prévision, au point que le savoir mathématique des étudiants s'en trouve complètement dénaturé. »* (ibid., p. 163). Face à ce constat, El Faqih conclut à la nécessité d'une réponse du côté de l'enseignement. Cet enseignement, pour lui, ne doit pas se limiter à la présentation du vocabulaire logico-mathématique et de certaines propriétés et lois logiques, il doit en outre permettre de comprendre le mode de fonctionnement des connaissances en logique, et ceci par la mise en œuvre systématique de ces connaissances dans l'activité mathématique courante des étudiants. Dans ce contexte, l'auteur précise qu'*« un enseignement de logique, quelle qu'en soit la forme, devrait tendre beaucoup plus vers l'acquisition d'un certain savoir-faire logique que vers un savoir logique en soi »* (ibid., p. 165)

Durand-Guerrier, Arsac (2003) et Chellougui (2004) explorent, quant à eux, le problème de la rigueur dans le domaine de l'analyse et s'interrogent quant aux moyens pouvant permettre à l'étudiant, *« en tant que novice du domaine mathématique étudié, [de] satisfaire aux exigences de rigueur qui permettent, en principe, de se prémunir contre les preuves invalides »* (Durand-Guerrier, Arsac, 2003, p. 297). Pour Durand-Guerrier et Arsac, la réponse à cette question conduit en premier lieu à répondre à la question : *« par quoi, dans son discours auprès des étudiants, [le professeur] remplace-t-il la logique absente ? »* (ibid., p. 297). L'étude de la pratique de la démonstration en analyse au début des études universitaires permet aux auteurs de constater que celle-ci *« se fonde sur le raisonnement à partir de l'exemple générique*[16] *lequel peut s'analyser à l'aide de la déduction naturelle dans le calcul des prédicats. Dans le discours de l'enseignant, ce mode de raisonnement apparaît sous forme de règles de manipulation des variables »* (ibid., p. 296), lesquelles se trouvent très contextualisées et fortement dépendantes des savoirs en jeu, ce qui peut expliquer leur difficulté d'appréhension par les étudiants débutants.

Adoptant ce point de vue, Chellougui (2004) étudie les difficultés liées à l'usage des énoncés à quantifications multiples que rencontrent des étudiants tunisiens de première année scientifique dans la conduite des raisonnements mathématiques. Son étude montre une insuffisance, pour un bon nombre d'étudiants, du contrôle des aspects tant syntaxique que sémantique de la structure logique des énoncés mathématiques, des difficultés à mettre en

[16] défini par Balacheff par (1988) : *« L'exemple générique consiste en l'explication des raisons de la validité d'une assertion par la réalisation d'opérations ou de transformations sur un objet présent, non pour lui-même, mais en tant que représentant caractéristique d'une classe »*

œuvre plusieurs quantificateurs dans un même énoncé et des difficultés d'articulation entre logique et mathématiques. Pour surmonter ces difficultés, Durand-Guerrier et Arsac conjecturent qu'il est impératif de mettre sur pied un enseignement plus systématique des règles de raisonnement prenant en compte *« de manière explicite l'articulation entre les aspects syntaxique et sémantique qui est au cœur de l'activité mathématique dés lors que l'on se propose de tirer parti des avantages du formalisme liés à ses propriétés opératoires, l'aspect* ***syntaxique****, sans renoncer pour autant aux intérêts d'un contrôle par la signification, l'aspect* ***sémantique*** *»* (Durand-Guerrier, Arsac, 2003, p. 334).

Les travaux de recherche que nous venons de citer montrent que le langage mathématique formel (y compris le langage de la logique) est loin de pouvoir fonctionner de façon naturelle et spontanée chez les étudiants entrant à l'université. Les effets négatifs induits par les difficultés de son usage sur l'activité mathématique des étudiants sont incontestables dans de nombreux pays. Mais la question des stratégies à développer pour remédier à cet état de fait, celle de l'importance qu'il faut accorder à ce langage et à son fonctionnement au niveau de l'enseignement, restent toujours largement ouvertes.

II. 3. Secondaire/Supérieur, discontinuité des organisations praxéologiques

Se situant dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique, Bosch et al. (2004) étudient les difficultés qui surgissent lors de la transition entre l'enseignement secondaire et l'université en Espagne. Pour ces chercheurs, ces difficultés s'expliquent, entre autres choses, par des contradictions, des discontinuités et des changements brusques dans les contrats didactiques institutionnels qui régissent les organisations mathématiques et didactiques des deux institutions. Ils les décrivent de la façon suivante :

1. Dans le Secondaire

Dans l'enseignement secondaire (S), les organisations mathématiques (OM) enseignées sont généralement *ponctuelles*, *rigides* et *peu coordonnées* entre elles, ce qui rend difficile, et même empêche, la construction d'organisations mathématiques locales (OML) *relativement complètes*. L'activité mathématique dans (S) se trouve en conséquence centrée sur le bloc pratico-technique $[T/\tau]$. Le bloc technologico-théorique $[\theta/\Theta]$, quant à lui, a peu d'incidence sur le travail effectivement effectué par les élèves.

Pour justifier leur point de vue, les auteurs postulent l'existence d'indices caractéristiques du degré de complétude d'une OML, dont le manquement met en évidence certains aspects de rigidité des OMP et leur limite à s'articuler et à s'intégrer dans des OML relativement complètes. Nous résumons ces indicateurs dans les points suivants :

***i_1*)** Intégration des types de tâches composant l'OML, soit par un discours technologique, soit par développement successifs des techniques associées.

***i_2*) Existence de techniques alternatives associées aux types de tâches des OML et présence d'éléments technologiques permettant de questionner ces techniques, d'analyser leurs équivalences ou leurs différences et de discerner celle qui est la plus fiable ou la plus économique.

***i_3*) Indépendance des techniques par rapport aux objets ostensifs à leur description et application.

***i_4*) Existence de techniques réversibles permettant de résoudre une tâche mais aussi la tâche inverse.

***i_5*) Possibilité d'interpréter le fonctionnement des techniques et de leur résultat ; ce qui attribue plus de fonctionnalité au discours technologique dès lors qu'il doit comporter les éléments technologiques nécessaires pour mettre en œuvre cette tâche d'interprétation.

***i_6*) Existence de tâches mathématiques « ouvertes », où les données et les inconnues des situations étudiées ne sont pas préétablies complètement à l'avance (comme par exemple dans les tâches de dénombrement, de calcul de probabilité, de modélisation mathématique…)

***i_7*) Incidence des éléments technologiques associés aux OML sur la pratique mathématique, avec génération de nouveaux types de tâches et de techniques.

Bosch et Gascon, illustrent par l'exemple ci-dessous (2005, p.118-119) les contraintes institutionnelles qui empêchent des OMP enseignées d'évoluer et de s'intégrer dans des OML relativement complètes :

1) Nous partons du constat de certaines erreurs persistantes chez les étudiants espagnols de lycée lors de l'apprentissage du thème « limites de fonctions », erreurs qui témoignent de la construction d'une OM locale formée d'OM ponctuelles très faiblement intégrées :

- *On identifie la limite d'une fonction en un point avec la valeur de la fonction en ce point et, par conséquent, on tend à considérer que les fonctions sont continues en tous les points de leur domaine de définition.*
- *On ne sait pas pourquoi dans certains cas la limite se calcule en remplaçant la variable x par la valeur au point considéré alors que, dans d'autres cas, il faut auparavant réaliser certaines transformations algébriques sur l'expression de la fonction.*
- *Ce qui justifie la valeur de la limite d'une fonction en un point est un tableau de valeurs « de plus en plus proches » du point considéré, c'est-à-dire le constat empirique de l'existence d'une unique suite dont les images semblent converger vers la limite considérée.*

2) Ces phénomènes, qui ont lieu dans l'OM « apprise » et que l'on retrouve dans les différents processus didactiques observés, s'expliquent par les contraintes que l'OM « à enseigner » impose à l'OM « enseignée » :

- *Impossibilité à aller au-delà des problèmes de calcul de limites de fonctions données par leurs expressions algébriques (**ponctualisation des problèmes**)*

- *Impossibilité à varier les techniques utilisées et à justifier leur choix (**rigidité technique**)*
- *Discours technologique formel qui ne résout pas les besoins de justification de la pratique.*
- *Rôle technologique attribué au graphe et au tableau de valeurs d'une fonction.*
- *Echec dans les essais de motiver l'introduction de la notion de limite.*

Pour Bosch et Gascon, l'OM « à enseigner » dans cet exemple se compose d'éléments provenant de deux OM savantes : *« celle qui répond au problème du **calcul** de la limite d'une fonction élémentaire basée sur une "algèbre des limites", dont elle emprunte le bloc pratique, et celle qui répond au problème de l'**existence** de la limite d'une fonction élémentaire, basée sur la définition $\varepsilon - \delta$ ou sur la convergence de suites de réels, dont elle emprunte le bloc technologico-théorique »*. (ibid.,). Le manque de matériel technologique dans l'institution d'enseignement considérée, entraine une faiblesse au niveau des liens entre les OMP enseignées, les empêchant de s'intégrer dans une OML relativement complète. Notons que pour les auteurs, la notion de « *complétude* » reste relative. On ne peut, selon eux, parler d'une OML « *complète* » ou « *incomplète* » de façon absolue, il s'agit plutôt d'une question de degré de complétude : il existe des OML plus ou moins complètes que d'autres en fonction de leurs possibilités à répondre aux indicateurs explicités ci-dessus.

2. Dans le Supérieur

A l'université (U), en revanche, on commence dès le début par l'étude d'organisations mathématiques régionales (OMR), dont la présentation est concentrée, par raison d'économie, sur la théorie Θ. On ne cherche pas à utiliser les éléments technologiques ou théoriques enseignés pour intégrer les OMP disponibles (ou préalablement étudiées dans (S)), dans des OML relativement complètes. On suppose souvent que les OML évoquées dans (U) sont disponibles avec un degré suffisant de complétude et qu'il n'y a pas de nécessité de « descendre aux détails » (Bosch et al., 2004). Ceci conduit à réduire l'opération d'enseignement/apprentissage des mathématiques dans (U) à une opération d'enseignement/apprentissage de théories. Le bloc pratico-technique $[T/\tau]$ se trouve le plus souvent déconnecté du bloc technologico-théorique $[\theta/\Theta]$; son développement est considéré comme une activité secondaire dans le processus didactique global, jouant un rôle auxiliaire dans l'apprentissage des théories.

Pour Bosch et al. (ibid.), ceci est un signe de malentendu entre les institutions (S) et (U), constituant un obstacle d'origine didactique important qui provoque un dysfonctionnement dans l'étude des mathématiques à l'entrée de l'université. On ne peut attendre des étudiants qu'ils construisent spontanément par eux-mêmes des OML relativement complètes, si celles-ci ne sont pas construites dans une institution (S ou U). Pour cette raison, une des principales conclusions pratiques du travail de ces auteurs est de souligner la nécessité d'établir des liens entre les institutions (S) et (U), et que celles-ci prennent en charge la construction d'OML relativement complètes afin d'atténuer les grandes difficultés que rencontrent les élèves dans leur passage du Secondaire au Supérieur.

III. Conclusion et organisation des travaux de thèse

L'étude que nous venons de réaliser montre que les difficultés résultantes de la transition Secondaire/Supérieur ne sont pas spécifiques à un pays donné. Ces difficultés se présentent au contraire comme caractéristiques de cette transition indépendamment de la société ou de l'institution où elle prend place. Deux approches différentes essayent d'expliquer les origines de ces difficultés. D'une part, les recherches à caractère cognitif attribuent les difficultés constatées aux changements qui se produisent à l'université au niveau de la construction des connaissances et de la complexité des savoirs enseignés. Ces recherches trouvent nécessaire que les sujets de l'institution universitaire profitent pendant la période transitoire d'un encadrement spécifique et du temps nécessaire pour pouvoir s'adapter aux changements qui se produisent et permettre les développements intellectuels et cognitifs qui leur sont inhérents. D'autre part, les recherches relevant de l'approche anthropologique attribuent ces difficultés à un manque d'articulation concernant les praxéologies mathématiques placés dans les institutions Secondaire et Supérieur et à une discontinuité dans l'organisation praxéologique du savoir enseigné lors du passage du Secondaire au Supérieur. Admettant que chacune des deux approches permet d'élucider un des aspects de la transition Secondaire/Supérieur et permet d'expliquer une part des difficultés qui en résultent, nous tenterons dans notre thèse de nous servir de l'une comme de l'autre des deux approches pour répondre à nos questions de recherche.

Ainsi, l'étude des rapports des institutions ES et CPS1 aux notions ensemblistes fonctionnelles et au formalisme mathématique associé nous permettra de répondre aux deux premières questions de recherche que nous rappelons :

> **1)** Quelles sont les notions fonctionnelles et les notions ensemblistes associées, étudiées dans l'enseignement secondaire (ES) ? Comment est organisé leur enseignement et quelles sont les formes de leur intervention dans les exercices et problèmes ?
>
> **2)** Comment est organisé l'enseignement de ces notions dans l'institution de première année des classes préparatoires scientifiques (CPS1) ? Quelles évolutions subissent-elles dans les différents thèmes d'étude, et quelles sont les formes de leur intervention dans les exercices et problèmes ?

Dans cette étude, nous nous intéresserons aux environnements praxéologiques relatifs à l'enseignement des notions ensemblistes fonctionnelles dans les institutions ES et CPS1 et aux aspects de continuité et de discontinuité entre ces environnements lors du passage de l'institution ES à l'institution CPS1. Nous étudierons pour cela, dans chacune des deux institutions, l'écologie des notions ensemblistes fonctionnelles, les outils sémiotiques utilisés, la possibilité d'intégration des OMP dans des OML et à quel point les OML disponibles peuvent répondre aux indices de complétude donnés par Bosch et al (2004). Ceci nous permettra de voir si les praxéologies mathématiques mises en place dans chacune des deux institutions permettent l'articulation entre les différents thèmes d'étude et la structuration du savoir désigné pour l'enseignement des dites notions. Nous étudierons également les formes d'intervention des blocs pratico-technique $[T/\tau]$ et technologico-théorique $[\theta/\Theta]$ des praxéologies dans les exercices et problèmes proposés dans les documents de travail de chacune des deux institutions. Cette étude nous permettra de déterminer *le niveau institutionnel de fonctionnement des connaissances* pour chacune des institutions ES et CPS1 à propos des notions ensemblistes fonctionnelles. Ce travail fera l'objet du chapitre II de la thèse.

L'étude des rapports personnels des étudiants aux notions fonctionnelles et au formalisme mathématique et son évolution le long de la première année en CPS1 nous permettront de répondre aux questions 3, 4 et 5 de la thèse que nous rappelons ci-dessous :

> **3)** Quelles connaissances ont les étudiants à propos des notions ensemblistes fonctionnelles à la fin de leurs études secondaires ?
>
> **4)** Comment évoluent les rapports des étudiants aux notions ensemblistes fonctionnelles et au symbolisme mathématique dans l'institution CPS1 ?
>
> **5)** Quelles sont les difficultés éventuelles qu'éprouvent les étudiants dans l'activité de résolution de problème, dues à l'usage des notions fonctionnelles et du symbolisme mathématique ? A quel niveau se situent ces difficultés, et quelles sont leurs origines ?

Un test diagnostique à propos des notions fonctionnelles étudiées dans le Secondaire, passé par les étudiants de deux classes de CPS1, le premier jour de la rentrée universitaire avant le début des cours, nous permettra d'étudier le rapport personnel de ces étudiants aux notions fonctionnelles à la fin de l'enseignement secondaire et de répondre en conséquence à la question 3 de la thèse. Ceci nous permettra également de déterminer *le niveau personnel de fonctionnement des connaissances* dans l'institution ES à propos des dites notions.

Pour étudier l'effet de l'enseignement ordinaire dans l'institution CPS1 sur l'évolution des rapports personnels des étudiants aux notions fonctionnelles et au symbolisme mathématique, nous ferons passer aux mêmes étudiants concernés par le test diagnostique un test d'évaluation après deux trimestres d'enseignement en CPS1. Au cours de ces deux trimestres, les étudiants auront suivi un enseignement ordinaire, dans le sens qu'aucune action didactique particulière visant à modifier le cours normal des enseignements n'aura été entreprise. Ce test d'évaluation et l'analyse des productions des étudiants qui lui sont relatives nous permettront de répondre à la question 4 de la thèse, de connaitre le niveau de savoir atteint par les étudiants concernant les notions ensemblistes fonctionnelles après une année d'étude en CPS1 et de préciser en conséquence *le niveau personnel de fonctionnement des connaissances* des étudiants de cette institution.

Le test diagnostique et le test d'évaluation feront l'objet du chapitre III de la thèse.

Pour répondre à la question 5 de la thèse, nous nous appuierons sur trois types d'analyses :

- Le premier type concerne l'analyse des productions des étudiants au test d'évaluation précédemment décrit et l'interprétation des difficultés et obstacles constatés dans ces productions.

- Le deuxième type concerne l'étude, à travers un questionnaire, des habitudes de travail personnel des étudiants dans l'institution CPS1 et des difficultés qu'ils rencontrent dans leur apprentissage des mathématiques, particulièrement en Algèbre. L'analyse des réponses des étudiants à ce questionnaire, qui fera l'objet du chapitre IV de la thèse, nous renseignera sur les possibilités des étudiants à répondre aux exigences de travail de l'institution CPS1.

- Le troisième type d'analyse concerne le suivi du travail d'un groupe réduit d'étudiants dans deux séances de résolution d'exercices. L'analyse des discussions des étudiants enregistrées au cours de leur travail dans ces séances et de leurs réponses aux questions de l'enseignant à propos de leurs productions et des difficultés rencontrées, nous permettront d'avoir une idée plus claire sur la manière dont les étudiants gèrent les données des exercices et utilisent leurs connaissances pour répondre aux questions des exercices donnés.

La prise en compte de ces trois types d'analyse nous permettra, nous semble-t-il, de mieux comprendre les origines des difficultés que rencontrent les étudiants dans l'activité de résolution de problèmes et particulièrement en ce qui concerne l'usage des notions fonctionnelles et du symbolisme mathématique.

Finalement, pour répondre à la question 6 de la thèse :

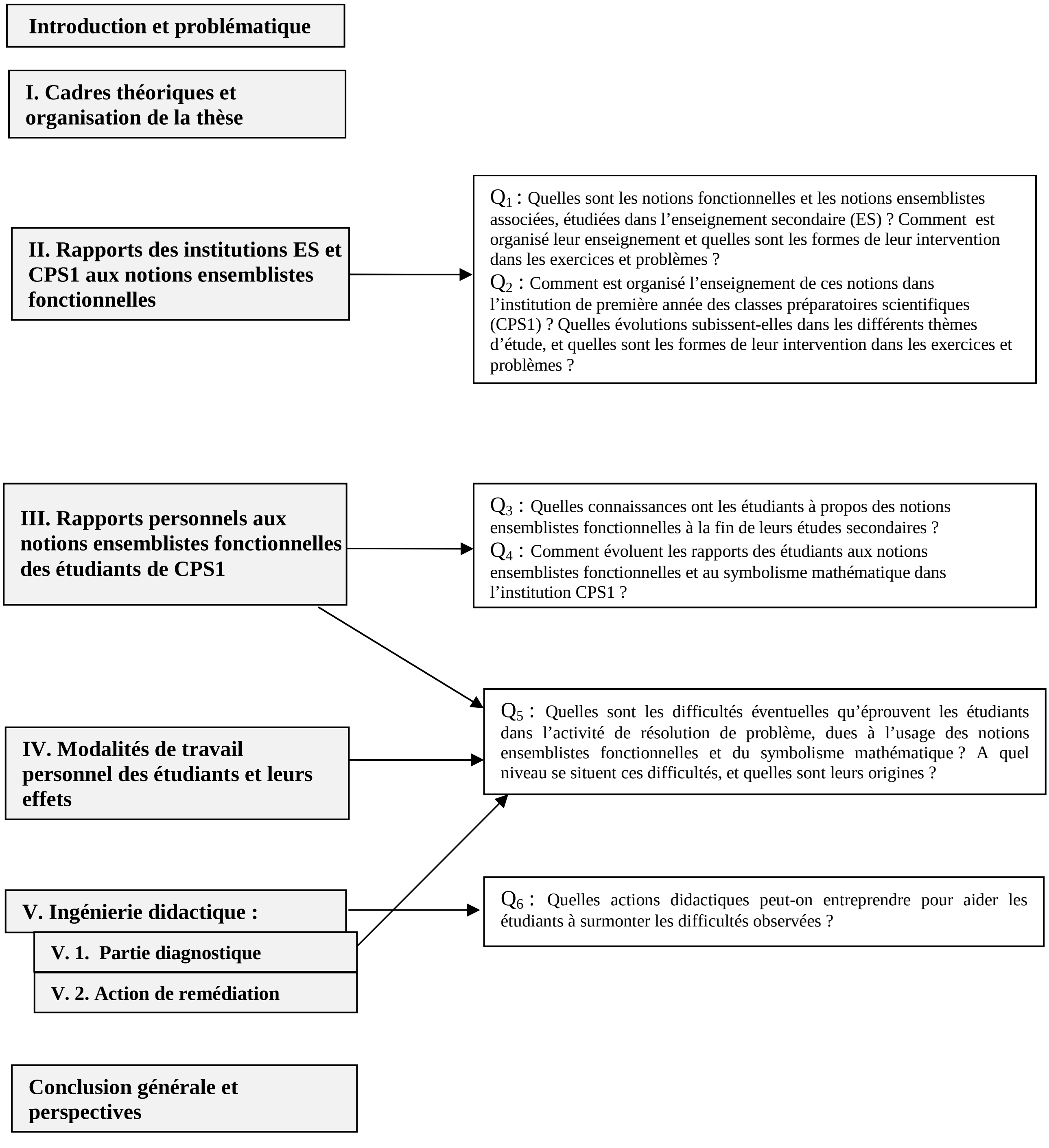
> **6)** Quelles actions didactiques peut-on entreprendre pour aider les étudiants à surmonter les difficultés observées ?

nous expérimenterons avec le groupe réduit des étudiants concernés par l'expérimentation précédemment indiquée, une ingénierie didactique visant à étudier les possibilités d'aider les étudiants à surmonter les difficultés constatées dans les différentes expérimentations réalisées. Le travail effectué avec le groupe réduit d'étudiants (analyse de leur travail dans les deux séances de résolution d'exercices ajoutées à l'ingénierie didactique) fera l'objet du chapitre V de la thèse.

Nous terminerons notre thèse par un chapitre de conclusion, présentant également les perspectives que nous voyons à ce travail de recherche.

V. Organigramme récapitulatif

Nous récapitulons dans le diagramme suivant l'organisation générale de la thèse



Chapitre II : Rapports des institutions « Enseignement Secondaire » et « Classes Préparatoires Scientifiques » aux notions ensemblistes fonctionnelles

Dans ce chapitre nous envisageons d'étudier les rapports des institutions Enseignement Secondaire (ES) et Première année des Classes Préparatoires Scientifiques (CPS1) aux notions ensemblistes fonctionnelles et au formalisme mathématique associé, en vue de répondre aux deux premières questions de notre thèse :

> **1)** Quelles sont les notions fonctionnelles et les notions ensemblistes associées, étudiées dans l'enseignement secondaire (ES) ? Comment est organisé leur enseignement et quelles sont les formes de leur intervention dans les exercices et problèmes ?
>
> **2)** Comment est organisé l'enseignement de ces notions dans l'institution de première année des classes préparatoires scientifiques (CPS1) ? Quelles évolutions subissent-elles dans les différents thèmes d'étude, et quelles sont les formes de leur intervention dans les exercices et problèmes ?

Pour ce faire, nous nous intéressons aux environnements praxéologiques relatifs aux notions fonctionnelles et aux notions ensemblistes associées présents dans les documents de travail de chacune des deux institutions ES et CPS1. Nous étudions, dans chacune des deux institutions, l'écologie des notions fonctionnelles, les outils sémiotiques utilisés dans leur enseignement, les praxéologies mathématiques mises en place pour leur étude ainsi que les modes d'intervention de ces praxéologies dans la résolution des exercices et problèmes. Nous regardons d'un autre côté la possibilité d'intégration des Organisations Mathématiques Ponctuelles (OMP) dans des Organisations Mathématiques Locales (OML) et à quel point les OML disponibles peuvent répondre aux indices de complétude donnés par Bosch et al. (2004). Ceci nous permettra de voir si les praxéologies mathématiques mises en place dans chacune des deux institutions permettent l'articulation des différents thèmes d'étude et la structuration du savoir désigné pour l'enseignement des dites notions et de voir les aspects de continuité et de discontinuité entre les environnements praxéologiques mis en place lors du passage de l'institution ES à l'institution CPS1. Nous concluons en précisant, pour chacune des institutions ES et CPS1, *le niveau institutionnel de fonctionnement des connaissances* à propos de l'étude des notions fonctionnelles et des notions ensemblistes associées.

I. Aperçu général sur les institutions « Enseignement Secondaire » et « Classes Préparatoires Scientifiques »

I. 1. L'institution « Enseignement Secondaire »

Dans le système d'enseignement tunisien, l'enseignement secondaire concerne les quatre années de lycée (désignées respectivement par première, deuxième, troisième et quatrième année de l'enseignement secondaire[17]). Les deux premières années constituent un tronc commun pour tous les élèves ayant terminé avec succès leur enseignement de base[18]. A la fin de la classe de deuxième année, les élèves qui réussissent sont orientés (compte tenu de leurs résultats, de leurs choix et de l'avis du conseil de classe) vers l'une des sections suivantes : Mathématiques, Sciences expérimentales, Sciences et techniques, Economie et gestion, Lettres, où ils termineront les deux dernières années de lycée. Les études dans l'enseignement secondaire sont sanctionnées par l'examen national de Baccalauréat. Le diplôme de Baccalauréat est nécessaire pour avoir accès aux études supérieures.

Par ailleurs, notons que, pour chaque niveau d'enseignement, et pour chaque discipline enseignée, un seul manuel scolaire est autorisé par le ministère de tutelle[19] pour l'utilisation en classe. Ce manuel (dit officiel), bien qu'il reflète une interprétation personnelle de ses auteurs au sujet des programmes officiels, traduit, dans une certaine mesure, le point de vue de l'institution quant à l'application et la mise en œuvre des programmes officiels dans l'enseignement. Notons que pour chacun des manuels officiels qui concernent nos analyses, il y a au moins un inspecteur qui fait partie du groupe des auteurs. Pour ces raisons, les textes des programmes officiels, ajoutés aux manuels officiels, semblent permettre de fournir une vue d'ensemble assez conforme quant aux rapports de l'institution du Secondaire aux différentes notions qui y sont enseignées. Nous adoptons ce point de vue pour l'étude des rapports institutionnels aux notions ensemblistes fonctionnelles dans l'enseignement secondaire.

I. 2. L'institution « Classes Préparatoires Scientifiques »

Les Classes Préparatoires Scientifiques constituent un cycle d'enseignement supérieur dont la vocation est de préparer ses sujets au concours national d'entrée aux écoles d'ingénieurs tunisiennes. Elles proposent trois branches d'étude : Mathématiques-Physique, Physique-Chimie et Physique-Technique. Les étudiants admis à poursuivre leurs études dans ces classes sont choisis selon les branches d'étude respectivement parmi les bacheliers des sections Mathématiques, Sciences expérimentales et Sciences et techniques. Les critères d'admission varient selon l'institution où est assuré ce type d'enseignement. Pour le cas de notre recherche, l'institution où se sont déroulées nos expérimentations[20] est classée la deuxième en Tunisie du point de vue des critères d'admission exigés. Les moyennes générales et les moyennes des matières scientifiques (Mathématiques et Physique) obtenues dans l'examen de baccalauréat par les étudiants admis dans cette institution sont supérieures ou égales à

[17] Dans le système d'enseignement français, ces classes correspondent respectivement aux classes de troisième, seconde, première et terminale. Les élèves de première année secondaire tunisienne sont des élèves de 15/16 ans.
[18] L'enseignement de base comprend neuf années d'étude réparties en deux cycles : le cycle primaire qui comprend six ans et le cycle du collège qui en comprend trois.
[19] Après l'accord préalable d'une commission d'évaluation constituée généralement, d'inspecteurs, de conseillers pédagogiques et d'enseignants du Secondaire et/ou du Supérieur.
[20] Il s'agit de l'institut préparatoire aux études d'ingénieur de Tunis (IPEIT)

quinze[21] sur vingt. Les programmes d'enseignement dans ces classes sont nationaux, arrêtés par le ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique. Les enseignements se font dans des classes comportant généralement entre 30 et 35 étudiants et se font en cours intégrés. C'est à dire que, pour chaque matière, l'enseignant se charge d'assurer et le cours et les travaux dirigés. Pour ce qui concerne les mathématiques, il y a, pour chaque classe, un enseignant qui assure l'enseignement du programme d'algèbre et un autre le programme d'analyse. Nos expérimentations ont concerné des étudiants de première année Mathématiques-Physique (MP). Ces étudiants font 12 heures de mathématiques par semaine, à raison de 6 heures d'Algèbre et 6 heures d'Analyse. Les cours sont assurés de façon personnelle par les enseignants. En ce sens qu'il n'y a pas de manuel ou de polycopié de cours que les enseignants seraient contraints d'utiliser. Pour les travaux dirigés, les étudiants de toutes les classes de première année MP de l'institution IPEIT ont une série d'exercices commune relative à chaque chapitre. Cette série est préparée, à tour de rôle, par les enseignants de ces classes[22]. Par ailleurs, l'évaluation des connaissances se fait en contrôle continu, avec, pour chacun des trois trimestres de l'année universitaire, un devoir surveillé au milieu du trimestre, un ou deux tests écrits, un test oral et un examen à la fin du trimestre. Le devoir surveillé et l'examen sont communs à toutes les classes d'une même branche.

II. Les notions fonctionnelles et les critères d'analyse retenus pour notre travail

Comme nous l'avons précisé dans la problématique, nous nous restreignons dans notre travail aux notions fonctionnelles en rapport avec les notions ensemblistes, l'algèbre des structures et l'algèbre linéaire. Nous écartons par conséquent de notre travail l'étude des propriétés analytiques et topologiques liées aux fonctions (limite, continuité, dérivabilité…). Par ailleurs, vu le contexte temporel et institutionnel dans lequel se place notre thèse, nous nous intéressons dans l'institution du Secondaire aux programmes de 1998[23], en vigueur dans la période des études secondaires des étudiants concernés par notre recherche, et pour les deux dernières années de lycée, nous nous restreignons à la section « Mathématiques » dont sont issus ces étudiants.

Dans ces conditions, les notions fonctionnelles enseignées dans les institutions ES et CPS1 que nous retenons pour notre travail sont les suivantes :

- Notions d'application et de fonction et opérations sur les applications (opérations algébriques, de composition et de décomposition).

[21] Avec des variations minimes d'une année à l'autre selon la capacité d'admission et les résultats nationaux au baccalauréat.

[22] Durant les deux années où se sont déroulées nos expérimentations (2006/2007 et 2007/2008) l'institut IPEIT comptait respectivement 13 et 15 classes de première année MP avec respectivement 7 et 8 enseignants en Algèbre et autant en Analyse.

[23] Décret n° 98-1280 du 15 juin 1998.

Une réforme a été mise en place à partir de l'année scolaire 2004/2005 dans la classe de première année secondaire et s'est achevée dans tout le cycle secondaire en 2007/2008. Les étudiants qui intéressent notre recherche ne sont pas concernés par cette réforme.

- Notions de bijection et de bijection réciproque.
- Propriétés de transferts : transfert d'objets et/ou de propriétés par une application (image directe d'un ensemble par une application, propriétés de conservation, transfert de propriétés géométriques et de structures par une application…)

Pour étudier les rapports des institutions ES et CPS1 à ces notions, les conditions dans lesquelles s'effectue la transition ES/CPS1, et voir dans quelle mesure les rapports institutionnels et les conditions de transition pourraient expliquer les difficultés que rencontrent les étudiants entrant à l'université à propos de l'apprentissage et de l'usage des dites notions, nous sommes amenés à cerner les facteurs liés à l'enseignement des notions fonctionnelles qui pourraient influer sur les possibilités de travail et d'apprentissage des étudiants. En nous référant à l'étude théorique effectuée dans le chapitre précédent, nous retenons pour nos analyses les points suivants :

1) Les environnements praxéologiques dans chacune des deux institutions relatifs à l'enseignement des notions fonctionnelles et les possibilités d'intégration et de complétude des différents niveaux de praxéologies mathématiques mis en place.
2) L'importance des blocs pratico-technique $[T/\tau]$ et technologico-théorique $[\theta/\Theta]$ dans la pratique mathématique des élèves et étudiants, et leurs modes d'intervention dans l'activité de résolution de problèmes.
3) Les formes des savoirs construits (procédural/structurel) et leurs niveaux de mise en fonctionnement.

III. Des précisions concernant les facteurs retenus pour nos analyses et grille d'analyse

1) Les environnements praxéologiques et la complétude des organisations mathématiques

Nous nous situons ici dans l'approche anthropologique du didactique. Pour chacune des notions fonctionnelles retenues pour notre travail, nous étudions son écologie dans les différents niveaux d'enseignement, les représentations sémiotiques utilisées et leurs domaines de fonctionnement, les praxéologies mathématiques mises en place pour son enseignement et les possibilités d'intégration, d'articulation et de complétude des différents niveaux de ces praxéologies mathématiques. Nous rappelons ci-dessous les principales caractéristiques des praxéologies mathématiques auxquelles nous nous intéresserons dans nos analyses, conformément aux points de vue de Bosch et al. rapportés dans le chapitre 1 (II. 3) :

c_1) Indépendance des techniques par rapport aux objets ostensifs, existence de techniques alternatives associées aux types de tâches donnés et existence de techniques réversibles. (Indices de rigidité des techniques)
c_2) Présence d'éléments technologiques permettant d'interpréter et de justifier les techniques choisies, de mettre en relation différentes OMP et de les intégrer dans des OML. (Indice de rigidité et de complétude des OMP)

***c*$_3$)** Présence d'éléments technologiques permettant de mettre en relation différentes OML et de les intégrer dans des organisations mathématiques régionales (OMR). (Indice de rigidité et de complétude des OML)

***c*$_4$)** Existence de tâches mathématiques « ouvertes » où les données et les inconnues des situations étudiées ne sont pas préétablies complètement à l'avance, et où l'étudiant doit décider, devant une situation déterminée, quelles sont les données les plus pertinentes permettant de réaliser la tâche (comme par exemple dans les tâches de modélisation mathématique). (Degré d'autonomie dans la réalisation des tâches)

L'étude de ces caractéristiques pour les environnements praxéologiques mis en place dans chacune des deux institutions ES et CPS1 nous permettra d'étudier les possibilités d'articulation entre les différents thèmes d'étude et de structuration du savoir relatif à l'enseignement des notions ensemblistes fonctionnelles, et dans quelles conditions praxéologiques, du point de vue continuité/discontinuité, s'effectuent le passage de l'institution ES à l'institution CPS1.

2) L'importance des blocs pratico-technique et technologico-théorique dans la pratique mathématique

Dans l'enseignement, l'activité mathématique suppose généralement allier théorie et pratique. Néanmoins, l'importance accordée à chacun de ces deux aspects de l'activité mathématique dans l'opération d'enseignement/apprentissage et la répartition des rôles entre enseignants et enseignés pour accomplir les tâches inhérentes à chaque type d'activité varient d'une institution à l'autre. Ainsi, dans l'enseignement supérieur scientifique spécialisé, l'activité mathématique est généralement concentrée sur la théorie. Les exercices et problèmes données aux étudiants se rapprochent, dans une grande mesure, des démonstrations du cours et on attribue le plus souvent au bloc pratico-technique $[\mathrm{T}/\tau]$ un rôle auxiliaire dans l'enseignement des théories. Dans le Secondaire, en revanche, l'activité mathématique se trouve souvent centrée sur le bloc pratico-technique $[\mathrm{T}/\tau]$. Le bloc technologico-théorique $[\theta/\Theta]$, quant à lui, a peu d'incidence sur le travail effectivement effectué par les élèves.

Ainsi, dans les manuels officiels de l'enseignement secondaire tunisien, nous remarquons un écart, parfois important, entre le discours technologique utilisé pour institutionnaliser des résultats théoriques et le discours technologico-théorique dont les élèves auraient besoin pour résoudre les exercices qui leur sont proposés. L'exemple suivant nous servira à illustrer ce phénomène :

Dans le livre officiel de mathématiques de la classe terminale, les auteurs définissent l'espérance mathématique d'une variable aléatoire X par :

$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega).p(\{\omega\})$ où Ω désigne l'univers des cas possibles et p une probabilité sur Ω.

Pour donner l’expression de E(X) dans la cas où X prend les valeurs $x_1, x_2, ..., x_n$, les auteurs procèdent ainsi :

Posons Ω_i l’événement $(X = x_i)$, $i \in \{1,2,...,n\}$

Les Ω_i forment une partition de Ω, donc on a :

$$\sum_{\omega\in\Omega} X(\omega).p(\{\omega\}) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{\omega\in\Omega_i} X(\omega).p(\{\omega\})\right)$$

Or, pour tout $\omega \in \Omega_i$, on a : $X(\omega) = x_i$, il vient alors :

$$\sum_{\omega\in\Omega_i} X(\omega).p(\{\omega\}) = x_i.\sum_{\omega\in\Omega_i} p(\{\omega\}) = x_i.p(\Omega_i)$$

Par suite $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i.p(\{X = x_i\})$

La définition de E(X) et la démonstration qui s’ensuit renferment des points qui semblent loin d’être transparents pour un élève de terminale. Nous résumons ces points dans ce qui suit :

✓ $\sum_{\omega\in\Omega}$: la sommation s’étend sur tous les éléments de Ω. Il s’agit d’une sommation selon un critère (ω appartient ou n’appartient pas à Ω), souvent utilisée dans des sommes infinies. Elle se distingue ainsi de la sommation $\sum_{i=1}^{n}$ que les élèves ont l’habitude d’utiliser dans l’étude des suites numériques.

✓ L’écriture de ω avec ou sans accolades dans $X(\omega).p(\{\omega\})$ marque la différence entre les ensembles de départ de X (égal à Ω) et celui de p (égal à $\mathscr{P}(\Omega)$).

✓ L’événement $(X = x_i)$, noté Ω_i, désigne l’ensemble des antécédents de x_i par l’application X

✓ Les Ω_i forment une partition de Ω : ceci suppose de connaître ce qu’est une partition d’un ensemble. Or, cette notion ne fait pas partie du programme de l’enseignement secondaire et le manuel officiel ne donne aucune information sur cette notion ensembliste, ce qui veut dire qu’il s’agit d’une notion introduite pour le besoin de la démonstration.

✓ L’égalité : $\sum_{\omega\in\Omega} X(\omega).p(\{\omega\}) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{\omega\in\Omega_i} X(\omega).p(\{\omega\})\right)$, découle de l’associativité de l’addition dans **R**.

✓ L’égalité $\sum_{\omega\in\Omega_i} X(\omega).p(\{\omega\}) = x_i.\sum_{\omega\in\Omega_i} p(\{\omega\}) = x_i.p(\Omega_i)$ est une factorisation qui marque l’indépendance des $X(\omega)$ (c’est à dire des x_i) de ω dans un Ω_i donné.

Comprendre les différents points que nous venons de soulever demande une certaine capacité d'abstraction et une bonne familiarisation avec le langage symbolique. Or, les élèves ne sont pas habitués à un tel travail, et il se trouve que les auteurs font usage de notions, d'ostensifs et de techniques de travail qu'ils introduisent pour les besoins de la démonstration. De plus, ce dont auront besoin les élèves pour le calcul de E(X) dans les exercices est seulement la formule $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i . p(\{X = x_i\})$, (que beaucoup d'enseignants donnent comme définition de E(X)). Le discours technologico-théorique relatif à la démonstration donnée reste ainsi déconnecté, avant et après sa production, du discours technologico-théorique qu'utilisent les élèves de terminale pour le calcul de E(X).

Nos analyses visent à préciser l'écart entre ces deux ordres de discours dans chacune des deux institutions ES et CPS1, l'importance qu'occupe chacun des blocs pratico-technique et technologico-théorique dans l'activité mathématique des étudiants et les conséquences que ceci peut avoir sur les exigences de travail des élèves et étudiants dans chaque institution.

3) Les formes du savoir construit et ses niveaux de mise en fonctionnement

Nous nous plaçons ici dans l'approche cognitive de l'acquisition des connaissances décrite par Dubinsky (1991 & 2001) dans "APOS Theory" et Tall (2002) dans "The three worlds of mathematics" (cf. Chapitre 1). Selon cette approche la connaissance d'un objet mathématique se construit selon un cycle à quatre étapes : (*Action, Processus, Objet, Schéma*), et suivant un mécanisme de développement : *intériorisation, encapsulation, organisation, généralisation*, permettant le passage d'une étape à l'autre. Dans cette théorisation, nous distinguons deux niveaux dans la connaissance et l'usage d'un concept mathématique : le niveau *procédural* (le concept comme *processus*) et le niveau *structurel* (le concept comme *objet*). La possibilité de mobiliser l'aspect adéquat d'un concept (processus ou objet) pour la résolution d'un problème donné, d'établir et d'organiser des liens entre divers couples processus/objet ou de passer du niveau procédural au niveau structurel, requiert une certaine flexibilité de pensée et un niveau de maturation cognitive qui, selon l'approche cognitive, sont liées au développement et à l'évolution des opérations d'intériorisation et d'encapsulation, ainsi qu'aux possibilités d'organisation et de généralisation des objets construits dans des structures de schémas, ou d'unités cognitives, de plus en plus développés. Dans le chapitre 1 (§. I.2.3), nous avons montré comment on peut associer les niveaux de mise en fonctionnement (Robert, 1998) d'un objet donné à ses niveaux cognitifs de connaissances chez un sujet. Ainsi, nous avons associé :

- le niveau technique de mise en fonctionnement d'un concept au niveau procédural, où le sujet s'applique encore à utiliser les processus liés à la connaissance de ce concept, sans que ces processus soient parfaitement intériorisés et transformés en objet ;

- le niveau mobilisable, à des connaissances intériorisées, à la possibilité de caractériser les objets mis en jeu et à un début de constitution de la structure de schéma, avec toutefois des objets encore faiblement liés entre eux et des difficultés à mettre en œuvre des connaissances non indiquées ;

- le niveau disponible, à des structures de schémas, ou d'unités cognitives, bien développées chez le sujet, dont les objets et les items les composant sont fortement reliés et dotées d'une bonne flexibilité cognitive.

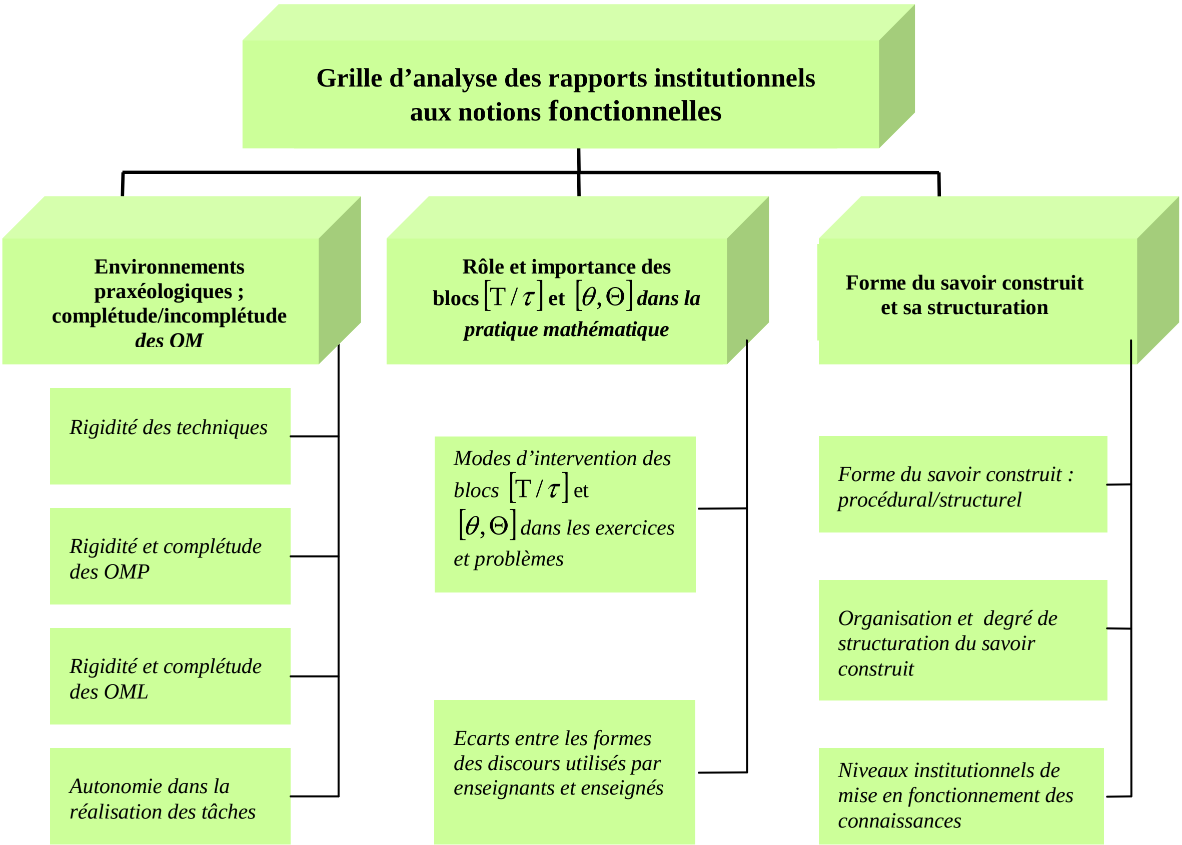
Nous avons également remarqué, dans ce contexte, que l'accès par le sujet aux différents niveaux cognitifs de connaissance d'un objet mathématique nous semble étroitement lié au niveau de structuration du savoir, institutionnellement construit, relatif à l'enseignement de cet objet ainsi qu'au niveau de complétude des praxéologies mathématiques représentant ce savoir.

Dans l'analyse des rapports institutionnels que nous envisageons d'effectuer nous précisons, à partir de la détermination des degrés de complétude des praxéologies mathématiques mises en place et des niveaux de mise en fonctionnement des notions fonctionnelles dans les exercices et problèmes, les formes du savoir construit relatif à ces notions et le niveau de structuration de ce savoir dans chacune des institutions ES et CPS1. Nous concluons en déterminant, *le niveau institutionnel de mise en fonctionnement des notions fonctionnelles* dans chacune des deux institutions ES et CPS1.

4) Diagramme récapitulatif

Nous récapitulons dans l'organigramme suivant les différents critères que nous utiliserons pour étudier les rapports des institutions ES et CPS1 aux notions ensemblistes fonctionnelles choisies pour notre recherche.

Diagramme 1 : Grille d'analyse des rapports institutionnels



IV. Rapport de l'institution ES aux notions ensemblistes fonctionnelles

Pour analyser les rapports institutionnels aux notions fonctionnelles en utilisant les critères fixés pour cette analyse, nous commençons par donner un aperçu général sur les instructions rapportées dans les textes des programmes officiels à propos de l'enseignement de ces notions. Nous étudions ensuite la manière dont ces notions sont introduites et présentées dans les manuels officiels des différentes classes de l'enseignement secondaire ainsi que les techniques de travail que les auteurs utilisent pour appliquer ces notions. Nous étudions à la fin les praxéologies mathématiques mises en œuvre dans les exercices donnés dans les manuels pour travailler les dites notions.

IV. 1. Ce que disent les programmes officiels

Précisons d'abord que, pour chaque classe de lycée, les textes des programmes officiels[24] de mathématiques sont présentés sous quatre rubriques : le premier est consacré aux thèmes à étudier, le deuxième spécifie les objectifs d'étude de chaque thème, le troisième donne les contenus détaillés des thèmes d'étude et le dernier, intitulé recommandations, est consacré à préciser des choix particuliers d'enseignement, comme la manière d'introduire une notion, des

[24] Ministère de l'éducation (1998) : Programmes officiels de l'enseignement secondaire. Annexe XI. Mathématiques.

propriétés ou théorèmes à admettre, des types de tâches auxquelles il faut accorder une attention particulière dans l'enseignement de certains thèmes…

Ceci étant, c'est en première année de lycée que commence l'étude des notions ensemblistes fonctionnelles avec l'introduction de la notion d'application lors de l'étude des applications linéaires et des applications affines. Cette étude se poursuit le long des quatre années de lycée avec l'enseignement de certaines propriétés liées aux notions ensemblistes fonctionnelles pour des catégories particulières de fonctions numériques et de transformations géométriques. L'étude générale des dites notions ne constitue pas un objectif d'apprentissage pour l'institution ES.

Ainsi, à propos de la notion d'application, nous lisons dans le programme de première année secondaire, sous la rubrique « Recommandations » :

> *« Les notions d'application d'un ensemble vers un autre et de restriction d'une application sur un intervalle de **R** seront introduites au cours des activités et on évitera de s'attarder sur leurs aspects théoriques. »* (p. 9)

Dans le programme de deuxième année secondaire, et à propos de l'étude de certaines fonctions de référence, il est précisé (p. 18) :

> *« Pour appréhender le concept de fonction, on veillera à présenter des exemples de fonctions par des procédés divers : graphiques, tableaux de données numériques, touches de la calculatrice, formules explicites.*
>
> *On évitera tout exposé général sur les concepts relatifs à cette partie du programme. »* (p. 18)

Notons que l'objectif essentiel que visent les programmes officiels à travers l'étude des notions d'application, de fonction et de bijection est de faire apparaître le fonctionnement et l'utilité de ces notions dans la résolution des exercices et problèmes. Ceci est explicitement mentionné à plusieurs reprises dans les textes des programmes officiels. Ainsi, dans les programmes de deuxième année secondaire, nous lisons :

> *« L'étude des translations et des homothéties n'est pas une fin en soi ; c'est leur fonctionnement dans la résolution de problèmes d'alignement, de concours, de construction et de recherche d'ensembles de points, qui constitue le but essentiel. » (p. 19)*

Nous résumons dans les tableaux qui suivent les différents moments d'étude des notions d'application et de bijection et les types de tâche où les programmes officiels recommandent explicitement de faire apparaitre leur fonctionnement.

1) Notion d'application

Vu la variété des thèmes où interviennent cette notion et pour une raison de commodité (de construction des tableaux et de leur lecture), nous établissons pour cette notion deux tableaux. Le premier concerne l'étude des fonctions numériques d'une variable réelle dans les domaines de l'algèbre et de l'analyse et le deuxième concerne l'étude des transformations géométriques dans le domaine de la géométrie.

Tableau 1 : La notion d'application dans les domaines de l'algèbre et de l'analyse

Notion	Thème d'étude	Première classe d'étude	Type de tâches où est recommandé de mettre la notion en fonctionnement
Application	Applications linéaires et affines	Première année secondaire	**T_1** : Lire et interpréter des représentations graphiques **T_2** : Utiliser le lien entre application linéaire et notion de proportionnalité
	Fonctions numériques d'une variable réelle. (Premières fonctions de référence. Foncions du type : $x \mapsto ax^2$, $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \frac{a}{x}$)	Deuxième année secondaire	**T_3** : Tracer, à partir de représentation graphique d'une fonction f, la courbe représentative d'une fonction du type : $x \mapsto \lvert f(x) \rvert$, $x \mapsto -f(x)$, $x \mapsto f(x)+a$ ou $x \mapsto f(x+a)$ **T_4** : Résoudre graphiquement des équations et des inéquations
	Fonctions numériques d'une variable réelle. (Autres fonctions de référence. Foncions du type : $x \mapsto ax^3+bx^2+cx+d$, $x \mapsto ax^4+bx^2+c$, $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$, $x \mapsto \frac{ax^2+bx+c}{a'x+b'}$, $x \mapsto \sin(ax+b)$, $x \mapsto \cos(ax+b)$, $x \mapsto tg(ax+b)$)	Troisième année secondaire (Section : Mathématiques)	**T_5** : Exploiter les représentations graphiques de fonctions pour : - conjecturer des résultats ; - contrôler des résultats ; - résoudre une équation ou une inéquation ou un système d'équations ou d'inéquations ; - mener la discussion d'équations et d'inéquations paramétriques ; - résoudre des problèmes d'optimisation.
	Fonctions numériques d'une variable réelle. (Fonctions logarithmes et fonctions exponentielles. Foncions de types variés obtenues à partir des fonctions étudiées dans les classes antérieures. Fonction définie par une intégrale)	Quatrième année secondaire (Section : Mathématiques)	**T_6** : Exploiter les représentations graphiques de fonctions dans la résolution de problèmes **T_7** : Etudier et représenter graphiquement des exemples de fonctions composées obtenues à partir des fonctions du programme **T_8** : Etudier sur des exemples, des fonctions définies par des intégrales de la forme $\int_a^{u(x)} f(t)dt$, où a est une constante et u une fonction dérivable.

Commentaire

Nous remarquons dans ce tableau que les types de tâches où les programmes officiels recommandent de faire fonctionner les fonctions numériques d'une variable réelle sont essentiellement centrés autour de l'usage et de l'exploitation des représentations graphiques des fonctions pour résoudre divers types de problèmes. Notons par ailleurs que les opérations algébriques (d'addition et de multiplication) sur les fonctions numériques ne sont étudiées qu'à partir de la classe de troisième année secondaire et ceci à propos de l'étude de la limite, de la continuité et de la dérivabilité des fonctions numériques d'une variable réelle. Le texte des programmes officiels de troisième année secondaire ne spécifie pas ces opérations par un article particulier dans les contenus des thèmes à enseigner. Ce texte fait allusion à ces opérations seulement par les termes suivants :

- *Limite de la somme, du produit, du quotient de fonctions. (p. 36)*
- *Somme, produit, quotient de fonctions continues. (p. 37)*
- *Calcul de la fonction dérivée de la somme, du produit, du quotient de fonctions dérivables (p. 37)*

De même pour l'opération de composition des fonctions numériques d'une variable réelle. Cette notion n'est étudier en analyse qu'en classe terminale à propos de l'étude de la limite d'une fonction composée, de la continuité de la composée de deux fonctions continues et de la dérivabilité de la composée de deux fonctions dérivables.

Il nous semble que le travail sur les opérations entre applications, la mise en évidence des liens entre une fonctions f et les fonctions associées, de types $x \mapsto |f(x)|$, $x \mapsto -f(x)$, $x \mapsto f(x)+a$ ou $x \mapsto f(x+a)$, et l'étude des fonctions définies par des intégrales donnent l'occasion pour mettre en évidence le statut d'objet de la notion d'application. Ceci dépendra cependant de la manière avec laquelle seront introduites ces notions ainsi que des tâches qui seront données dans les exercices que les élèves auront à résoudre.

Tableau 2 : La notion d'application dans le domaine de la géométrie

Notion	Thème d'étude	Première classe d'étude	Type de tâches où est recommandé de mettre la notion en fonctionnement
Application	Translations et homothéties	Deuxième année secondaire	**T_1** : Construire la transformée d'une figure géométrique par une translation ou par une homothétie **T_2** : Mettre en œuvre les propriétés de ces transformations dans la résolution des problèmes d'alignement, de concours de construction et de recherche d'ensemble de points
	Rotations	Troisième année secondaire (Section : Mathématiques)	**T_3** : Reconnaitre une rotation à partir de sa définition ou de sa propriété caractéristique **T_4** : Déterminer et construire l'image d'une droite ou d'un cercle par une rotation **T_5** : Mettre en œuvre les propriétés de la rotation pour : - résoudre des problèmes d'alignement, de parallélisme, de concours et de constructions géométriques; - déterminer un ensemble de points en utilisant les transformées des configurations usuelles par une rotation
	Projections de l'espace (Projection orthogonale sur une droite. Projection orthogonale sur un plan)	Troisième année secondaire (Section : Mathématiques)	**T_6** : Représenter le projeté orthogonal d'un point ou d'une droite sur un plan **T_7** : Représenter le projeté orthogonal d'un point sur une droite **T_8** : Trouver l'ensemble des points ayant même projeté par l'une ou l'autre des deux projections
	Isométries planes et similitudes planes	Quatrième année secondaire (Section : Mathématiques)	**T_9** : Reconnaître une isométrie ou une similitude à partir de sa définition, de sa propriété caractéristique ou de la transformation complexe qui lui est associée et déterminer sa nature et ses éléments caractéristiques **T_{10}** : Déterminer et construire l'image d'une droite ou d'un cercle par chacune des applications précédentes **T_{11}** : Décomposer une isométrie en un produit de symétries orthogonales **T_{12}**: Déterminer la forme réduite d'une similitude **T_{13}** : Mettre en œuvre les propriétés de ces applications pour : - résoudre des problèmes d'alignement, de parallélisme ou de concours; - déterminer un ensemble de points et résoudre des problèmes de construction en utilisant les transformées des configurations usuelles

Commentaire

Ce tableau montre que dans le domaine de la géométrie, les principaux types de tâches recommandées par les programmes officiels et qui sont en lien avec les notions ensemblistes fonctionnelles sont :

- La composition et la décomposition d'applications
- La détermination de l'image d'une figure géométrique
- La recherche d'ensembles de points

C'est en classe de deuxième année secondaire que les élèves rencontrent pour la première fois l'opération de composition d'applications, et ceci à propos de l'étude des translations et des homothéties. Les élèves étudieront dans ce contexte la composition de deux translations et la composition de deux homothéties de même centre. En troisième année secondaire, les élèves étudieront la composée de deux rotations de même centre et la décomposition d'une rotation en produit de deux symétries orthogonales. Cette étude sera reprise et généralisée dans la classe de quatrième année secondaire avec l'étude de la composition des différents types d'isométries, la composition de similitudes directes et la décomposition d'une isométrie en produit de symétries orthogonales.

Notons que ce n'est qu'en classe terminale que les textes des programmes officiels considèrent les opérations de composition et de décomposition de transformations géométriques comme objectif d'étude, ceci bien que ces opérations figurent dans les thèmes d'études de classes antérieures.

Par ailleurs, la recherche d'ensembles de points constitue un objectif essentiel pour l'enseignement de la géométrie au lycée. Elle intervient dans plusieurs types de tâches : problèmes d'alignement, de concours, de construction, de détermination de lieux géométriques… Ces problèmes utilisent souvent les transformées des configurations usuelles par des transformations géométriques. Ceci demande, nous semble-t-il, une bonne connaissance de la notion d'image d'un ensemble par une application.

2) Notions de bijection et de bijection réciproque

Les textes des programmes officiels ne font allusion à ces notions que dans la classe de quatrième année secondaire, et ceci dans les termes suivants :

> *« Fonction continue et strictement monotone sur un intervalle : existence de la fonction réciproque, continuité de cette fonction. » (p. 58)*
>
> *« Dérivée de la fonction réciproque d'une fonction dérivable et strictement monotone sur un intervalle » (p. 59)*

La propriété de bijectivité pour les transformations géométriques n'est pas indiquée dans les textes des programmes officiels et aucun thème n'est spécifié pour l'étude de la notion générale de bijection. Le vocabulaire même de « bijection » n'est nulle part mentionné dans les textes officiels.

Nous résumons dans le tableau ci-dessous les types de tâches où il est recommandé de mettre en œuvre les notions de fonction continue et strictement monotone et de fonction réciproque.

Tableau 3 : Notion de fonction continue et strictement monotone

Notion	Thème d'étude	Première classe d'étude	Type de tâches où est recommandé de mettre la notion en fonctionnement
Bijection	Fonction continue et strictement monotone sur un intervalle	Quatrième année secondaire (Section : Mathématiques)	$\mathbf{T_1}$: Décider si une fonction (ou sa restriction sur un intervalle) admet une fonction réciproque $\mathbf{T_2}$: Déterminer l'image d'un intervalle I par une fonction continue et strictement monotone sur I $\mathbf{T_3}$: Décider si une équation de la forme f(x) = a admet une racine (éventuellement unique) dans un intervalle donné $\mathbf{T_4}$: Dérivée de la fonction réciproque d'une fonction dérivable et strictement monotone

Nous remarquons ici que les tâches indiquées ne permettent pas nécessairement la mise en évidence du concept général de bijection, dès lors que la réalisation de ces tâches requiert des techniques n'utilisant pas les caractéristiques ensemblistes de la bijection.

Conclusion

Les notions ensemblistes d'application et de bijection sont fort présentes à travers les thèmes d'étude des programmes de l'enseignement secondaire tunisien. Toutefois, les aspects ensemblistes et théoriques de ces notions ne constituent pas un objectif d'étude pour le lycée et nous n'observons dans les textes des programmes officiels aucune structuration du savoir concernant l'enseignement de ces notions. Celles-ci seront introduites à propos de l'étude de certains thèmes d'algèbre, d'analyse ou de géométrie et c'est surtout leur mise en fonctionnement dans des types de tâches et des situations précises qui est visé par les programmes officiels. Les textes des programmes officiels ne prévoient aucun thème spécifique pour l'étude des notions ensemblistes fonctionnelles. Ceci pourrait être considéré comme un vide institutionnel qui laisse aux enseignants une grande marge pour gérer dans les classes la manière d'introduire et de travailler ces notions. Nous étudions dans le paragraphe qui suit les différentes façons avec lesquelles les auteurs des manuels officiels ont géré ce vide institutionnel.

IV. 2. Le savoir construit dans les manuels officiels

Nous remarquons tout d'abord que les manuels officiels de mathématiques de l'enseignement secondaire sont rédigés par quatre équipes différentes d'auteurs. Cette variété dans les équipes pourrait entraîner des différences dans les manières de concevoir et de présenter certains contenus d'enseignement ou dans les façons de désigner certaines notions.

Ceci étant, l'analyse des manuels que nous envisageons de réaliser se fera en deux étapes. Dans la première étape nous nous intéressons aux stratégies adoptées dans les différents manuels pour introduire les notions d'application, de bijection et les propriétés ensemblistes qui leur sont rattachées. Ceci nous permettra de préciser les niveaux d'organisation et de structuration des savoirs liés aux notions ensemblistes fonctionnelles. Dans la deuxième étape nous nous intéressons à l'étude et à l'analyse des praxéologies mathématiques mises en œuvre pour travailler ces notions. Dans ce travail, nous étudions les possibilités de complétude entre les différents niveaux des organisations praxéologiques, l'importance accordée aux blocs pratico-technique et technologico-théorique dans l'usage des notions ensemblistes fonctionnelles et la manière avec laquelle sont répartis ces deux blocs entre les topos des élèves et des enseignants. Nous concluons en précisant le niveau de mise en fonctionnement institutionnel des notions fonctionnelles dans l'institution ES.

IV. 2. 1. Notions d'application et de fonction

La notion d'application est introduite pour la première fois en première année secondaire à propos de l'étude des applications linéaires et des applications affines. Nous rencontrons dans le manuel officiel[25] de première année secondaire la définition générale suivante (page 68) :

> Soient E et F deux ensembles et f une relation de E vers F.
> Lorsque tout élément x de E est en relation avec un seul élément y de F, on dit que f est **une application de E vers F** : On note $f : E \to F$
> $x \mapsto y = f(x)$
> E est **l'ensemble de départ** de f, F est **l'ensemble d'arrivée** de f,
> y est **l'image** de x par f et x est **l'antécédent**[26] de y par f.

Cette définition donne les représentations sémiotiques et la terminologie spécifique qui vont servir pour l'étude des applications linéaires et des applications affines dans cette classe. Conformément aux recommandations des programmes officiels, aucun développement théorique relatif à la notion d'application, autre que la définition sus-citée, n'est donné dans le manuel.

La distinction entre les notions d'application et de fonction intervient en deuxième année secondaire lors de l'étude des fonctions numériques de référence. Le manuel de mathématiques de deuxième année secondaire[27] commence l'étude de ces fonctions par une leçon de « Généralités », où sont définis formellement les concepts généraux de fonction numérique d'une variable réelle, d'ensemble de définition, de représentation graphique et de sens de variation d'une fonction numérique.

Une fonction numérique d'une variable réelle est définie comme suit (page 84) :

> On appelle fonction numérique à variable réelle toute application d'une partie D de **R** dans **R** ; D est appelée le domaine de définition de la fonction.
> Une telle fonction est désignée par :
> $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$
> $x \mapsto f(x)$, et son domaine de définition par D_f.

[25] Allani Mohsen et al. (?) : Mathématiques. 1ère année de l'enseignement secondaire. CNP. Code 222 103.
[26] Les auteurs supposent ici implicitement l'unicité de l'antécédent (en désignant x par "l'antécédent"). Ceci pourrait s'expliquer par le fait que les applications que les élèves auront à manipuler dans cette classe sont toutes bijectives, excepté le cas particulier des applications affines constantes.
[27] Mongi Zouari et al. (?) : Mathématiques. 2ère année Secondaire. CNP. Code 222 501.

La distinction que fait cette définition entre les notions d'application et de fonction numérique, se situe au niveau de l'ensemble de définition qui, pour une fonction numérique d'une variable réelle, ne coïncide pas nécessairement avec son ensemble de départ (toujours égal à **R**). Ainsi, on parle par exemple de la fonction :

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \frac{\sqrt{x+1}}{x} ; \qquad \text{qui n'est pas une application.}$$

Les définitions que nous venons de citer ne sont pas reprises dans les livres officiels des classes supérieures. Elles constituent ainsi les seules références, du côté des manuels officiels des quatre années de lycée, qui définissent de façon formelle les objets « application » et « fonction numérique d'une variable réelle ».

Outre le registre symbolique formel présent dans les définitions sus-citées, les notions d'application et de fonction sont représentées dans les manuels de l'enseignement secondaire sous d'autres formes sémiotiques. Nous résumons dans le tableau ci-dessous les différentes représentations sémiotiques utilisées pour désigner les notions d'application et de fonction et nous précisons, pour chacune de ces représentations, ses principales fonctions.

Tableau 4 : Représentations sémiotiques de fonctions et d'applications

Représentation sémiotique	Domaine de fonctionnement
1) Représentation ensembliste : • f de E vers F définie par : f(x) =…, • f : E $\rightarrow$ F x $\mapsto$ f(x) • f du plan P dans P, qui à tout point *M(x,y)* associe le point *M'(x',y')* tel que $\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases}$	• Préciser les ensembles de départ et d'arrivée de f. Par exemple : soit la fonction f_m de **R** vers **R** définie par : $f_m(x) = \dfrac{(x+m)(3x+10m)}{(x+2m)^2}$ • Préciser le domaine de définition de f . Par exemples : f : $[-4,2]$ $\rightarrow$ **R**, x$\mapsto$ $E\left(\dfrac{x}{2}\right)$ (E désigne la partie entière de x) w : **N***\\{1,2} $\rightarrow$ **R**, $n \mapsto$ $w_n = \sqrt{n-3}$ F : $]0,+\infty[$ $\rightarrow$ **R**, $x \mapsto \int_1^x \dfrac{e^t}{t}dt$
2) Expression algébrique : soit la fonction f : x $\mapsto$ f(x), ou soit la fonction (ou soit la fonction numérique) définie par f(x) =…	• Effectuer des calculs sur f(x) • Effectuer des opérations entre fonctions • Etudier les propriétés analytiques et topologiques de f • Résoudre des équations et des inéquations liées à f.
3) Tableau de valeurs numériques (x,y) : partie du graphe de la fonction f donnant quelques couples	• Déterminer l'expression de f(x) pour des classes de fonctions particulières (linéaire, affine, polynomiale du second degré) • Tracer la représentation graphique de f • Etudier le comportement de f(x) pour des valeurs de x proches d'une valeur x_0 donnée ou pour de grandes valeurs de x, en vue d'approcher la limite de f(x), quand x tend vers x_0 ou à l'infini.
4) Représentation graphique	• Visualiser l'image de f et les dépendances entre éléments des ensembles de départ et d'arrivée • Lire des propriétés graphiques de la courbe de f • Résoudre graphiquement des équations et des inéquations liées à f
5) Représentation rhétorique. Comme par exemple : • Application du plan dans lui-même qui à tout point *M* quelconque du plan associe le point *M'* tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$, où $\vec{u}$ est un vecteur donné. (Pour désigner une translation de vecteur $\vec{u}$) • Application du plan dans lui-même telle que pour tous point *A*, *B* d'images respectives *A'*, *B'*, on ait : *A'B'=k.AB*, où *k* est un réel strictement positif donné. (Pour désigner une similitude de rapport *k*)	Définir les transformations géométriques de façon géométrique
6) Représentation symbolique spécifique : $t_{\vec{u}}$: translation de vecteur $\vec{u}$ S_O : symétrie centrale de centre O S_D : symétrie orthogonale d'axe D $h_{(O,k)}$: homothétie de centre *O* et de rapport *k* $R_{(O,\alpha)}$: rotation de centre *O* et d'angle α $S(A,k,\theta)$: similitude directe de centre *A*, de rapport *k* et d'angle θ Projection p sur une droite D (resp. un plan) parallèlement à un plan P (resp. une droite D)	• Désigner une transformation géométrique et préciser ses éléments caractéristiques • Simplifier le calcul de composition et de décomposition entre transformations géométriques
7) Représentation entre ensembles en patates	Interpréter une situation de dénombrement par une application entre ensembles finis

Commentaire

L'importance accordée par les manuels aux différentes représentations sémiotiques d'application et de fonction varie selon les manuels, les domaines mathématiques et les fonctions qu'occupe chacune des représentations.

Dans les domaines de l'algèbre et de l'analyse, lorsqu'il s'agit de désigner une fonction dont l'expression algébrique est connue, les manuels de première et de deuxième année secondaire utilisent souvent la représentation ensembliste, conformément aux définitions générales données dans ces manuels. En revanche, les auteurs des manuels de troisième et de quatrième années secondaires font usage, dans la quasi-totalité des cas, de l'expression algébrique pour désigner une fonction. C'est que dans ces classes, le travail dans les principaux thèmes d'analyse (limites, continuité, dérivabilité, étude de fonctions) se centre autour des expressions algébriques des fonctions numériques étudiées, les ensembles de départ et d'arrivée de ces fonctions étant implicitement supposés être égaux à **R**.

Pour le registre numérique, sa fonction se réduit à fournir des éléments (x, f(x)) pour permettre la construction de représentations graphiques de fonctions, pour déterminer l'expression de f(x) pour des classes de fonctions particulières (linéaire, affine, polynomiale du second degré), ou pour conjecturer le comportement de f(x) sur les bornes de son domaine de définition. Dans ces cas, le tableau de valeurs numériques est considéré seulement comme une aide à la réalisation de la tâche demandée. En ce sens que la réalisation d'une telle tâche fait appel à d'autres données concernant la fonction (le type de fonction, son tableau de variation, ses branches infinies, ses points remarquables…). Dans ces conditions, nous pouvons considérer que le registre numérique ne permet qu'une représentation partielle des fonctions et qu'une suite finie de couples (x, f(x)) ne peut donner accès à la généralité ni permettre une définition complète de la fonction représentée.

Concernant le registre graphique, nous distinguons dans sa fonctionnalité trois niveaux de traitement : ponctuel local et global (Maschietto, 2002). L'usage des représentations graphiques aux niveaux ponctuel et local intéresse le fonctionnement mobilisé pour obtenir des résultats numériques de façon standard et algorithmique : obtenir graphiquement des y pour des x donnés et vice versa, obtenir le signe de $f'(x_0)$ en un point x_0 donné, observer les variations des termes d'une suite, étudier la continuité et la dérivabilité de f en un point x_0, déterminer les extremums de f…). Pour Chauvat (1999), dans ce mode de traitement (qu'il qualifie de *nomographique*) *« le sujet doit engager un rapport effectif avec le dessin précis qu'il a sous les yeux, sans se soucier de ce qu'il représente »*. Autrement dit, l'aspect ensembliste fonctionnel de la courbe disparaît aux yeux du sujet dans ce mode de traitement, ou du moins reste non opérationnel et la représentation graphique fonctionne avec son statut d'outil. Au niveau global, la représentation graphique est utilisée avec son statut d'objet et l'aspect ensembliste d'une fonction (unicité de l'image, domaine de définition, image de ce domaine par la fonction, loi de dépendance entre x et y) est illustré. De plus, les courbes de fonctions deviennent des supports de propriétés et d'informations ne pouvant apparaître dans le registre numérique ou algébrique (continuité, dérivabilité, nombre de solutions d'une équation, régionnement du plan…) et pourraient être mobilisées pour désigner des fonctions génériques ou des classes de fonctions particulières (polynomiales, homographiques, sinusoïdales…). Les courbes de fonctions sont aussi utilisées pour obtenir d'autre courbes (par restriction ou en appliquant des transformations géométriques), ou pour économiser des développements théoriques qui ne figurent pas aux programmes du Secondaire. Pour ce dernier point, il s'agit précisément de l'illustration, dans le manuel de troisième année, des définitions formelles de limites (finie ou infinie, en un point ou à l'infini), et pour le manuel de quatrième année, de l'illustration graphique du théorème concernant l'image d'un intervalle par une fonction continue, du théorème des valeurs intermédiaires et de l'approche de la notion d'intégrale d'une fonction. Nous voyons ainsi que les fonctions remplies par le registre graphique au niveau global lui attribuent un rôle opératoire important et permettent de mettre en évidence de nouveaux aspects des propriétés ensemblistes et fonctionnelles, ce qui pourrait donner une meilleure conceptualisation de la notion de fonction. Toutefois, ceci reste étroitement lié aux droits d'usage des représentations graphiques dans la réalisation des tâches et la validation des résultats obtenus, ainsi qu'à la répartition de ces droits entre les topos des élèves et des enseignants. Dans ce contexte, Chauvat (1997) a montré dans sa thèse qu'il existe un certain clivage entre le rapport institutionnel aux représentations graphiques de fonctions en position d'élève et celui en position d'enseignant. C'est que l'enseignant, bien qu'il soit contraint d'enseigner l'insuffisance des graphiques et leurs caractères contingents, pourrait se trouver dans la situation de recourir à ces graphiques pour expliquer ou justifier des propriétés mathématiques.

Ceci étant, dans le domaine de la géométrie, les transformations géométriques, dont l'étude commence en classe de deuxième année secondaire, sont le plus souvent désignées par leurs notations spécifiques (cf. tableau 4, ci-dessus). La représentation ensembliste dans ce domaine n'est utilisée que six fois : deux fois en troisième année secondaire, dans les énoncés donnant les définitions générales des projections de l'espace (projection sur une droite parallèlement à un plan et projection sur un plan parallèlement à une droite), et les quatre autres sont données dans le manuel de quatrième année secondaire dans des exercices où interviennent des applications du plan dans le plan définies par leurs expressions analytiques. La représentation rhétorique, quant à elle, est utilisée seulement au moment de la donnée de la définition de chacune des transformations géométriques étudiées. Une fois ces définitions établies, ce sont les désignations spécifiques qui sont utilisées dans le reste du cours et dans les exercices. Et ceci, soit en désignant une transformation à l'aide de son symbole spécifique (comme par exemple $h_{(O,k)}$) soit encore par la phrase correspondante (comme : homothétie de centre O et de rapport k). Ceci pourrait s'expliquer d'une part par le fait qu'au lycée, les transformations géométriques sont étudiées sous leur aspect géométrique, et dans ce cas, l'image f(M) d'un point M ne peut s'exprimer par une relation comme dans le cas des expressions algébriques des fonctions numériques. La détermination de cette image dépend plutôt des éléments caractéristiques de la transformation utilisée, lesquels sont donnés dans l'écriture symbolique de la transformation considérée. D'autre part, les écritures symboliques des transformations géométriques donnent un moyen très efficace pour énoncer et travailler les propriétés de composition et de décomposition de ces transformations.

Finalement, la représentation d'une application entre deux ensembles en patates, nous ne la rencontrons que dans deux activités dans le manuel de troisième année secondaire. Chacune de ces activités vise à interpréter une situation de dénombrement par la construction d'une application entre deux ensembles finis. Ceci dans l'objectif de donner les possibilités d'usage en dénombrement du théorème exprimant le nombre d'applications entre deux ensembles finis.

En conclusion, il semble qu'au lycée, ce qui est le plus visé dans la représentation des applications sont la fonctionnalité et l'efficacité des ostensifs vis-à-vis des thèmes étudiés. Ainsi, dans les deux dernières années de lycée, le travail est focalisé soit sur l'étude analytique et topologique des fonctions numériques, et dans ce cas c'est l'expression algébrique et/ou la représentation graphique qui est la plus utilisée dans les manuels, soit sur l'étude des transformations géométriques et dans ce cas ce sont les représentations symboliques spécifiques de ces transformations qui sont utilisées. De ce fait, les représentations et les caractéristiques ensemblistes générales des applications, introduites dans les deux premières années de lycée, voient leur importance et leur rôle diminués dans les manuels officiels avec l'avancement des années d'enseignement au lycée.

IV. 2. 2. Opérations sur les applications

Nous distinguons à ce propos deux types d'opérations : l'opération de composition, utilisée en géométrie et en analyse, et les opérations algébriques d'addition, de multiplication et de division, utilisées en analyse.

Pour l'opération de composition d'applications, nous ne rencontrons dans les manuels des quatre années de lycée aucune définition générale de cette notion ni l'énoncé de propriété précisant le caractère non commutatif de cette opération.

La première rencontre avec cette notion dans les manuels officiels se fait dans le manuel de deuxième année secondaire à propos de l'étude de la translation du plan. Nous rapportons ci-dessous le paragraphe correspondant à l'introduction de cette notion (p. 146) :

Composée de deux translations

On considère deux translations $t_{\vec{u}}$ et $t_{\vec{u}'}$. On se propose de déterminer l'application $t_{\vec{u}'} o t_{\vec{u}}$.

Soit *M* un point du plan. Comment obtenir le point *M'*, image de *M* par $t_{\vec{u}'} o t_{\vec{u}}$?

Montrer que : $\overrightarrow{MM'} = \vec{u} + \vec{u}'$. En déduire l'application $t_{\vec{u}'} o t_{\vec{u}}$

Théorème

La composée de deux translations de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ est la translation de vecteur $\vec{u} + \vec{u}'$

$$t_{\vec{u}'} o t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}' + \vec{u}}$$

- Que peut-on dire de $t_{\vec{u}'} o t_{\vec{u}}$ et $t_{\vec{u}} o t_{\vec{u}'}$?
- Quelle est l'application $t_{-\vec{u}} o t_{\vec{u}}$?

Cette manière de présenter la propriété de composition de translations laisse à la charge de l'enseignant l'introduction de la notion de composée de deux applications, qui peut se faire soit dans le cadre général d'applications, soit dans le cadre particulier des translations. Remarquons par ailleurs que dans l'énoncé du théorème, les auteurs anticipent sur la commutativité de la composition des translations en écrivant $t_{\vec{u}'} o t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}' + \vec{u}}$ au lieu de $t_{\vec{u}'} o t_{\vec{u}} = t_{\vec{u} + \vec{u}'}$. Nous rencontrons dans le même manuel un paragraphe similaire dans le cas de la composée de deux homothéties de même centre.

Dans le manuel de troisième année secondaire, la composition des applications intervient aussi seulement en géométrie à propos de l'étude des rotations et des projections de l'espace. Dans le chapitre sur les rotations, trois propriétés liées à la composition d'applications sont étudiées : composée de deux rotations de même centre, composée de deux symétries orthogonales d'axes sécants et décomposition d'une rotation en un produit de deux symétries orthogonales. Dans le chapitre sur les projections de l'espace, la composée de deux projections intervient dans un seul exercice, il n'y a pas de propriétés concernant la composée de projections qui sont données dans le cours.

C'est en classe terminale que la composition d'applications est la plus travaillée. Elle intervient aussi bien en géométrie qu'en analyse. Dans le domaine de la géométrie, sont étudiées la composée d'isométries du plan, la composée de similitudes (directes et indirectes) ainsi que la décomposition de ces différents types d'applications. Le tableau suivant donne les principaux résultats établis dans ce contexte :

Tableau 5 : Tables des opérations de composition et de décomposition des transformations géométriques

Composée	Nature de la transformation
Composée d'un nombre pair de symétries orthogonales	déplacement
Composée d'un nombre impair de symétries orthogonales	antidéplacement
Composée d'une homothétie et d'un déplacement	Similitude directe
Composée d'une homothétie et d'un déplacement	Similitude indirecte
Composée de deux symétries orthogonales $S_\Delta o S_{\Delta'}$ d'axes parallèles	Translation $t_{2\vec{v}}$, où $\vec{v}$ est orthogonal à Δ et tel que $\Delta = t_{\vec{v}}(\Delta')$
Composée de deux symétries orthogonales $S_{(OA)} o S_{(OB)}$ d'axes sécants	Rotation $R(O,\theta)$ où $\theta \equiv 2.(\overrightarrow{OA}\hat{,}\overrightarrow{OB}) \quad [2\pi]$
Composée $R(O,\theta)$ o $t_{\vec{u}}$	• Translation, si $\theta = 2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$) • Rotation d'angle θ si non
Composée $R(O,\theta)$ o $R(O,\theta')$	• Translation si $\theta + \theta' = 2k\pi$, ($k \in \mathbf{Z}$) • Rotation d'angle $\theta + \theta'$ si non
Composée de deux symétries centrales S_O o $S_{O'}$	Translation $t_{2\overrightarrow{O'O}}$
Composée de deux homothéties *h(O,k)*o*h(O',k')*	• Translation, si *k.k'=1* • Homothétie de rapport *k.k'*, si non
Composée $h(O,k)$ o $R(O,\theta)$	Similitude directe $S(O,k,\theta)$, de centre *O*, de rapport *k* et d'angle θ
Composée de deux similitudes directes : $S(O,k,\theta)$ o $S(O',k',\theta')$	Similitude directe de rapport *kk'* et d'angle $\theta + \theta'$
Composée $h(O,k)$ o S_Δ, où $k \neq 1$ et Δ passe par A	Similitude indirecte de centre A et de rapport *k*

Notons que les données de ce tableau fonctionnent dans les deux sens : première colonne vers la deuxième et inversement selon que l'on cherche à composer ou à décomposer la transformation en question.

L'usage essentiel qui est fait des opérations de composition et de décomposition dans le domaine de la géométrie est de fournir des techniques permettant de déterminer la nature des transformations géométriques étudiées et éventuellement de préciser leurs éléments caractéristiques, comme dans les exemples suivants :

- $S_{(OB)} o S_{(OA)} = R\left(O,\, 2(\overrightarrow{OA}\hat{,}\overrightarrow{OB})\right)$,
- $S(O,k,\theta) o S_{(OB)}\, o S_{(OA)} = h(O,k) o R(O,\theta) o R(O,\theta') = h(O,k) o R(O,\theta+\theta') = S(O,k,\theta+\theta')$,

où $\theta' \equiv 2.(\overrightarrow{OA}\hat{,}\overrightarrow{OB}) \quad [2\pi]$

- Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur d'une droite D, et $\varphi = t_{\vec{u}} o S_\Delta$, alors :

$t_{\vec{u}} o S_\Delta = S_\Delta o t_{\vec{u}}$ et $\varphi o \varphi = t_{\vec{u}} o S_\Delta o S_\Delta o t_{\vec{u}} = t_{2\vec{u}}$

Dans un tel travail, les techniques mises en œuvre se trouvent étroitement dépendantes des ostensifs utilisés dans la désignation des transformations géométriques considérées. L'aspect ensembliste de ces transformations ainsi que des opérations de composition et de décomposition qui en sont faites reste implicite et n'intervient pas dans la réalisation des dites techniques.

Dans le domaine de l'analyse, la composition des applications intervient dans trois situations :

- Calcul de la limite d'une fonction composée
- Composée de deux fonctions continues
- Composée de deux fonctions dérivables et dérivée de la fonction composée

Pour la première situation, il s'agit de la première rencontre avec la notion de fonction composée de deux fonctions numériques dans les manuels du lycée. Le paragraphe correspondant à cette situation commence par l'énoncé du théorème suivant[28] (p. 60) :

> **Théorème**
> Soit *f* et *g* deux fonctions
> Si $\lim\limits_{x_0} f = l$ et $\lim\limits_{l} g = l'$ alors $\lim\limits_{x_0} gof = l'$
> (x_0 , l et l' finis ou infinis)

Ce théorème est admis (conformément aux programmes officiels) et il est suivi de deux exercices résolus visant à en donner des exemples d'applications. Nous citons ci-dessous l'un de ces exercices (p. 61) :

> **Exercice**
> Etudier la limite en $-\infty$ de la fonction $h : x \mapsto \cos\left(\dfrac{x+1}{x^2+x+1}\right)$
> **Solution**
> On peut écrire $h = gof$ avec :
> $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{x^2+x+1}$ et $g : x \mapsto \cos x$
> On a : $\lim\limits_{-\infty} f = \lim\limits_{-\infty}\left(\dfrac{x}{x^2}\right) = \lim\limits_{-\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$
> et $\lim\limits_{0} g = \lim\limits_{0} \cos x = 1$
> d'où $\lim\limits_{-\infty} h = 1$

Dans les deux autres situations, nous trouvons des présentations analogues, avec un théorème (admis dans la deuxième situation et démontré dans la troisième) énonçant la propriété correspondante et un exemple d'application du théorème.

Le fonctionnement de la notion de composée de deux fonctions numériques se réduit dans les manuels du lycée à ces trois types de tâches. Notons que dans les autres exercices où intervient l'un des théorèmes indiqués ci-dessus, les auteurs déterminent parfois explicitement

[28] Ben Younes Ali & al. (1999) : Mathématiques. 4ème année de l'enseignement secondaire. Section Math. Tome 1.

les fonctions composant la fonction à étudier (comme c'est le cas dans l'exercice ci-dessus) et parfois d'autres utilisent le théorème implicitement, comme dans les exemples suivants :

• Pour $f(x) = x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}-3\right)$, $(x \geq 1)$, on a $\lim\limits_{+\infty} f = -\infty$. (ibid. p. 62)
• La fonction : $x \mapsto \sqrt[3]{2x-1}$ est continue comme composée de fonctions continues. (ibid. p. 96)
• La fonction $f : x \mapsto \sin x.Log(\cos x)$ est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ et pour tout x de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$: $f'(x) = \cos x.Log(\cos x) - \frac{\sin^2 x}{\cos x}$ (ibid. p.213)

Généralement, c'est cette façon implicite qui est la plus souvent utilisée dans les exercices.

Ceci étant, dans le domaine de l'analyse sont aussi étudiées les opérations algébriques d'addition, de multiplication et de division pour les fonctions numériques d'une variable réelle. Il n'existe pas dans les manuels officiels de mathématiques de thème spécifique consacré à l'étude de ces opérations. Celles-ci sont définies pour la première fois dans le manuel de troisième année secondaire dans le paragraphe intitulé : « Opérations sur les limites ». En fait, ce qui est défini dans ce paragraphe est le résultat de ces opérations, c'est-à-dire : la somme, le produit et le quotient de deux fonctions numériques. Nous lisons ainsi[29] (p. 49) :

Opérations sur les fonctions Soient f et g deux fonctions numériques d'une variable réelle. On désigne par D le domaine de définition de f et par D' celui de g. • La somme des deux fonctions f et g, notée f+g, est définie par : (f+g)(x)=f(x)+g(x). Le domaine de définition de f+g est $D \cap D'$. • Le produit des deux fonctions f et g, noté f.g, est défini par : (f.g)(x)=f(x).g(x). Le domaine de définition de f.g est $D \cap D'$. • Le quotient des deux fonctions f et g, noté $\frac{f}{g}$, est défini par : $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Le domaine de définition de $\frac{f}{g}$ est $D \cap D' - \{x \in R, g(x) = 0\}$

Nous ne rencontrons dans le manuel en question aucun exercice spécifique relatif à ces opérations (Comme par exemple la recherche du domaine de définition de f+g, de f.g ou de $\frac{f}{g}$, qui ne semble pas être toujours évident à déterminer).

Immédiatement après ces définitions, les auteurs établissent les tableaux donnant les limites de la somme, du produit et du quotient de deux fonctions. Ces notions interviennent ensuite lors de l'étude des opérations sur les fonctions continues et des opérations sur les fonctions dérivables. Dans le manuel de quatrième année secondaire, les mêmes résultats sont brièvement rappelés et les notions de somme, de produit et de quotient de deux fonctions sont

[29] Ben Younes Ali & al. (1999) : Mathématiques. 3ème année secondaire. Section Mathématiques. Tome 1.

reprises lors de l'étude des fonctions primitives et du calcul intégral. Au niveau du langage utilisé dans les manuels concernant ces opérations, nous remarquons que dans les premiers exemples visant l'application des théorèmes indiqués, les auteurs mettent en évidence de façon explicite les opérations intervenant dans la construction des fonctions données, comme le montre l'exemple suivant (ibid. p. 120) :

> Soit h la fonction : $x \mapsto \dfrac{2x^2 - x - 1}{2x + 5}$
>
> La fonction h est définie, continue et dérivable sur **R**-{ $-\dfrac{5}{2}$ }
>
> Posons : $f(x) = 2x^2 - x - 1$ et $g(x) = 2x + 5$
>
> Pour tout x de **R**-{ $-\dfrac{5}{2}$ }, on a : $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$
>
> Par suite, $h'(x) = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{(g(x))^2} = \dfrac{(4x-1)(2x+5) - 2(2x^2 - x - 1)}{(2x+5)^2}$
>
> D'où : $h'(x) = \dfrac{4x^2 + 20x - 3}{(2x+5)^2}$

Après ces exemples d'applications, les théorèmes sont appliqués de façon implicite, comme c'est le cas pour la fonction $f : x \mapsto \sin x.\mathrm{Log}(\cos x)$ donné ci-haut. Nous donnons ci-dessous un autre exemple rapporté dans le manuel de quatrième année secondaire[30] :

> **Extrait d'un exercice résolu** (p. 181)
>
> Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x}{2} - \dfrac{\sqrt{|x^2 - 1|}}{x}$
>
> La fonction f est définie et continue sur **R***
>
> Pour tout x de $]0,1[$, $f(x) = \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{x}\sqrt{1 - x^2}$
>
> Pour tout x de $[1,+\infty[$, $f(x) = \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{x}\sqrt{x^2 - 1}$
>
> La fonction f est dérivable sur $]0,1[$ et pour tout x de $]0,1[$, on a : $f'(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}} + \dfrac{\sqrt{1 - x^2}}{x^2}$
>
> La fonction f est dérivable sur $]1,+\infty[$ et pour tout x de $]1,+\infty[$, on a :
>
> $f'(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}} + \dfrac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^2}$

Dans les exercices sur l'étude des fonctions numériques, c'est de cette façon implicite que seront utilisés les théorèmes faisant intervenir les opérations sur les fonctions.

Conclusion

Les opérations sur les fonctions sont étudiées au lycée sous l'angle de la fonctionnalité visée par les programmes officiels. Leur aspect théorique apparaît occasionnellement dans les manuels au moment d'établir des propriétés concernant des thèmes faisant intervenir ces

---

[30] Ben Younes Ali. & al. (1999) : Mathématiques. 4ème année de l'enseignement secondaire. Section Math. Tome 1.

opérations. Dans ces cas là, la théorie se réduit à la donnée des définitions et de la terminologie correspondante. Les opérations dans l'ensemble des fonctions numériques, en tant que lois de composition internes dans cet ensemble et leurs propriétés (commutativité, associativité…) ne sont pas traitées dans les manuels et ne constituent pas un objectif d'étude pour l'enseignement secondaire. L'usage dominant fait des opérations sur les fonctions se réduit au niveau procédural, et l'aspect théorique est implicite et les techniques employées dans la réalisation des tâches sont stéréotypées.

IV. 2. 3. Notions de bijection et de bijection réciproque

Dans IV. I, nous avons remarqué que les notions de bijection et de bijection réciproque ne sont indiquées dans les textes des programmes officiels qu'à propos de l'étude, dans la classe de quatrième année secondaire, des fonctions numériques continues et strictement monotones. Il n'est pas précisé dans ces textes les possibilités d'usage de ces notions dans le domaine de la géométrie. Or, il s'avère que ces notions sont nécessaires pour l'étude des transformations géométriques et de certaines de leurs propriétés. C'est pour cette raison que les manuels officiels commencent à les utiliser dès les premiers chapitres de géométrie, lors de l'étude des translations et des homothéties en deuxième année secondaire. L'usage de ces notions se poursuit dans le domaine de la géométrie jusqu'à la classe terminale avec l'étude des isométries et des similitudes du plan. En revanche, l'étude des bijections et des bijections réciproques en Analyse se limite à la classe terminale et se fait seulement dans le contexte des fonctions continues et strictement monotones. Cette façon de procéder a entraîné le développement de deux discours technologiques différents à propos des dites notions. Nous rapportons dans ce qui suit les deux formes de discours selon l'usage qui est fait de ces notions dans chacun des deux domaines où elles sont utilisées.

a) Bijection et bijection réciproque dans le domaine de la géométrie

C'est à propos de l'étude des translations, dans le manuel de deuxième année secondaire, que nous rencontrons pour la première fois les notions de bijection et de bijection réciproque. Il s'agit précisément de la propriété suivante (p. 143)

Propriété :
La translation de vecteur $\vec{u}$ est une bijection du plan sur lui-même.
Son application réciproque est la translation de vecteur $-\vec{u}$.

Démonstration :
Soit M un point quelconque du plan, montrons que M a un seul antécédent par $t_{\vec{u}}$. C'est-à-dire qu'il existe un point unique N tel que $t_{\vec{u}}(N)=M$.

$t_{\vec{u}}(N)=M$ équivaut à $\overrightarrow{NM}=\vec{u}$, ou encore $\overrightarrow{MN}=-\vec{u}$, et par suite N est l'image de M par la translation de vecteur $-\vec{u}$.
Ainsi tout point du plan a un antécédent unique par la translation $t_{\vec{u}}$. Donc la translation de vecteur $\vec{u}$ est une bijection du plan sur lui-même, son application réciproque est la translation de vecteur $-\vec{u}$.

L'énoncé de cette propriété et sa démonstration supposent que les définitions de bijection et de son application réciproque sont laissées à la charge de l'enseignant. Une propriété analogue avec sa démonstration sont aussi données dans le chapitre sur l'homothétie. Dans les deux cas, le seul usage qui est fait de ces propriétés se limite à leur utilisation dans les démonstrations relatives à la détermination des images d'une droite, d'un segment et d'un cercle par chacune des deux transformations. Aucun des exercices donnés dans le manuel ne fait intervenir explicitement la propriété de bijectivité pour les translations et les homothéties.

Dans le manuel de troisième année secondaire (Section mathématiques. Tome II), la notion de bijection apparaît deux fois : une première fois dans le chapitre sur les rotations du plan, où est étudiée la propriété de bijectivité d'une rotation, et une deuxième fois dans le chapitre sur les projections de l'espace, où il est remarqué qu'une projection n'est pas bijective. Dans les deux chapitres, aucun usage n'a été fait des propriétés indiquées dans les exercices.

Notons que pour les translations, les homothéties et les rotations, les propriétés correspondantes indiquant que la composée de l'une de ces transformations avec sa réciproque est égale à l'identité du plan sont établies à partir des propriétés de composition relatives aux transformations indiquées et non en utilisant la propriété de la composée d'une bijection avec sa bijection réciproque. Ainsi il est établi que :

$$t_{\vec{u}} o t_{-\vec{u}} = t_{\vec{0}} = id_P \text{ , } h_{(O,k)} o h_{(O,\frac{1}{k})} = h_{(O,1)} = id_P \text{ et } R_{(A,\theta)} o R_{(A,-\theta)} = R_{(A,0)} = id_P$$

Dans le manuel de quatrième année secondaire (Section Mathématiques. Tome II), les notions de bijection et de bijection réciproque interviennent dans trois chapitres de géométrie :

- Les isométries du plan,
- Déplacements et Antidéplacements,
- Les similitudes.

L'usage de ces notions est fréquent dans ces chapitres, aussi bien dans le développement des cours que dans les exercices. Trois propriétés relatives à ces notions sont utilisées :

- La définition d'une bijection : *f* de *E* vers *E* est bijective si, et seulement si, tout élément de *E* admet un antécédent unique par *f*.
- Si *f* de *E* vers *E* est bijective alors fof^{-1} et $f^{-1}of$ sont égales à l'identité de *E*.
- Si *f* est une application bijective de *E* sur *E*, et *x*, *y* sont deux éléments de *E*, alors :

$$y=f(x) \text{ équivaut à } x = f^{-1}(y)$$

- La composée de deux bijection est une bijection

Remarquons que dans toutes les bijections considérées, les ensembles de départ et d'arrivée sont toujours les mêmes. Ils sont précisément égaux au plan P.

Les auteurs du manuel ne donnent à aucun moment des énoncés précisant les propriétés indiquées ci-dessus. Celles-ci sont directement utilisées, explicitement ou implicitement selon les cas, chaque fois que la situation l'exige. Par ailleurs, pour le besoin de certaines démonstrations, les auteurs font aussi appel à la notion « d'application injective », qui ne fait plus partie des programmes officiels depuis la contre-réforme (qui a suivi la période des mathématiques modernes). Cette notion est alors introduite dans le manuel[31] dans le contexte particulier des isométries du plan comme suit (p. 69) :

Les images par une isométrie φ de deux points distincts sont distincts : si $A \neq B$ alors $\varphi(A) \neq \varphi(B)$ (on dit qu'une isométrie est injective)

Nous donnons ci-dessous deux exemples, rapportés dans le manuel de quatrième année secondaire (Section Mathématiques. Tome II), où sont utilisées les notions et propriétés indiquées ci-dessus :

[31] Ben Younes Ali. & al. (1999) : Mathématiques. 4ème année de l'enseignement secondaire. Section Math. Tome 2.

Exemple 1 (p. 72) **:**

> **Théorème**
> 1. Une isométrie du plan est une bijection du plan sur lui-même.
> 2. L'application réciproque d'une isométrie est une isométrie.
>
> **Démonstration**
> 1. Soit φ une isométrie du plan, O, A et B trois points non alignés et O', A' et B' leurs images respectives par φ.
>
> Les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ étant non colinéaires, pour tout point C du plan il existe un couple unique de réels (a,b) tel que : $\overrightarrow{OC} = a.\overrightarrow{OA} + b.\overrightarrow{OB}$.
>
> On déduit du corollaire précédent[32] que $\overrightarrow{O'C'} = a.\overrightarrow{O'A'} + b.\overrightarrow{O'B'}$, avec $C' = \varphi(C)$.
>
> Par ailleurs, pour tout point Y du plan il existe un couple unique de réels (x,y) tel que : $\overrightarrow{O'Y'} = x.\overrightarrow{O'A'} + y.\overrightarrow{O'B'}$ (car les points O', A', B' ne sont pas alignés[33])
>
> Le point Y' est nécessairement l'image par φ du point X tel que : $\overrightarrow{OX} = x.\overrightarrow{OA} + y.\overrightarrow{OB}$.
>
> Le point X est unique car une isométrie est injective, cela implique que φ est bijective.
>
> 2. Soit M et N deux points du plan d'images respectives par φ, M' et N'.
>
> Notons φ^{-1} l'application réciproque de φ. On a :
>
> $M' = \varphi(M)$ et $N' = \varphi(N)$ équivaut à : $M = \varphi^{-1}(M')$ et $N = \varphi^{-1}(N')$.
>
> On a donc MN=M'N', ce qui implique que φ^{-1} est une isométrie.

Commentaire

Dans la démonstration du théorème, le problème de bijectivité de φ n'est pas mis en relief par les auteurs, de même pour l'usage de la propriété d'injectivité de φ. A notre avis, comprendre cette démonstration demande une bonne familiarisation avec ces deux notions, ce qui ne semble pas être le cas avec les élèves de Terminale qui sont concernés. Par ailleurs nous notons la présence dans la démonstration d'éléments précurseurs au domaine de l'algèbre linéaire. En effet, le corollaire utilisé dans la démonstration exprime implicitement la linéarité de l'application linéaire $\tilde{\varphi}$ associée à l'application affine φ et nous lisons à travers la démonstration donnée le lien entre la bijectivité de φ et celle de $\tilde{\varphi}$. De telles propriétés, que nous rencontrons dans plusieurs occasions dans les chapitres relatifs à l'étude des transformations géométriques en classe Terminale pourraient constituer des occasions pour établir des ponts entre les institutions ES et CPS1 au niveau de l'enseignement de l'algèbre linéaire au supérieur.

---

[32] **Corollaire**
Soit φ une isométrie du plan. Soit A, B, C, D, E, F six points du plan et A', B', C', D', E', F' leurs images respectives par φ. Soit a, b deux nombres réels.

Si $\overrightarrow{EF} = a.\overrightarrow{AB} + b.\overrightarrow{CD}$ alors $\overrightarrow{E'F'} = a.\overrightarrow{A'B'} + b.\overrightarrow{C'D'}$

[33] Il est démontré avant que les images de trois points non alignés par une isométrie sont trois points non alignés.

Exemple 2 (p. 76) **:**

> **Propriété**
> Deux isométries du plan qui coïncident sur trois points non alignés coïncident partout.
>
> **Démonstration**
> Soit φ et ψ deux isométries qui coïncident sur trois points non alignés *A*, *B* et *C*. Il suit :
> $\varphi^{-1} o \psi(A) = A$, $\varphi^{-1} o \psi(A) = A$ et $\varphi^{-1} o \psi(C) = C$.
> Par conséquent $\varphi^{-1} o \psi = id$ [34]. Cela implique que $\varphi = \psi$

Commentaire

Cette démonstration utilise implicitement la propriété : $\varphi^{-1} o \varphi = \varphi o \varphi^{-1} = id$, pour la bijection φ. De plus, elle suppose évident le passage d'un langage rhétorique au langage ensembliste correspondant. En effet :

Dire que φ et ψ coïncident sur trois points alignés *A*, *B* et *C* signifie que l'on ait :

$\psi(A) = \varphi(A)$, $\psi(B) = \varphi(B)$ et $\psi(C) = \varphi(C)$ (ce qui est implicite dans la démonstration).

En composant dans chaque égalité par φ^{-1} à gauche, et sachant que $\varphi^{-1} o \varphi = id$ (ceci est aussi implicite dans la démonstration), il vient :

$\varphi^{-1} o \psi(A) = \varphi^{-1} o \varphi(A) = A$, $\varphi^{-1} o \psi(B) = \varphi^{-1} o \varphi(B) = B$ et $\varphi^{-1} o \psi(C) = \varphi^{-1} o \varphi(C) = C$.

Ceci montre que $\varphi^{-1} o \psi = id$.

En composant finalement cette dernière égalité par φ à gauche (un autre implicite), on obtient : $\psi = \varphi$.

A notre avis, les connaissances implicites utilisées dans la démonstration ne semblent pas être évidentes pour des élèves qui ne sont pas familiarisés à l'usage de telles connaissances. Pourtant, cette façon de procéder est fréquente dans les démonstrations et les exercices donnés dans le manuel.

Ceci étant, nous remarquons que dans le domaine de la géométrie, les tâches relatives à l'étude de la bijectivité d'une application et à la détermination de la bijection réciproque n'interviennent pas dans les exercices, elles sont traitées seulement dans les cours à propos de l'étude des transformations géométriques. Nous résumons dans le tableau suivant les techniques utilisées dans la réalisation de ces deux tâches.

---

[34] Les auteurs utilisent ici le théorème selon lequel une isométrie du plan qui fixe trois points non alignés est égale à l'identité.

Tableau 6 : Techniques d'étude de la bijectivité et de détermination de la bijection réciproque en géométrie

Application	Bijectivité	Bijection réciproque
- Translation - Homothétie - Rotation	On utilise la définition d'une bijection. On montre, via la définition géométrique de la transformation considérée, que tout point du plan admet un antécédent unique. (Voir le cas d'une translation ci-dessus)	L'étude de la bijectivité donne immédiatement la bijection réciproque
- Une symétrie orthogonale S_Δ - Une symétrie centrale S_O	Non démontrée. Supposée immédiate.	On utilise sans preuve explicite que $S_\Delta^{-1} = S_\Delta$ et $S_O^{-1} = S_O$ (considérée comme évidente)
Une isométrie quelconque	On utilise la définition d'une bijection. (Voir l'exemple 1 ci-dessus)	Non spécifiée
Une similitude	Composée de deux bijections : une isométrie et une homothétie	S bijective et $SoS' = id_P \Rightarrow S^{-1} = S'$

Concernant les propriétés de bijectivité intervenant dans les exercices, elles se limitent aux deus propriétés suivantes :

- si f est bijective, $N = f(M) \Leftrightarrow M = f^{-1}(N)$
- Pour une bijection f de P sur P, $fof^{-1} = id_P$

La première est généralement utilisée lorsqu'il s'agit de passer d'une transformation à sa réciproque dans une situation où interviennent des points donnés. Comme dans la situation suivante :

> Dans un plan orienté, on considère deux points fixes A et B et les rotations $R_A = R(A, \frac{\pi}{2})$ et $R_B = R(B, \frac{\pi}{2})$. Pour tout M du plan, on note M_1 et M_2 les images respectives de M par R_A et R_B. On veut déterminer l'image par l'application $T = R_B o R_A^{-1}$ du point M_1 :
>
> On a : $T(M_1) = R_B o R_A^{-1}(M_1)$
>
> Comme $M_1 = R_A(M)$, alors $R_A^{-1}(M_1) = M$
>
> D'où : $T(M_1) = R_B(M) = M_2$

Quant à la deuxième, elle intervient généralement dans les tâches relatives à la composition ou la décomposition des transformations géométriques. Nous reviendrons sur ces techniques lors de l'étude des praxéologies mathématiques mises en œuvre dans les exercices.

b) Bijection et bijection réciproque dans le domaine de l'analyse

Conformément aux programmes officiels, dans le domaine de l'analyse, ces deux notions sont étudiées en quatrième année secondaire dans le contexte des fonctions continues et strictement monotones.

La première rencontre avec ces notions dans le manuel officiel[35] se fait à travers les deux théorèmes suivants :

---

[35] Ben Younes Ali. & al. (1999) : Mathématiques. 4ème année de l'enseignement secondaire. Section Math. Tome 1.

Théorème 1 (p. 92) :

> **Théorème**
> Soit f une fonction strictement monotone sur un intervalle I. On a alors les propriétés suivantes :
> - La fonction f est une bijection de I sur f(I).
> - La fonction f^{-1}, réciproque de f, est une bijection de f(I) sur I et on a :
> - $(x \in I, \quad y = f(x)) \quad \Leftrightarrow \quad (y \in f(I), \quad x = f^{-1}(y))$.
> - La fonction f^{-1} est strictement monotone sur f(I) et a le même sens de variation que f.
> - Les courbes représentatives de f et de f^{-1}, dans un repère orthonormé, sont symétriques par rapport à la première bissectrice du repère.

Théorème 2 (p. 92) :

> **Théorème**
> Soit f une fonction strictement monotone sur un intervalle I.
> Si f est continue sur I, alors sa fonction réciproque f^{-1} est continue sur f(I).

Le premier théorème est démontré et le deuxième est admis (conformément aux recommandations des programmes officiels). Aucun discours préalable concernant les notions sous-jacentes à ces deux théorèmes n'est donné dans le manuel. Par ailleurs, l'usage fait de ces deux théorèmes est double :

- l'utiliser comme moyen pour définir dans le cours la fonction : $x \mapsto \sqrt[n]{x}$, comme bijection réciproque sur $[0,+\infty[$ de la fonction $x \mapsto x^n$, et la fonction $x \mapsto e^x$, comme bijection réciproque de la fonction $x \mapsto \ln x$.

- l'utiliser dans les exercices et problèmes comme moyen pour montrer qu'une fonction numérique est bijective, déterminer sa bijection réciproque et en connaitre certaines de ces propriétés.

Contrairement au cas des transformations géométriques, où la propriété de bijectivité et la détermination de la bijection réciproque sont établies dans le cours pour chacune des transformations étudiées, il serait question pour les fonctions numériques de réaliser ces deux tâches en exercices pour différents types de fonctions données. Dans ce contexte, le choix adopté par les auteurs du manuel pour la réalisation de ces deux tâches consiste à séparer l'étude de la bijectivité de la détermination de la fonction réciproque, et ceci même pour des fonctions où les deux propriétés peuvent être établies simultanément via la résolution de l'équation en x : $(y \in f(I), \quad x = f^{-1}(y)) \quad \Leftrightarrow \quad (x \in I, \quad f(x) = y)$. Ceci pourrait s'expliquer par le fait que dans la plupart des exercices, il serait question de déterminer l'intervalle image f(I). Or, pour ce faire, le seul moyen dont disposent les élèves est d'utiliser le théorème relatif à l'image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone.

L'exemple suivant illustre les techniques adoptées par le manuel dans la réalisation de ces deux tâches (p. 93, 94) :

Exemple 3 (p. 93, 94)

Exercice résolu

On considère la fonction f définie sur IR^* par : $f(x) = x - \frac{1}{x}$.

a- Montrer que la restriction g de f à l'intervalle $]0,+\infty[$ réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur un intervalle I que l'on déterminera.

b- Construire, dans un même repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les courbes représentatives de g et de g^{-1}.

c- Calculer $g^{-1}(x)$, pour $x \in I$.

Solution

a- Chacune des fonctions : $x \mapsto x$ et $x \mapsto -\frac{1}{x}$ est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]0,+\infty[$; donc la fonction g est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

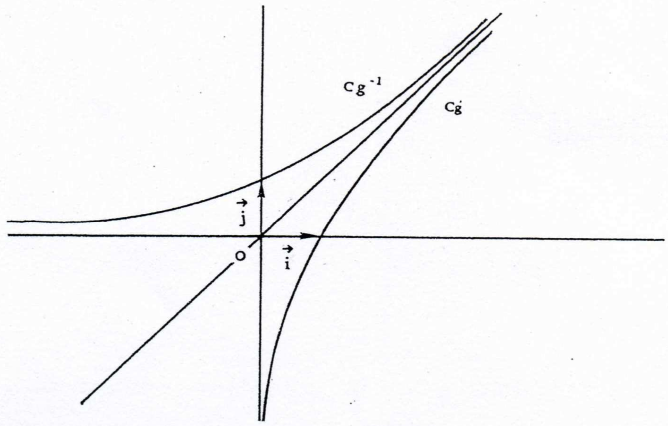
Il en résulte que g est une bijection de $]0,+\infty[$ sur $g(]0,+\infty[)$ avec

$$g(]0,+\infty[) =]\lim_{0^+} g, \lim_{+\infty} g[=]-\infty,+\infty[.$$

b- Tableau de variation de g

x	0		+∞
g(x)	-∞	↗	+∞

* $\lim_{0^+} g = -\infty$, donc la droite d'équation x = 0 est une asymptote verticale à la courbe de g.
* $\lim_{x \to +\infty} (g(x)-x) = 0$, donc la droite d'équation y = x est une asymptote oblique à la courbe de g.



Les courbes de g et g^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

c- Soit x un réel quelconque et y un élément de IR_+^*.

On a : $g^{-1}(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x$

$\Leftrightarrow y - \frac{1}{y} = x$

$\Leftrightarrow y^2 - xy - 1 = 0.$

Le discriminant de l'équation $y^2 - xy - 1 = 0$ est $\Delta = x^2 + 4 > 0$.

Cette équation admet donc deux solutions :

$y_1 = \frac{x - \sqrt{x^2+4}}{2}$ et $y_2 = \frac{x + \sqrt{x^2+4}}{2}$.

On vérifie que $y_1 < 0$ et $y_2 > 0$.

La solution, dans IR_+^*, de l'équation y^2-xy - 1= 0 d'inconnue y est donc $y = \frac{x + \sqrt{x^2+4}}{2}$

Conclusion : Pour tout réel x, on a : $g^{-1}(x) = \frac{x + \sqrt{x^2+4}}{2}$.

Commentaire

Nous remarquons que pour la fonction g de l'exercice, l'unicité de la solution de l'équation $g^{-1}(x) = y$ montre que g est bijective et détermine en même temps la bijection réciproque g^{-1}. La propriété de « g continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$) reste toutefois nécessaire pour déterminer l'intervalle image $f(]0,+\infty[)$. Dans d'autres situations où l'intervalle image est donné dans l'énoncé, nous trouvons que les deux tâches sont aussi demandées séparément, comme dans l'exercice suivant (p. 249) :

Exemple 4 (p. 249)

Exercice

1. Démontrer que, pour tout réel x, on a : $-1 < \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} < 1$
2. Etudier les variations de la fonction f définie sur **R** par : $f(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

Construire sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

3. Démontrer que f est une bijection de **R** sur $]-1,1[$.

Pour x donné dans $]-1,1[$, calculer $f^{-1}(x)$.

Dans cet exercice, la résolution dans **R** de l'équation en y : $x = f(y)$ (pour $x \in]-1,1[$) donne pour unique solution : $y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$. Ceci montre à la fois que f est bijective et que :

$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

A notre avis, le choix adopté par les auteurs du manuel concernant la séparation de la tâche relative à l'étude de la bijectivité de celle relative à la détermination de la fonction réciproque suggère implicitement d'utiliser le théorème sur les fonctions continues et strictement monotones pour la première tâche et de résoudre l'équation en y : $x = f(y)$, pour la deuxième tâche. Il nous semble que cette façon de procéder ne favorise pas l'exploitation de la variété de points de vue associées à la notion de bijection (pour les fonctions numériques d'une variable réelle) et risque d'entraîner chez les élèves une confusion entre les notions de « fonction bijective » et de « fonction continue et strictement monotone ». C'est ce que nous avons constaté dans le test diagnostique donné aux étudiants au début de leurs études supérieures. Nous reviendrons sur ce point dans le chapitre suivant.

Conclusion

Bien que les textes des programmes officiels n'accordent pas une attention particulière à l'étude générale de la notion de bijection et ne la considèrent comme objectif d'étude que dans le contexte des fonctions continues et strictement monotones, l'analyse des manuels montre que cette notion joue un rôle important dans l'étude des transformations géométriques, notamment en classe terminale. Son usage s'avère nécessaire aussi bien dans le développement des leçons que dans la résolution des exercices. Malgré cette importance, et la variété des notions ensemblistes associées au concept de bijection qui sont utilisées dans les manuels officiels aux différents niveaux de l'enseignement secondaire (à partir de la classe deuxième année), nous ne rencontrons dans ces manuels aucun discours spécifique visant à définir et à présenter les dites notions. Les savoirs sont introduits dans des contextes particuliers et sous une variété de formes liées aux spécificités d'usage selon les thèmes et les domaines d'étude. Cette situation, ajoutée à l'absence de structuration et d'une décontextualisation des notions étudiées, ne semblent pas permettre de favoriser une acquisition solide et une conception conforme du concept de bijection ou des notions et propriétés qui lui sont associées.

IV. 2. 4. Propriétés de transfert liées aux applications et aux bijections

Au niveau du lycée, ces propriétés interviennent essentiellement dans les situations suivantes :

- Détermination de l'image d'une figure géométrique par une transformation géométrique.
- Etude des propriétés de conservation pour les transformations géométriques : conservation de l'alignement, du parallélisme, de l'orthogonalité….
- Détermination de l'image d'un intervalle par une fonction continue.

Les notions ensemblistes sous-jacentes à ces propriétés sont celles liées à la notion d'image d'un ensemble par une application. Nous étudions dans ce qui suit le savoir construit dans les manuels à propos de ces notions ainsi que leur mode d'intervention dans les différents types de tâches où elles sont utilisées. Nous séparons dans notre étude le cas des transformations géométriques et celui des fonctions numériques.

a) Propriétés de transfert pour les transformations géométriques

Dans le domaine de la géométrie, les propriétés de transfert concernent essentiellement la détermination des images de figures géométriques par les transformations géométriques. Ces propriétés sont étudiées dans toutes les classes de lycée à partir de la deuxième année secondaire et jouent un rôle important dans les problèmes de construction et les problèmes de lieux géométriques. Les exemples qui suivent montrent le discours technologique utilisé pour étudier ces propriétés et la manière avec laquelle elles interviennent dans les exercices et problèmes.

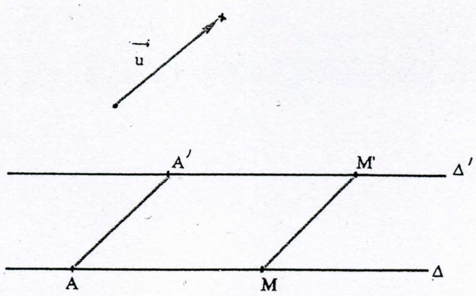
Exemple 1

Cet exemple, donné dans le manuel de deuxième année secondaire (p. 143, 144), concerne la détermination de l'image d'une droite par une translation. Il s'agit de la première rencontre avec la notion de l'image d'une figure géométrique par une application.

1°) <u>Image d'une droite</u> :

On se propose de déterminer l'image d'une droite Δ par une translation $t_{\vec{u}}$.

a) Soient A un point fixe de la droite Δ et M un point variable de Δ distinct de A. A' et M' étant les images respectives des points A et M par la translation $t_{\vec{u}}$, nous savons que les droites (A'M') et (AM) sont parallèles.
Ainsi l'image d'un point quelconque de la droite Δ appartient à la droite Δ' passant par A' et parallèle à Δ.



b) Soit N' un point de la droite Δ'.

- Quel est l'antécédent N du point N' par la translation $t_{\vec{u}}$?

- Montrer que N appartient à la droite Δ.

Théorème :

$\boxed{\text{L'image d'une droite par une translation est une droite de même direction.}}$

Commentaire

Bien que la définition de l'image d'un ensemble par une application ne soit pas précisée dans le manuel, le travail effectué explicite de façon précise et rigoureuse les notions ensemblistes sous-jacentes à la démonstration. En laissant à la charge des élèves la démonstration de l'inclusion réciproque, il semble que les auteurs visent à familiariser les élèves avec cette technique de travail. D'une manière analogue, les auteurs déterminent les images par une translation d'un segment et d'un cercle, et les images par une homothétie d'une droite, d'un segment et d'un cercle. Nous remarquons que dans toutes ces propriétés les auteurs évitent d'utiliser le symbolisme ensembliste et préfèrent s'exprimer dans le registre rhétorique pour énoncer les propriétés et rédiger les démonstrations.

Par ailleurs, dans les exercices résolus visant à donner des exemples d'application des propriétés établies, les auteurs utilisent les résultats établis sur les images par les transformations des figures usuelles. L'exemple 2, donne un exemple de ces exercices.

Exemple 2 (p. 183, 184)

Exercice 1 :

On considère un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon R et un diamètre [AB] de ce cercle. M étant un point variable de $\mathscr{C}$, on désigne par N le symétrique de A par rapport à M.

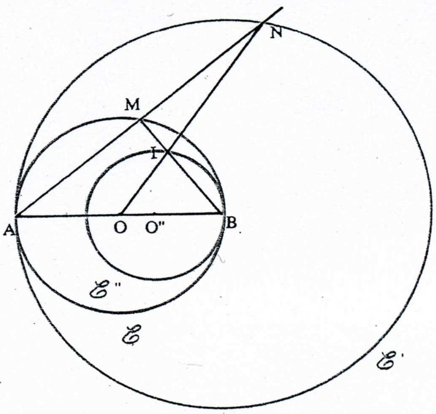
1°) Quel est l'ensemble des points N ?

2°) Lorsque M est distinct de A et B, les droites (BM) et (ON) se coupent en I. Déterminer et construire l'ensemble des points I.

Solution :

1°) N étant le symétrique du point A par rapport à M on a : $\overrightarrow{AN} = 2\ \overrightarrow{AM}$; donc N est l'image du point M par l'homothétie $h_{(A,2)}$. Lorsque M décrit le cercles $\mathscr{C}$, le point N décrit le cercle $\mathscr{C}'$ image du cercle $\mathscr{C}$ par l'homothétie $h_{(A,2)}$.

L'ensemble des points N est le cercle $\mathscr{C}'$ de centre B et de rayon 2R.



2°) M et O sont les milieux respectifs de [AN] et [AB] ; donc le point I est le centre de gravité du triangle ABN ; on a alors :

$\overrightarrow{BI} = \frac{2}{3}\ \overrightarrow{BM}$ et par suite I est l'image du point M par l'homothétie $h_{(B,\frac{2}{3})}$

L'ensemble des points I est alors le cercle $\mathscr{C}$" image du cercle $\mathscr{C}$ par l'homthétie $h_{(B,\frac{2}{3})}$ privé des points A" et B qui sont les images respectives des points A et B par cette homothétie.

Le cercle $\mathscr{C}$" a pour rayon 2/3 R et pour centre O" tel que $\overrightarrow{BO"} = \frac{2}{3}\ \overrightarrow{BO}$.

Commentaire

Cet exercice décrit la technique généralement employée en géométrie pour déterminer l'ensemble décrit par un point variable N. Il s'agit de définir N comme image d'un point M par une transformation géométrique usuelle *f* et de préciser l'ensemble *E* décrit par M. l'ensemble des point N est alors l'image de *E* par la transformation *f*. Comme nous l'avons remarqué dans l'exemple 1, les notions ensemblistes sous-jacentes à cette technique restent invisibles dans la solution donnée. Celle-ci se prête plutôt à une description de la trajectoire du point N lorsque M se déplace sur le cercle *C*. Dans ce contexte, les auteurs font usage d'un vocabulaire spécifique pour remplacer le langage ensembliste. Ainsi, les phrases « *M étant un point variable de C* », ou « *M décrit le cercle C* » expriment implicitement que le point M prend toutes les positions sur le cercle *C*. Or, de par notre expérience dans l'enseignement secondaire, nous avons toujours constaté que bon nombre d'élèves n'accordent pas d'importance à de telles précisions dans la rédaction de la solution. Ainsi dans ce genre d'exercice, il n'est pas rare de trouver des élèves qui répondent par : « *lorsque M appartient au cercle C (ou se trouve sur C), le point N appartient au cercle C' (ou se trouve sur C') image du cercle C par l'homothétie* $h_{(A,2)}$ *, donc l'ensemble des points N est le cercle C'* ». Or, avec le mot « appartient », on ne peut en fait conclure qu'à une inclusion.

Nous rencontrons ce genre d'exercices aussi dans les manuels de troisième et de quatrième année secondaire. Les auteurs de ces manuels adoptent la même technique et le même discours pour résoudre ces exercices. Nous en donnons un exemple rapporté dans le manuel de quatrième année secondaire[36] (p. 131).

[36] Ben Younes Ali. & al. (1999) : Mathématiques. 4ème année de l'enseignement secondaire. Section Math. Tome 2.

Exemple 3

On considère un triangle ABC rectangle isocèle en B et tel que $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

On note Δ *la droite (BC), M un point de* Δ *et M' le point tel que AMM' est rectangle isocèle et* $(\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{MA}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

1- Préciser la similitude directe S de centre A qui transforme M en M'.

2- Déterminer l'ensemble E des points M' lorsque M décrit Δ.

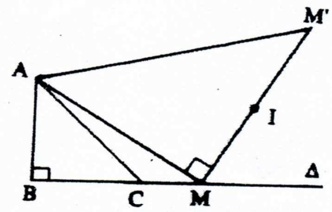
3- Soit $I = M * M'$.

Calculer $\frac{AI}{AM}$ *et* $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AI})$.

Déterminer l'ensemble des points I lorsque M décrit Δ.

Solution

1- Nous connaissons le centre de la similitude S, il suffit donc de déterminer son rapport k et son angle θ.



Le triangle AMM' est isocèle et rectangle donc : $\frac{AM'}{AM} = \sqrt{2} = k$.

De plus $(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}}) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

S est la similitude directe de centre A, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

2- M décrit la droite Δ passant par B, donc M' décrit la droite Δ' image de Δ par la similitude S. C'est la droite Δ' passant par C et perpendiculaire à (AC).

3- Le triangle AMI est rectangle en M et $MI = \frac{1}{2} MM' = \frac{1}{2} AM$.

Donc : $AI^2 = AM^2 + \frac{1}{4} AM^2 = \frac{5}{4} AM^2$.

D'où : $\frac{AI}{AM} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

De plus : $\cos(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AI}) = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

L'angle $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AI})$ est donc de mesure θ indépendante du point M.

Le point I est l'image du point M par la similitude directe S' de centre A de rapport $\frac{\sqrt{5}}{2}$ et d'angle θ. Il décrit donc la droite Δ'' image de la droite Δ par la similitude S'. La droite Δ'' passe par le milieu du segement [BC].

Dans le manuel de quatrième année secondaire, nous rencontrons d'autres situations où les images d'ensembles de points sont utilisées. Ainsi, dans le chapitre sur les isométries du plan, plusieurs exercices sont donnés à propos de la recherche des isométries laissant globalement invariante une figure géométrique. Dans ce contexte, les auteurs commencent par préciser le sens d'ensemble globalement invariant par une isométrie. Ainsi, nous lisons (ibid. p. 76) :

Soit φ une isométrie.

Ont dit qu'une partie Ω du plan est globalement invariante par φ, si $\varphi(\Omega) = \Omega$ ce qui équivaut à dire :
L'image de tout point de Ω est un point de Ω et pour tout point N de Ω il existe un point M de Ω tel que $N = \varphi(M)$.

L'exercice suivant donne un exemple de situation où est utilisée cette notion (ibid. p. 76) :

Exemple 4

Exercice
Soit φ une isométrie du plan et *A, B, C* trois points non alignés.

Montrer que si le triangle *ABC* est globalement invariant par φ alors l'ensemble $\{A,B,C\}$ est globalement invariant par φ.

Solution
Soit φ une isométrie qui laisse globalement invariant le triangle ABC. Notons Γ le cercle circonscrit au triangle ABC.
L'image du cercle Γ étant le cercle circonscrit au triangle image, on en déduit que Γ est globalement invariant par φ. Par suite, l'ensemble $\{A,B,C\}$ des sommets du triangle est globalement invariant par φ.

Commentaire

Notons tout d'abord que le langage ensembliste utilisé dans la définition d'« ensemble globalement invariant » n'est pas mis en œuvre dans la solution donnée par les auteurs et que beaucoup d'implicite caractérise cette solution. Nous proposons dans ce qui suit de détailler cette solution en explicitant les notions ensemblistes qui lui sont sous-jacentes.

Le cercle Γ a pour centre le point *O* intersection des médiatrices du triangle *ABC*. Donc $\varphi(\Gamma)$ est le cercle de centre $\varphi(O)$ et de même rayon que celui de Γ (selon un théorème du cours). $\varphi(O)$ est l'intersection des médiatrices du triangle image de *ABC*. Le triangle *ABC* étant globalement invariant par φ alors $\varphi(O) = O$, et par suite $\varphi(\Gamma) = \Gamma$.
Notons Δ le triangle *ABC*. Alors $\Gamma \cap \Delta = \{A,B,C\}$.
L'application φ étant bijective, alors : $\varphi(\Gamma \cap \Delta) = \varphi(\Gamma) \cap \varphi(\Delta)$ **(1)**
Par suite, $\varphi(\{A,B,C\}) = \Gamma \cap \Delta = \{A,B,C\}$.

Nous remarquons à travers cette solution détaillée que la propriété (1) est nécessaire pour établir la démonstration, or cette propriété dépasse le cadre des programmes officiels de mathématiques du Secondaire et aucun discours à son propos n'est établi dans les manuels officiels. Le discours adopté par les auteurs pour résoudre l'exercice se base sur les images intuitives de la situation plutôt que sur les notions ensemblistes sous-jacentes (nous rencontrons ce genre de discours dans plusieurs autres exercices donnés dans les manuels officiels). En revanche, dans les démonstrations des propriétés du cours, les auteurs utilisent souvent le langage ensembliste de façon explicite, comme dans l'exemple suivant, où il s'agit de montrer qu'une isométrie conserve le parallélisme (p. 70) :

Exemple 5

Propriété
Soit φ une isométrie du plan, Δ_1 et Δ_2 deux droites.
Montrer que $\Delta_1 // \Delta_2 \Rightarrow \varphi(\Delta_1) // \varphi(\Delta_2)$

Solution
Le résultat est immédiat si $\Delta_1 = \Delta_2$.
Supposons $\Delta_1 \neq \Delta_2$.
On sait que l'image par une isométrie d'une droite est une droite.
Supposons que les droites $\varphi(\Delta_1)$ et $\varphi(\Delta_2)$ sont sécantes en un point *M*.
Puisque $M \in \varphi(\Delta_1)$, il existe un point A appartient à Δ_1 tel que $M = \varphi(A)$.
Il existe de même un point B appartenant à Δ_2 tel que $M = \varphi(B)$.
Les points A et B sont distincts (car $\Delta_1 // \Delta_2$ et $\Delta_1 \neq \Delta_2$) et ont même image, cela contredit le fait qu'une isométrie est injective.
Donc $\Delta_1 // \Delta_2 \Rightarrow \varphi(\Delta_1) // \varphi(\Delta_2)$

Commentaire

Les notions ensemblistes requises par la démonstration sont toutes explicitées ici, toutefois, les auteurs mélangent dans leur discours le registre rhétorique et le registre symbolique. Notons d'un autre côté l'usage de nouveau de la notion d'injection qui ne fait pas partie des programmes de mathématiques du lycée. Il était possible ici de remplacer cette notion par la propriété de conservation des distances par l'isométrie φ, en remarquant que $\mathrm{AB} \neq 0$ et $\varphi(A)\varphi(B) = MM = 0$, ce qui conduit à une contradiction.

Conclusion

Les propriétés de transfert pour les transformations géométriques sont étudiées aux différents niveaux du lycée à partir de la classe de deuxième année secondaire, elles occupent une place importante dans l'enseignement de la géométrie du lycée, aussi bien dans les développements théoriques des leçons que dans les exercices, où elles constituent des outils économiques et efficaces pour les techniques relatives à la recherche d'ensembles de points et à la résolution de problèmes de construction. Les notions ensemblistes sous-jacentes aux dites propriétés sont parfois utilisées de façon explicite et parfois restent implicites. Néanmoins, aucune présentation précisant le sens de ces notions, leurs propriétés ou les règles de leur usage n'est donnée dans ces manuels, excepté la définition d'un ensemble globalement invariant par une isométrie, donnée dans le manuel de quatrième année secondaire. Nous distinguons deux niveaux de discours à propos de l'usage des propriétés de transfert. Un discours où les notions ensemblistes associées sont exprimées de façon explicite, parfois dans le registre rhétorique et parfois dans le registre symbolique. Ce genre de discours est souvent réservé aux démonstrations des théorèmes et propriétés données dans les leçons. Et un discours rhétorique descriptif introduisant une dimension cinématique aux situations considérées, souvent utilisé dans les exercices et problèmes. Dans ce cas, les notions et propriétés ensemblistes interviennent de manière implicite. Certaines d'entre elles dépassent le cadre des programmes de l'enseignement secondaire.

Notons dans ce contexte que, selon Ana Paula Jahn (1998), le passage d'une conception des transformations géométriques comme transformations entre figures (perçues synthétiquement) à celle de transformation ponctuelle ne relève pas d'une évolution naturelle spontanée, mais au contraire correspond à une rupture conceptuelle difficile pour les élèves du Secondaire. L'auteur montre dans sa thèse (ibid.) qu'une interprétation cinématique (point mobile sur une courbe) peut favoriser une position cognitive intermédiaire entre l'appréhension synthétique d'une figure géométrique et sa perception comme ensemble de points. Cette interprétation cinématique peut à son tour favoriser la compréhension de la notion de transformation d'une figure F en une figure F' comme opérateur ponctuel. Néanmoins, un manque de maîtrise du vocabulaire ensembliste de base et un vide didactique inhérent à l'aspect abstrait de la notion d'application peuvent conduire selon elle à une stabilisation relative de la conception cinématique chez les élèves et finir par faire obstacle à l'évolution vers la compréhension de la transformation ponctuelle.

b) Propriétés de transfert pour les fonctions numériques

Ces propriétés concernent la détermination de l'image d'un intervalle par une fonction numérique continue. Conformément aux programmes officiels, ce thème est exclusivement étudié en classe Terminale, les théorèmes relatifs à ce thème d'étude sont tous admis. Pour expliquer et justifier ces théorèmes, les auteurs du manuel font usage d'illustrations graphiques. Nous rapportons ci-dessous les énoncés des trois théorèmes donnés dans le manuel[37] à propos de ce sujet (p. 75 et p. 89).

Théorème 1

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle

Théorème 2

L'image d'un intervalle fermé borné $[a,b]$ par une fonction continue est un intervalle fermé borné $[m,M]$.

Théorème 3

- Si f est une fonction continue et strictement croissante sur $[a,b]$ alors $f([a,b])=[f(a),f(b)]$.
- Si f est une fonction continue et strictement décroissante sur $[a,b]$ alors $f([a,b])=[f(b),f(a)]$.

A la suite du théorème 3 est énoncé un quatrième théorème précisant les images d'un intervalle I par une fonction continue et strictement croissante (respectivement, décroissante) pour les différents cas de I : intervalle ouvert, semi-ouvert, à extrémités finies ou infinies. C'est ce théorème qui sera utilisé dans les questions relatives à la détermination de l'image d'un intervalle I par une fonction continue et strictement monotone. L'exemple 3, de IV. 2. 3.

[37] Ben Younes Ali. & al. (1999) : Mathématiques. 4ème année de l'enseignement secondaire. Section Math. Tome 1.

(b) donne la technique utilisée pour déterminer de telles images. Il s'agit de calculer, selon les cas, l'image *f(x)* ou la limite de f en chacune des extrémités de I (finie ou infinie) et de placer les valeurs obtenues sur les extrémités de *f*(I) selon le sens de variation de *f*. Ainsi, pour déterminer l'image de l'intervalle I=$[0,+\infty[$ par la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x} - 1$, on calcule : $f(0) = -1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, et en remarquant que *f* est strictement croissante sur $[0,+\infty[$, on déduit que : $f([0,+\infty[) = [-1,+\infty[$. Cette façon de procéder ne fait pas intervenir la définition ensembliste de *f*(I). Néanmoins, le théorème des valeurs intermédiaires donne une occasion pour mettre en œuvre cette définition, ceci en remarquant que pour *f* continue et $\lambda \in \left]f(a), f(b)\right[$ (ou $\left]f(b), f(a)\right[$, selon le sens de variation de f), il existe au moins un $x_0 \in \left]a,b\right[$ tel que $f(x_0) = \lambda$. Or il se trouve que, dans ce contexte aussi, les auteurs utilisent souvent une technique qui ne fait pas appel à la définition de *f*(I). Cette technique se réfère au corollaire suivant du théorème des valeurs intermédiaires donné dans le manuel (ibid. p. 76) :

> **Corollaire**
> Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé borné $[a,b]$ ($a<b$) et telle que : $f(a) \times f(b) < 0$.
> Il existe alors au moins un réel x_0 de l'intervalle ouvert $]a,b[$ tel que : $f(x_0) = 0$

L'exercice ci-dessous montre la technique utilisée par les auteurs lorsqu'il s'agit de faire usage du théorème des valeurs intermédiaires :

Exercice 1 (ibid. p. 77) :

> **Exercice**
> Montrer que l'équation $x + \sin x = \frac{\pi}{3}$ admet une solution comprise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.
>
> **Solution**
> L'équation (E) : $x + \sin x = \frac{\pi}{3}$ équivaut à l'équation : $x + \sin x - \frac{\pi}{3} = 0$.
> Considérons alors la fonction f définie par : $f(x) = x + \sin x - \frac{\pi}{3}$.
> On vérifie que :
> - f est continue sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$
> - $f(0) \times f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$
>
> Le corollaire précédent permet d'affirmer l'existence d'une solution $x_0 \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ de l'équation (E).

Dans le cas où il s'agit de prouver que la solution de l'équation f(x) = 0 est unique, les auteurs changent de technique, ils utilisent la propriété de bijectivité de f comme le montre l'exercice suivant :

Exercice 2 (ibid. p. 209) :

Exercice

1.a- Etudier les variations de la fonction $g : x \mapsto x^2 - 2 + Logx$.

b- Montrer qu'il existe α unique de $]0,+\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$.

Montrer que 1,31< α <1,32.

c- En déduire le signe de *g(x)*.

Solution

Solution

1- a- La fonction g est définie et continue sur IR_+^*.

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = -\infty$.

La fonction g est dérivable sur IR_+^* et pour tout réel strictement positif,

$g'(x) = 2x + \frac{1}{x} > 0$.

Le tableau de variation de la fonction g est :

x	0		α		$+\infty$
g'(x)	||	+	|	+	
g(x)	|| $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

b- g est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

D'où g est une bijection de $]0,+\infty[$ sur $g(]0,+\infty[) = IR$ et comme $0 \in g(]0,+\infty[)$, il existe donc α unique de $]0,+\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$.

Montrons que : $1{,}31 < \alpha < 1{,}32$

on a : $\left.\begin{array}{l} g(1{,}31) \approx -0{,}01 \\ g(1{,}32) \approx \quad 0{,}02 \end{array}\right\}$ D'où : $1{,}31 < \alpha < 1{,}32$.

c- Le signe de g(x) est donné par le tableau suivant :

x	0		α		$+\infty$
g(x)	||	−	0	+	

Commentaire

A notre avis, les techniques utilisées dans le manuel dans les situations où intervient l'image d'un intervalle par une fonction continue rendent difficile la mise en évidence de l'aspect ensembliste de l'ensemble f(I). Comme dans le cas de la géométrie, les aspects théoriques de telles notions ne semblent pas être visés par les auteurs, ce qui reste conforme aux recommandations des programmes officiels.

IV. 2. 5. Conclusion concernant l’organisation et la structuration du savoir construit dans les manuels

Les notions d’application et de bijection et les notions et propriétés ensemblistes qui leurs sont rattachées jouent un rôle important dans l’enseignement des mathématiques du Secondaire. Elles interviennent dans plusieurs thèmes d’étude en algèbre, en analyse et en géométrie, et ceci dans toutes les classes de l’enseignement secondaire. Excepté les notions d’application, de fonction numérique d’une variable réelle et des opérations algébriques sur les fonctions numériques, pour lesquelles des définitions générales sont données dans les manuels officiels, aucun discours n’est donné dans ces manuels précisant le sens, les propriétés et les règles d’usage des autres notions : composition d’application, bijection, bijection réciproque, image d’un ensemble par une application. Celles-ci sont directement utilisées par les auteurs des manuels dans des contextes particuliers d’étude. Nous récapitulons dans le tableau ci-dessous les résultats de nos analyses en précisant pour chacune des notions fonctionnelles étudiées, le (ou les) thème(s) où elle intervient, les principales caractéristiques de son usage, ainsi que la (ou les) classe(s) où elle est étudiée.

Tableau 7 : Synthèse de l'étude des notions ensemblistes fonctionnelles dans les manuels officiels

Notions	Contextes d'étude	Caractéristiques d'usage		Classes d'étude
Application	Fonctions numériques d'une variable réelle	**Désignation** : généralement par : - *f(x)* - $x \mapsto f(x)$ On précise parfois le domaine de départ ou de définition.	Dans les deux premières classes on utilise souvent l'écriture : $f : E \to F$ $x \mapsto f(x)$ pour les fonctions numériques	Toutes les classes
	Transformations géométriques	**Désignation** : Symboles spécifiques : $t_{\vec{u}}$, $h(O,k)$ $R(o,\theta)$, S_O , S_Δ $S(O,k,\theta)$	Une définition géométrique est donnée au moment de l'introduction de chaque transformation	2ème : $t_{\vec{u}}$, $h(O,k)$ 3ème : $R(o,\theta)$ 4ème : Isométries, similitudes
Opérations algébriques	Calcul sur les limites, les fonctions continues, les fonctions dérivables, les fonctions primitives et calcul intégral	On s'intéresse aux résultats de l'opération plutôt qu'à l'opération elle-même, par exemple : à f(x)+g(x) plutôt qu'à f+g	Dans les exercices, l'usage est généralement implicite. Les propriétés des opérations ne sont pas étudiées (commutativité, associativité…)	3ème et 4ème années
Composition d'applications	Transformations géométriques	Composition et décomposition des transformations géométriques	- Techniques dépendantes des objets ostensifs utilisés dans la désignation des transformations géométriques - Aspect ensembliste invisible	2ème, 3ème et 4ème années
	Fonctions numériques d'une variable réelle	Enoncer les théorèmes relatifs à la limite, la continuité et la dérivabilité d'une fonction composée	Usage généralement implicite de ces théorèmes dans les exercices	4ème année
Bijection et bijection réciproque	Transformations géométriques	- Etablir la propriété de bijectivité pour les isométries et les similitudes - Utiliser la propriété : $fof^{-1} = f^{-1}of = id_P$, dans les tâches de composition et de décomposition des transformations géométriques	La définition et la propriété $y=f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$ sont généralement réservées aux développements théoriques des leçons	2ème, 3ème et 4ème années
	Fonctions numériques d'une variable réelle	- Bijectivité des fonctions continues et strictement monotones - Utiliser la propriété : $y=f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$ pour déterminer la fonction f^{-1}	Séparation entre la tâche relative à la propriété de bijectivité et celle relative à la détermination de f^{-1}	4ème année
Propriétés de transfert	Transformations géométriques	Images des figures géométriques par les transformations géométriques	- Notions ensemblistes sous-jacentes utilisées généralement dans les développements théoriques des leçons - Dans les exercices, ces notions sont souvent implicites. Les auteurs se réfèrent plutôt à la dimension cinématique de la transformation et utilisent souvent le registre rhétorique dans leur discours plutôt que le registre ensembliste symbolique	2ème, 3ème et 4ème années
	Fonctions numériques d'une variable réelle	Image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone	Les techniques associées laissent souvent inopérant l'aspect ensembliste de la notion	4ème année

Outre l'absence dans les manuels officiels de discours introduisant de façon générale et précise les notions de bijection, de composition d'applications et de l'image d'un ensemble par une application, nous distinguons sur le plan de l'usage de ces notions, ainsi que des notions et propriétés qui leurs sont rattachées, deux niveaux de discours et deux modes d'intervention. Ainsi, dans les développements théoriques des leçons, et pour répondre aux exigences de rigueur que requiert l'institutionnalisation des théorèmes et propriétés, les auteurs des manuels font usage des notions ensemblistes et du formalisme symbolique nécessaires à leur travail, quitte à faire appel dans certains cas à des notions qui ne figurent pas dans les programmes officiels et que les auteurs introduisent de façon incidente quand le contexte l'exige. En revanche, dans les exercices, les notions ensemblistes sont présentées sous l'angle de la fonctionnalité, en ce sens qu'on s'efforce de mettre à la disposition des élèves des techniques de travail qu'il serait possible d'utiliser sans se soucier des notions ensemblistes sous-jacentes, ou du discours technologique associé. La plupart de ces techniques sont données dans les manuels dans des exercices résolus.

Par ailleurs, l'usage des notions ensemblistes diffère selon le contexte et le domaine où elles interviennent. Ainsi, pour les transformations géométriques, les opérations de composition et de décomposition sont étroitement liées aux objets ostensifs utilisés dans la désignation de ces transformations, et les théorèmes et propriétés donnés dans le cours à propos de ces opérations permettent de réaliser les techniques associées à ces opérations en se référant aux conditions géométriques de la situation et au formulaire mis à la disposition des élèves relatif aux différents cas de composition et de décomposition des isométries et similitudes. Les conditions et propriétés ensemblistes et fonctionnelles auxquelles obéissent les dites opérations restent implicites et n'interviennent pas dans la réalisation des techniques données aux élèves. Dans le cas des fonctions numériques, où l'on traite seulement l'opération de composition, l'usage qu'on fait de cette opération se limite généralement à reconnaitre les fonctions numériques qui composent une fonction donnée, et ceci pour calculer une limite, une dérivée ou justifier la continuité ou la dérivabilité d'une fonction. Souvent, ces théorèmes sont utilisés de façon implicite, en exprimant par exemple qu'une fonction est continue ou dérivable, car c'est la composée de deux fonctions, sans donner explicitement les fonctions qui la composent.

Pour la notion de bijection, son intervention diffère aussi selon les domaines d'étude. Ainsi, dans le domaine de la géométrie, cette notion intervient dans les exercices seulement à travers deux propriétés :

- si f est bijective, $N = f(M) \Leftrightarrow M = f^{-1}(N)$
- Pour une bijection f de P sur P, $fof^{-1} = id_P$

Les questions de bijectivité et de bijection réciproque ne sont jamais posées dans les exercices de géométrie. Ces deux tâches sont exclusivement utilisées dans pour démontrer des théorèmes de cours. Pour la bijectivité, la technique utilisée par les auteurs consiste soit à appliquer la définition générale d'une bijection, soit à utiliser que la composée de deux bijections est une bijection. Pour la bijection réciproque, les auteurs déterminent la réciproque de chacune des transformations géométriques étudiées en cherchant, via la définition géométrique de la transformation considérée, l'application qui à un point du plan associe son antécédent. En revanche, dans le domaine de l'analyse, le problème de bijectivité est toujours lié aux fonctions continues et strictement monotones. Et on sépare souvent dans les exercices la tâche de bijectivité de celle de la détermination de la bijection réciproque, qu'on réalise par la résolution de l'équation en y : $x = f(y)$. Il nous semble que cette façon de procéder pourrait conduire au développement de deux conceptions différentes de la notion de bijection selon le domaine où elle est utilisée, surtout que les notions utilisées ne sont pas présentées et étudiées dans un cadre général.

Concernant la notion de l'image d'un ensemble par une application, bien qu'elle joue un rôle important dans l'étude de plusieurs thèmes de géométrie, il n'existe dans les manuels officiels aucun discours précisant son sens ou indiquant ses propriétés. En outre, nous trouvons que les auteurs font usage de tout le formalisme ensembliste et de l'outil théorique nécessaires, associés à cette notion, pour établir de façon rigoureuse et détaillée les propriétés concernant les images des figures géométriques par les transformations du plan. La mise en œuvre de ces propriétés dans les exercices se réfère par contre, généralement, à la dimension cinématique des situations étudiées et les notions ensemblistes sous-jacentes restent implicites. De même, dans le domaine de l'analyse, les techniques utilisées pour déterminer l'image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone laissent souvent les caractéristiques ensemblistes de l'ensemble f(I) inopérantes et invisibles.

En guise de conclusion, les notions fonctionnelles sont bien présentes dans la plupart des thèmes enseignés dans l'institution ES. Leurs caractéristiques ensemblistes s'avèrent essentielles dans les développements théoriques de ces thèmes, comme dans la réalisation de bon nombre de tâches associées. Malgré cette présence, ces notions ne sont pas considérées par l'institution comme un objectif d'étude et aucun thème spécifique n'est consacré à leur enseignement. Cette situation semble avoir conduit les auteurs des différents manuels officiels à introduire les dites notions au gré des besoins, chaque fois que le contexte d'étude l'exige, et à faire en sorte que les praxéologies mathématiques que les élèves auront à mettre en œuvre dans les exercices, ne soient pas, aux niveaux des techniques, trop dépendantes des connaissances ensemblistes sous-jacentes. La variété des contextes d'étude où sont introduites et utilisées les notions ensemblistes fonctionnelles, les spécificités des techniques utilisées selon les thèmes et les domaines d'étude et l'absence d'opérations de décontextualisation et de discours unificateur généralisateur permettant aux élèves de se détacher des caractéristiques particulières des différents contextes, ont marqué le savoir construit relatif aux notions ensemblistes fonctionnelles d'un manque d'organisation et d'une absence de structuration. Ceci, à notre avis, ne semble pas favoriser une acquisition solide ni permettre un usage d'un niveau structurel des dites notions.

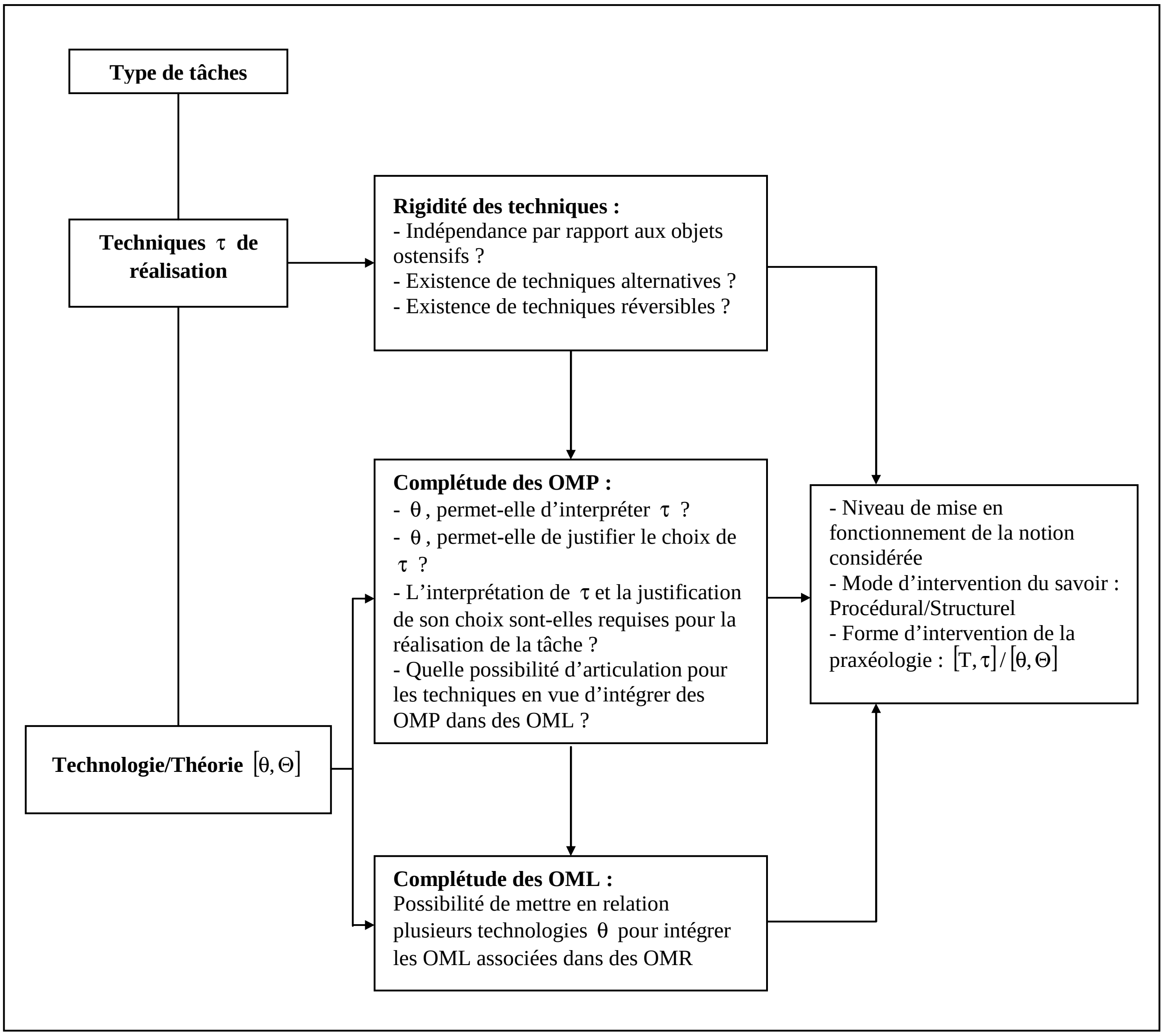
IV. 3. L'environnement praxéologique des notions ensemblistes fonctionnelles dans l'institution ES

Dans ce paragraphe, nous analysons les praxéologies mathématiques faisant intervenir les notions ensemblistes fonctionnelles mises en œuvre dans les exercices donnés dans les manuels officiels. Nous nous intéressons particulièrement à l'étude de la rigidité, de la complétude et des possibilités d'intégration et d'articulation des différents niveaux de praxéologies mathématiques ainsi qu'à l'importance accordée aux blocs pratico-technique et technologico-théorique dans la résolution des exercices donnés dans les manuels. Ceci nous permettra de voir le mode d'intervention (Procédural/Structurel) du savoir construit (relatif aux notions ensemblistes fonctionnelles) dans les praxéologies mathématiques mises en place ainsi que le niveau de mise en fonctionnement des notions ensemblistes fonctionnelles étudiées. Vu le nombre important d'exercices que renferment les manuels officiels, et afin de faciliter le dépouillement et l'analyse des praxéologies mathématiques intervenant dans ces exercices, nous avons choisi de nous limiter dans notre travail aux manuels (Tomes 1 et 2) de la classe Terminale (Section Mathématiques). Ce choix se justifie par le fait que, d'une part les thèmes et les types de tâches où interviennent les notions ensemblistes fonctionnelles dans les trois premières classes de lycée sont revus en classe terminale (cf. le tableau 7 ci-dessus), et que d'autre part, dans cette classe, les notions ensemblistes fonctionnelles sont utilisés de façon plus large et plus générale, ceci aussi bien dans les développements théoriques des leçons que dans les exercices. Par ailleurs, il nous a paru intéressant aussi d'analyser, pour certains types de tâches, des extraits de sujets de Baccalauréat où interviennent des praxéologies mathématiques objet de notre étude. Ceci nous donnera une idée sur le niveau de mise en fonctionnement des connaissances exigé par l'institution ES pour l'accès à l'Université.

IV. 3.1. Méthodologie de travail

Pour effectuer l'analyse praxéologique des exercices donnés dans les manuels nous avons procédé dans un premier temps à un inventaire des types de tâches où interviennent les notions fonctionnels objets de notre étude. Afin de simplifier la lecture des praxéologies mathématiques associées à ces types de tâches et mettre en évidence les indices de rigidité et de complétude fixés dans notre grille d'analyse (cf. III. (4)), nous procédons dans la suite à une synthèse du travail effectué dans l'inventaire et nous étudions de façon détaillée les indices de rigidité et de complétude pour des exemples choisis de praxéologies. Le diagramme suivant donne le modèle selon lequel nous avons effectué l'analyse des praxéologies mathématiques.

Diagramme 2 : Modèle d'analyse des praxéologies mathématiques



IV. 3.2. Praxéologies mathématiques associées aux notions fonctionnelles

Nous récapitulons dans le tableau suivant les principaux types de tâches mettant en fonctionnement les notions ensemblistes d'application et de bijection que nous étudierons dans ce paragraphe.

Tableau 8 : Types de tâches associées à l'usage des notions ensemblistes fonctionnelles

Types de tâches	
T_1	Reconnaître/Caractériser une transformation géométrique via : T_2^1 : la transformation complexe associée, T_2^2 : ses expressions analytiques, T_2^3 : des propriétés géométriques données
T_2	Déterminer les isométries du plan laissant globalement invariante une figure géométrique
T_3	Déterminer une transformation géométrique sous contraintes
T_4	Composer des transformations géométriques
T_5	Décomposer des transformations géométriques
T_6	Mettre en œuvre des transformations géométriques dans des questions de géométrie.
T_7	Etudier et/ou utiliser la propriété de bijectivité

Nous analysons dans ce qui suit chacun de ces types de tâches selon le modèle décrit dans le diagramme 2 ci-dessus.

❖ **Type de tâches T_1 : Reconnaître/Caractériser une transformation géométrique**

En classe Terminale, les transformations géométriques sont représentées sous trois formes différentes :

- Algébrique : transformation complexe associée à la transformation géométrique considérée.
- Analytique : système d'équations exprimant les coordonnées de l'image d'un point en fonction des coordonnées de ce point.
- Géométrique : éléments géométriques caractérisant la transformation considérée.

Le type de tâche T_1 consiste à identifier/caractériser une transformation géométrique en utilisant l'une de ses formes de représentation. Les techniques mises en œuvre pour la réalisation de ce type de tâche requièrent dans certains cas de passer d'une représentation à une autre. Les exercices suivants donnent des exemples de tâches de type T_1[38] :

Exercice 1 (p. 131)

> 1- Déterminer les éléments caractéristiques et l'expression analytique de l'application *f* qui à un point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = (1+i)z + i$.
> 2- Déterminer l'application complexe associée à la similitude directe de centre A(1, -1), de rapport 2 et d'angle $\frac{-\pi}{3}$

Exercice 2 (p. 138)

> On considère un carré ABCD tel que $(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$
> 1- Caractériser la similitude directe qui fixe A et qui envoie B sur C.
> 2- Caractériser la similitude directe qui fixe D et qui envoie C sur A.

[38] Ben Younes Ali. & al. (1999) : Mathématiques. 4ème année de l'enseignement secondaire. Section Math. Tome 2.

Exercice 3 (p. 63)

1- Ecrire l'expression complexe de la transformation f qui à M(x,y) associe M'(x',y') tel que :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{5}(3x - 4y) + 6 \\ y' = \frac{1}{5}(4x + 3y) + 5 \end{cases}$$

2- En déduire que f est une rotation. Déterminer son centre et son angle.

Analyse des indices de rigidité et de complétude

1) La réalisation des tâches de type T_1 se fait souvent à l'aide de techniques stéréotypées qui consistent à appliquer des définitions ou des propriétés de cours. Ces techniques sont étroitement liées aux objets ostensifs mis en œuvre. Ainsi :

i) Dans la question 1 de l'exercice 1, la forme d'écriture : $z' = az + b$, avec $a \notin \{0,1\}$, indique que *f* est une similitude directe de centre le point A d'affixe $\frac{b}{1-a}$, d'angle Arg(a) (Argument de a) et de rapport $|a|$.

ii) Pour déterminer l'expression analytique de *f*, il suffit de remplacer z' par : $x'+iy'$ et z par : $x + iy$, dans l'égalité : $z' = (1+i)z + i$, écrire le deuxième membre de l'égalité sous forme algébrique et de faire les correspondances entre parties réelles et parties imaginaires des deux membres.

iii) Dans la question 2, on utilise en sens inverse la propriété utilisée dans la question 1.

iv) Dans la question 1 de l'exercice 2, A étant invariant, il représente le centre de la similitude directe S. Pour déterminer le rapport k et l'angle θ de cette similitude, il faut utiliser les formules $k = \frac{AC}{AB}$ et $\theta \equiv (\overrightarrow{AB}, \widehat{\,}\, \overrightarrow{AC})\,[2\pi]$, où les positions des points A, B et C sont liées aux données : « A est fixe » et « B s'envoie sur C ». (Mêmes remarques pour la question 2)

v) Pour la question 1 de l'exercice 3, on pose $z' = x'+iy'$, $z = x + iy$ et on détermine la relation entre z' et z en utilisant la représentation analytique de f. Il s'agit de la technique inverse de la technique utilisée dans (*ii*). Et pour la question 2, on applique le théorème du cours qui donne la nature d'une similitude directe à partir de la transformation complexe associée.

2) Bien que la variété des formes de représentation des transformations géométriques donne des techniques alternatives pour la résolution des exercices faisant intervenir ces transformations, le manuel ne donne pas d'exercice où l'élève doive choisir par lui-même la représentation (et donc la technique) convenable à la situation de l'exercice qu'il veut résoudre. Les énoncés indiquent toujours la représentation à utiliser. Ceci rend difficile l'intégration des OMP relatives aux différentes techniques de travail de T_1 dans des OML, où le choix et la justification de la technique seraient à la charge de l'élève.

3) Les technologies relatives aux techniques de réalisation des tâches de type T_1 sont bien justifiées dans le manuel, néanmoins, la réalisation de ces techniques requiert seulement une application directe de la technologie correspondante. Elles ne demandent ni justification, ni interprétation. C'est donc le bloc pratico-technique ($[T_1, \tau_1^i]$) qui est mis en fonctionnement dans la réalisation des taches de types T_1.

4) Finalement, nous notons que les techniques associées aux tâches de types T_1 sont réversibles. L'inverse d'une technique permettant le passage d'une représentation à une autre est la technique permettant d'effectuer le passage dans le sens inverse.

❖ **Type de tâches T_2 : Déterminer les isométries du plan laissant globalement invariante une figure géométrique**

Nous donnons ci-dessous deux exercices se rapportant à ce type de tâches[39].

Exercice 4 (p. 100)

Soit ABCD un carré tel que : $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. Déterminer les isométries qui laissent globalement invariant le carré ABCD.

Exercice 5 (p. 144)

D et D' sont deux droites strictement parallèles. Déterminer toutes les isométries qui laissent globalement invariante la réunion des deux droites.

Analyse des indices de rigidité et de complétude

La résolution de ce genre d'exercices requiert des passages entre les niveaux d'appréhension « transformation de figures » et « transformations ponctuelles » (Sangaré, 2004). L'explicitation du raisonnement se rapportant à ces niveaux d'appréhension met en œuvre des propriétés ensemblistes fonctionnelles généralement non familières aux élèves (comme nous l'avons remarqué à propos de l'exemple 4 du IV.2.1). En outre, il n'existe pas de techniques standard pour résoudre de tels exercices, la résolution repose plutôt sur la recherche d'invariant(s) de la situation considérée et sur la possibilité de mener et de justifier une discussion envisageant les différents cas d'isométries possibles tenant compte des éléments invariants et des propriétés des isométries. Ce principe général de résolution peut constituer un élément d'intégration autour duquel s'articulent les techniques associées aux tâches de type T_2. Toutes ces considérations montrent que pour ce type de tâches, c'est plutôt le bloc technologico-théorique qui est mis en fonctionnement. Notons par ailleurs que l'absence de ce type d'exercices des examens de baccalauréat les a gardés à la marge de la culture du Secondaire.

[39] Les solutions sont dans l'annexe, pages 1 et 2.

❖ **Type de tâches T_3 : Déterminer une transformation géométrique sous contraintes**

Ce type de tâches concerne les exercices où il s'agit de prouver l'existence et/ou de déterminer une transformation géométrique vérifiant des conditions données. Nous pouvons le considérer comme inverse du type de tâche T_1. Les techniques associées aux tâches de type T_3 se réfèrent toujours à l'un des trois théorèmes suivants donnés et démontrés dans le manuel :

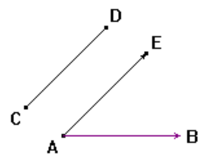
Théorème 1 (p. 92)
Soit A, B, C et D quatre points du plan vérifiant : AB=CD et $AB \neq 0$.
Il existe un unique déplacement du plan qui envoie A sur C et B sur D.
Théorème 2 (p. 100)
Soit A, B, C et D quatre points du plan vérifiant : AB=CD et $AB \neq 0$.
Il existe un unique antidéplacement du plan qui envoie A sur C et B sur D.
Théorème 3 (p. 128)
Si $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{C'D'}$ sont deux vecteurs non nuls, alors il existe une unique similitude directe qui envoie C sur C' et D sur D'.

Les démonstrations de tels théorèmes offrent l'occasion de rencontrer des exemples de stratégies de construction d'applications et de percevoir l'importance dans ces stratégies de la mise en relation des caractéristiques générales de l'application à construire avec les contraintes spécifiques de la situation. Nous analysons à titre d'exemple la démonstration du théorème 1 :

Démonstration du théorème 1

Unicité :
Si f et g sont deux déplacements tels que : $f(A) = g(A) = C$ et $f(B) = g(B) = D$, alors $fog^{-1}(C) = C$ et $fog^{-1}(D) = D$. fog^{-1} est un déplacement qui fixe deux points, donc $fog^{-1} = Id_P$ et par suite $f = g$.

Existence
Soit E le point du plan défini par $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CD}$
Si $\theta \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE})\ [2\pi]$, alors la rotation $R(A, \theta)$ fixe A et envoie B sur E.
La translation $t_{\overrightarrow{AC}}$ envoie A sur C et E sur D.
Le déplacement $t_{\overrightarrow{AC}} o R_{(A,\theta)}$ envoie donc A sur C et B sur D



Outre les notions ensemblistes mises en œuvre (concernant la composition des applications et des propriétés de bijectivité), cette démonstration permet aux élèves de se familiariser avec des techniques et des stratégies de travail concernant les problèmes d'existence et d'unicité d'une application.

Ainsi, pour l'unicité, la stratégie consistant à supposer l'existence de deux applications f et g puis à montrer (dans le cas d'applications bijectives) que $fog^{-1} = Id$ est souvent utilisée dans la réalisation de cette tâche.

Pour l'existence, la stratégie consiste à construire explicitement, par points, un déplacement qui envoie A sur C et B sur D. Tracer les segments [AB] et [CD] dans une situation générale, tenir compte du fait qu'un déplacement est soit une translation, soit une rotation et que la composée de deux déplacements est un déplacement, puis considérer le point E et construire finalement la composée $t_{\overrightarrow{AC}} o R_{(A,\theta)}$, peut ne pas être évident à réaliser pour un élève. Dans le cas où le problème est posé aux élèves, il serait peut être intéressant de commencer par leur demander de traiter les cas particuliers : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ puis A=C, qui conduisent directement respectivement à une translation et une rotation.

Si la lecture de la démonstration ne semble pas poser de difficultés de compréhension pour les élèves, il n'en est pas de même pour les stratégies de travail mises en œuvre pour la réalisation des tâches d'existence et d'unicité. C'est que ces stratégies requièrent de l'expérience et de l'apprentissage, elles correspondent à ce que Castela (2007 b) qualifie de composantes pratiques des technologies associées aux tâches considérées (cf. Chap. I, III). Castela considère que cette composante pratique de l'activité mathématique doit être reconnue comme enjeu d'apprentissage et que l'institution doit assumer la responsabilité didactique d'organiser l'enseignement de tels enjeux et de participer à la construction chez les élèves d'un rapport stratégique à l'activité mathématique. Or, dans notre cas, avec les théorèmes énoncés, les élèves ne sont censés dans les exercices que vérifier les hypothèses des théorèmes puis les appliquer directement. Nous rapportons ci-dessous des exemples de tels exercices :

Exercice 6 (p. 146)

> Dans un plan orienté, on considère carré ABCD de centre O tel que : $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$. On désigne par I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[BC]$.
> 1- a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui envoie A sur C et B sur D. Caractériser f.
> b) Soit g l'antidéplacement qui envoie A sur C et B sur D. Déterminer (gof)(C) et (gof)(D). Caractériser gof.

Exercice 7 (p. 140)

> Soit S une similitude directe différente d'une translation.
> Soit A et B deux points distincts du plan et A' et B' leurs images respectives par S.
> Montrer qu'il existe une similitude directe S' de même centre que S qui transforme A en B et A' en B'.

Analyse des indices de rigidité et de complétude

1) Pour montrer l'existence et l'unicité de la transformation demandée, on applique le théorème correspondant parmi les théorèmes du cours sus-cités (En indiquant que $AB = CD$ et $AB \neq 0$ pour 1-a de l'exercice 6 et que $A \neq A'$, ou $B \neq B'$ pour l'exercice 7 (Car on ne peut avoir à la fois A=A' et B=B'). Notons que dans la plupart des exercices de ce genre, l'existence est implicite (comme dans 1-b de l'exercice 6) et on demande seulement de caractériser la transformation en question. La tâche de caractérisation utilise des techniques stéréotypées se basant sur la classification des transformations donnée dans le cours, ainsi :

- Dans 1-a de l'exercice 6, il est connu qu'un déplacement est soit une translation, soit une rotation, et elles se distinguent par leurs angles. Comme ici l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}})$ est non nul (égal à π), alors le déplacement f est une rotation d'angle π. Si K est son centre, alors K est l'intersection des médiatrices de [AC] et [BD], donc K est le centre O du carré.

- Dans 1-b, gof est un antidéplacement (composée d'un déplacement et d'un antidéplacement) qui laisse fixe deux points (gof(C)=C et gof(D)=D), c'est donc la réflexion d'axe (CD).

- Pour l'exercice 7, si on désigne par $S(\Omega, k, \theta)$ la similitude directe de centre **Ω**, de rapport k et d'angle θ alors, de S(A)=A' et S(B)=B' on déduit que :

$k = \frac{\Omega A'}{\Omega A} = \frac{\Omega B'}{\Omega B}$ et $\theta \equiv (\widehat{\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega A'}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega B'}})\ [2\pi]$,

ce qui donne : $\frac{\Omega B'}{\Omega A'} = \frac{\Omega B}{\Omega A}$ et $(\widehat{\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{\Omega A'}, \overrightarrow{\Omega B'}})\ [2\pi]$

Ceci montre que la similitude S' de centre **Ω**, de rapport $k' = \frac{\Omega B}{\Omega A}$ et d'angle

$\theta' \equiv (\widehat{\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}})\ [2\pi]$ envoie A sur B et A' sur B'.

Ce travail requiert la connaissance de la définition des caractéristiques d'une similitude directe et un travail algébrique sur les fractions et les angles.

2) Nous remarquons l'existence de techniques alternatives pour ce type de tâches. Ainsi, la question 1-a de l'exercice 6 peut être résolue via la transformation complexe associée à f. En effet, en se plaçant dans le repère orthonormé $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$, l'existence de f sera alors associée à l'existence de la transformation complexe associée $\tilde{f} : z \mapsto az + b$. Ce qui ramène le problème à la recherche de deux nombres complexes a et b tel que $\tilde{f}(0)$= 1+i et $\tilde{f}(1)$= i. On trouve alors $\tilde{f} : z \mapsto -z + 1 + i$ comme unique solution du problème, ce qui prouve l'existence et l'unicité de f et permet en conséquence de donner la nature et les éléments caractéristiques de f. De même, pour l'exercice 7, en rapportant le plan à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la détermination de S' peut se ramener à la détermination d'une transformation complexe $\tilde{s} : z \mapsto az + \omega(1 - a)$ (où ω désigne l'affixe du centre de S' qui est le même que celui de S) telle que $\tilde{s}(z_A) = z_B$ et $\tilde{s}(z_{A'}) = z_{B'}$, ce qui donne immédiatement : $a = \frac{z_B - z_{B'}}{z_A - z_{A'}}$ et justifie l'existence de S'.

Cette possibilité d'aller et retour entre les cadres géométrique et complexe des transformations géométriques, où le sujet se trouve contraint à choisir le cadre de travail le mieux adapté à la situation, donne plus d'autonomie à l'élève et l'amène à réfléchir sur les raisons de ses choix. D'un autre côté, ceci constitue un facteur d'articulation entre différentes techniques pouvant être intégrées autour de la technologie relative à l'existence et la caractérisation des transformations géométriques. Or, il semble que l'usage de la méthode décrite dans les exercices 6 et 7, utilisant les théorèmes donnés dans le cours, est systématique dans ce type de tâches. En examinant trois annales tunisiennes d'exercices corrigés destinés aux élèves de Terminales[40], nous avons trouvé que dans les douze questions du même genre

[40] **1)** Sassi J. & Abidi F. (?) : Mathématiques. Exercices et problèmes corrigés. Géométrie. Terminale. Section Maths.
2) Medimagh A. Mathématiques (2001) : Le lauréat en Bac. 4ème année secondaire. Analyse-Géométrie.
3) Bouatay M. (?) : Les annales Horizons. Mathématiques. Tome 2. Classes Terminales. Section Maths

que celles données dans les exercices 6 et 7, la correction est toujours donnée par référence aux théorèmes du cours, ceci même dans les cas où les points considérées dans les exercices sont définis par leurs coordonnées (cf. annexe, p. 3) ou par leurs affixes complexes (cf. annexe, p. 4) et où la méthode complexe pourrait paraître mieux adaptée à la réalisation de la tâche demandée. A notre avis, ceci confine les élèves dans un mode de travail figé, où leur rôle se limite à reproduire de façon mécanique les techniques apprises, et où la marge de réflexion et de prise d'initiatives est très réduite. Malgré l'opportunité que présente ce type de tâche pour familiariser les élèves aux situations de construction d'applications et à un usage plus raisonné des notions fonctionnelles, il s'avère que c'est plutôt le bloc pratico-technique ($[T_1, \tau_1^i]$) qui est mis en avant dans la réalisation des techniques associées aux tâches de type T_3.

❖ **Type de tâches T_4 : Composer des transformations géométriques**

Les principales tâches que nous rencontrons à propos de la composition des transformations géométriques sont les suivantes :

$\mathbf{T_4^1}$: Détermination directe de la nature d'une composée de transformations par application des théorèmes de cours (cf. tableau 5 ci-dessus).

$\mathbf{T_4^2}$: Détermination de la nature d'une composée de transformations via l'étude de certaines propriétés géométriques de la composée.

$\mathbf{T_4^3}$: Détermination de la nature d'une composée de transformations via la détermination de l'expression complexe de la composée et étude de la transformation obtenue.

Nous donnons ci-dessous des exemples d'exercices concernant ces trois tâches :

Exercice 8 (p. 107)

On considère un triangle équilatéral ABC tel que $(\overrightarrow{AB}, \widehat{\ \ }\overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

On note B' le projeté orthogonal de B sur (AC) et Δ la parallèle à (AC) menée par B.

1- Comparer : $S_{(BC)}oS_{(BA)}$ et $S_{\Delta}oS_{(BC)}$

2- Caractériser l'antidéplacement $S_{(CA)}oS_{(BC)}oS_{(BA)}$

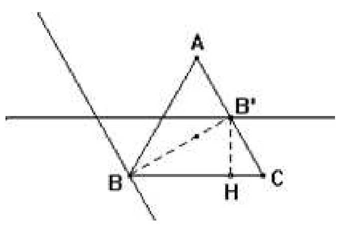
Commentaire

- La réponse à la première question peut être donnée par application directe de la formule de composition de deux symétries orthogonales d'axes sécantes :

Ainsi : $S_{(BC)}oS_{(BA)} = \mathrm{Rot}\left(B, 2(\overrightarrow{BA}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{BC})\right) = R(B, \frac{4\pi}{3}) = R(B, \frac{-2\pi}{3})$

et $S_{\Delta}oS_{(BC)} = \mathrm{Rot}\left(B, 2(\overrightarrow{CB}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{CA})\right) = R(B, \frac{-2\pi}{3})$

d'où l'égalité : $S_{(BC)}oS_{(BA)} = S_{\Delta}oS_{(BC)}$



- Pour caractériser l'antidéplacement $h = S_{(CA)} o S_{(BC)} o S_{(BA)}$, on peut procéder comme suit :

$h = S_{(CA)} o S_{(BC)} o S_{(BA)} = S_{(CA)} o S_{\Delta} o S_{(BC)}$ (d'après 1°)

Les droites Δ et (AC) étant parallèles et telles que : $t_{\overrightarrow{BB'}}(\Delta) = (AC)$, alors la formule de composition de deux symétries orthogonales d'axes parallèles donne : $h = t_{2.\overrightarrow{BB'}} o S_{(BC)}$

Le vecteur $\overrightarrow{BB'}$ étant non orthogonal à la droite (BC), alors h est une symétrie glissante.

Jusqu'à ce niveau de la résolution, les tâches considérées sont toutes de type ($\mathbf{T_4^1}$). Les techniques associées à ces tâches se basent essentiellement sur des théorèmes de cours et sont étroitement dépendantes des objets ostensifs mis en œuvre.

Pour terminer l'exercice, il reste à écrire h sous sa forme réduite pour en déterminer les éléments caractéristiques. Le manuel donne la technique à adopter dans ce cas : il s'agit de décomposer $\overrightarrow{BB'}$ en la somme de deux vecteurs dont l'un est de direction celle de (BC) et l'autre de direction orthogonale, par exemple : $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HB'}$, où H est le projeté orthogonal de B' sur (BC).

On obtient ainsi : $h = t_{2.\overrightarrow{BB'}} o S_{(BC)} = t_{2.\overrightarrow{BH}} o\, t_{2.\overrightarrow{HB'}} o S_{(BC)}$

$\overrightarrow{HB'}$ étant orthogonal à (BC), alors, d'après un théorème du cours, $t_{2.\overrightarrow{HB'}} o S_{(BC)}$ est une symétrie orthogonale. Pour déterminer son axe, le manuel donne la technique suivante :

on décompose la translation $t_{2.\overrightarrow{HB'}}$ en : $t_{2.\overrightarrow{HB'}} = S_{\Delta'} o S_{(BC)}$, où $\Delta' = t_{\overrightarrow{HB'}}((BC))$, ce qui donne :

$t_{2.\overrightarrow{HB'}} o S_{(BC)} = S_{\Delta'} o S_{(BC)} o S_{(BC)} = S_{\Delta'}$

Finalement, on obtient : $h = t_{2.\overrightarrow{BH}} o S_{\Delta'}$.

h est donc la symétrie glissante de vecteur $2.\overrightarrow{HB'}$ et d'axe Δ'.

Dans cette partie de l'exercice, le travail requiert un agencement entre composition et décomposition de transformations, ce genre de travail est souvent utilisé dans la détermination de la nature d'une composée de transformations, nous y reviendrons lors de l'étude du type de tâches T_5. Notons que les techniques utilisées ici sont explicitées de façon détaillée dans le manuel et ceci dans un cadre général.

Exercice 9 (p. 112)

ABCD est un parallélogramme de centre ω. ABO_1, BCO_2, CDO_3 et DAO4 sont des triangles rectangles isocèles de sommets principaux respectifs O_1, O_2, O_3 et O_4. On suppose que le plan est orienté et que $(\overrightarrow{O_1A}, \widehat{\ } \overrightarrow{O_1B}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

On désigne par R_1, R_2, R_3 et R_4 les rotations d'angle $\frac{\pi}{2}$ de centres respectifs O_1, O_2, O_3 et O_4.

1- a) Déterminer $(R_2oR_1)(A)$, $(R_3oR_2)(B)$ et $(R_4oR_3)(C)$

b) Montrer que les applications R_2oR_1, R_3oR_2 et R_4oR_3 sont toutes les trois égales à une même application que l'on déterminera et que l'on désignera par f.

2- a) Montrer que $R_3[R_2(O_1)] = R_2(O_1)$ et déterminer $f(O_1)$

b) Montrer que $f(O_2)=O_4$

c) Quelle est la nature du quadrilatère $O_1O_2O_3O_4$?

3- Soit Δ la médiatrice du segment [AB] et S_Δ la symétrie orthogonale d'axe Δ. On pose $g = R_2oS_\Delta$.

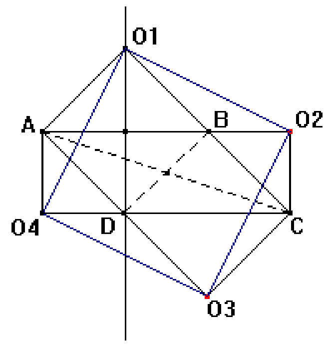
a- Déterminer g(A) et $g(O_1)$

b- Montrer que g n'est pas une symétrie axiale et en déduire la nature de g.

c- Construire le point $\omega' = g(\omega)$. Déterminer les éléments caractéristiques de g

Commentaire

Cet exercice est donné dans l'épreuve de Mathématiques de l'examen de Baccalauréat de 1996 (Section Mathématiques). Une solution complète est donnée dans l'annexe (p. 6). Nous nous intéressons ici particulièrement à la question 3. Cette question utilise la réponse à la question 2-c) selon laquelle le quadrilatère $O_1O_2O_3O_4$ est un carré.



L'objectif de la question 3 est de déterminer la nature de la transformation g. On ne trouve pas dans le manuel de propriété ou de technique permettant de traiter la question de façon directe. Les questions de l'exercice visent à amener le résolveur vers la solution. Pour la question 3-a), en remarquant que O_1 est un point de Δ, un calcul simple donne :

$$g(A) = R_2(S_\Delta(A)) = R_2(B) = C$$

et $g(O_1) = R_2(S_\Delta(O_1)) = R_2(O_1) = O_3$

Pour la question 3-b), si on suppose que g est une symétrie orthogonale d'axe δ, alors, puisque $g(A) = C$ et $g(O_1) = O_3$, δ serait médiatrice de [AC] et de $[O_1O_3]$. Or ces deux segments n'ont pas la même médiatrice, donc g n'est pas une symétrie orthogonale. g est un antidéplacement (composée d'un déplacement et d'un antidéplacement) distinct d'une symétrie orthogonale, c'est donc une symétrie glissante. Comme ω est milieu de [AC] et de $[O_1O_3]$, alors ω appartient à l'axe de g. g s'écrit alors sous forme réduite : $g = t_{\overrightarrow{\omega\omega'}} o S_{(\omega\omega')} = S_{(\omega\omega')} o t_{\overrightarrow{\omega\omega'}}$, où $\omega' = g(\omega)$.

Finalement, g est la symétrie glissante d'axe $(\omega\omega')$ et de vecteur $\overrightarrow{\omega\omega'}$

Dans cet exercice, nous considérons que les tâches relatives à la caractérisation des applications f (questions 1, 2-a, et 2-b) et $g = R_2 o S_\Delta$ (question 3) sont de type $\mathbf{T_4^2}$. Elles se distinguent de la tâche $\mathbf{T_4^1}$ (exercice 8) au niveau de la technique de réalisation. En effet, pour les tâches de type $\mathbf{T_4^2}$, le formulaire de composition de transformations et les techniques standard donnés dans le manuel ne permettent pas à eux seuls de caractériser les transformations en questions. Le sujet est contraint à manipuler de plus près les composées des transformations considérées en utilisant des propriétés ensemblistes de la composée (images de points, éléments invariants, décomposition…). Dans de telles situations, les exercices donnés dans le manuel indiquent la stratégie à adopter pour arriver à la solution.

Exercice 10 (p. 111)

> Le plan P est rapporté à un repère orthonormé $(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$. On désigne par T l'application : $M(z) \mapsto M'(z')$ tel que $z' = -i\bar{z}+1$
> 1- Montrer que T est un antidéplacement[41]
> 2- Montrer que T ne fixe aucun point
> 3- Montrer que ToT est une translation et préciser son vecteur
> 4- Soit t la translation de vecteur $\frac{1}{2}(\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2})$. Montrer que $Tot^{-1} = t^{-1}oT = S_D$, où D est une droite que l'on précisera. En déduire les éléments caractéristiques de T.

Commentaire

Cet exercice vise à caractériser la transformation T définie à l'aide de son expression complexe. Les questions posées donnent les étapes de la stratégie à adopter. A notre avis, les propriétés données dans le manuel à propos des antidéplacements donnent à l'élève les moyens pour qu'il construise tout seul une stratégie de travail. Une manière de procéder est la suivante :

- T est un antidéplacement, donc T est soit une symétrie orthogonale, soit une symétrie glissante. Les deux se distinguent par l'ensemble des points invariants (une droite pour la première et l'ensemble vide pour la deuxième). D'où l'idée de déterminer cet ensemble.

- La résolution de l'équation $z = -i\bar{z}+1$ donne 0 solution. Donc T est une symétrie glissante. En désignant par $\vec{u}$ le vecteur de T et par D son axe, T s'écrit alors sous forme réduite : $T = t_{\vec{u}} o S_D = S_D o t_{\vec{u}}$.

- Pour déterminer $\vec{u}$, on peut chercher à écrire une relation fonctionnelle où l'on élimine S_D. La commutativité de l'écriture de T sous forme réduite pourrait suggérer de considérer : $ToT = t_{\vec{u}} o S_D o S_D o t_{\vec{u}} = t_{2.\vec{u}}$.

- L'écriture complexe de ToT, donne l'affixe de $2.\vec{u}$: $z = -i+1$,

d'où $\vec{u}$ est le vecteur d'affixe : $z = \frac{1}{2}(-i+1)$, c'est-à-dire : $\vec{u} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2})$.

---

[41] Les transformations complexes de la forme $z \mapsto z' = a\bar{z}+b$ ne sont pas étudiées dans le cours de la classe Terminale Mathématiques.

- Finalement, pour trouver D, on revient à $T = t_{\vec{u}} o S_D$, et on compose par $t_{\vec{u}}^{-1}$ dans les deux membres, ce qui donne : $t_{-\vec{u}} o T = S_D$.

De l'expression complexe de S_D, on détermine l'ensemble des points invariants par S_D, et on obtient la droite D.

Construire cette stratégie conduit à réfléchir quant aux possibilités d'intervention des propriétés de composition et de décomposition d'applications dans la caractérisation de T et à prendre conscience de l'intérêt que représentent ces propriétés dans la réalisation de la tâche considérée. Or, comme dans l'exercice précédent, l'indication des pas de la stratégie de résolution réduit le rôle du résolveur à la réalisation de calcul et à la vérification de propriétés données, ce que l'élève peut effectuer sans réfléchir aux éléments sous-jacents à la construction de la stratégie de travail, ni se soucier de la manière avec laquelle les propriétés fonctionnelles sont intervenues dans la construction de cette stratégie.

Analyse des indices de rigidité et de complétude pour le type de tâches T_4

En nous référons aux techniques associées aux tâches de type T_4 et aux modes d'intervention des technologies, nous distinguons deux types de praxéologies mathématiques concernant la composition des transformations géométriques :

1) Pour le premier type, les techniques sont étroitement liées aux objets ostensifs mis en œuvre. Dans ce cas la tâche peut être réalisée sans se soucier des propriétés ensemblistes sous-jacentes à l'opération de composition et sans avoir besoin de se référer à la technologie pour interpréter ou justifier la technique utilisée. Comme, par exemples, dans les cas suivants :

$R(D,\frac{3\pi}{4}) o H(D,-\sqrt{2}) = S(D,-\sqrt{2},\frac{3\pi}{4})$

$S_{(BC)} o S_{(BA)} = \mathrm{Rot}\left(B, 2(\overrightarrow{BA}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{BC})\right) = R(B,\frac{4\pi}{3})$

$S_{(CA)} o S_{\Delta} o S_{(BC)} = t_{2.\overrightarrow{BB'}} o S_{(BC)}$, où $(AC) = t_{\overrightarrow{BB'}}(\Delta)$

…

Pour ce type de praxéologies, c'est le bloc pratico-technique qui est mis en œuvre dans la réalisation des tâches et nous remarquons une différence entre le discours technologique utilisé dans le manuel pour justifier les formules établies et le niveau de mise en fonctionnement (technique) de ces formules dans les exercices.

2) Dans le deuxième type de praxéologies mathématiques, les techniques utilisées requièrent le choix d'une stratégie de travail prenant en compte des propriétés liées aux transformations géométriques et d'autres liées aux propriétés de composition d'applications. La mise en œuvre de ces praxéologies mathématiques dans les exercices conduit à réfléchir aux techniques choisies et à faire intervenir les technologies appropriées pour interpréter et/ou justifier les

techniques ou la stratégie adoptée. Ceci met en œuvre des praxéologies mathématiques locales. Néanmoins, dans le manuel, la stratégie à adopter dans de telles situations est généralement fixée et décrite dans l'exercice (comme dans le cas des exercices 9 et 10) et on ne demande à l'élève que de réaliser les sous-tâches constituant la stratégie. Ceci, à notre avis, réduit les possibilités de mettre en fonctionnement le bloc technologico-théorique des praxéologies ou le niveau structurel des connaissances chez les élèves.

❖ **Type de tâches T_5 : Décomposer des transformations géométriques**

Ce type de tâches est inverse à celui de la composition des transformations géométriques. Généralement, les deux types de tâches interviennent dans les exercices où il s'agit de déterminer la nature ou les éléments caractéristiques de transformations géométriques, nous les rencontrons souvent ensemble dans de tels exercices, comme dans les exercices 8, 9 et 10 ci-dessus. Nous donnons ci-dessous un autre exemple de telles situations.

Exercice 11 (p. 106)

Dans le plan orienté, on considère de part et d'autre d'un segment [AB], deux triangles AMB et ANB tels que AMB est un triangle équilatéral vérifiant : $(\overrightarrow{MA}\,\hat{,}\,\overrightarrow{MB}) \equiv \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$, ANB est un triangle isocèle vérifiant NA=NB et $(\overrightarrow{NA}\,\hat{,}\,\overrightarrow{NB}) \equiv -\frac{\pi}{6}\,[2\pi]$

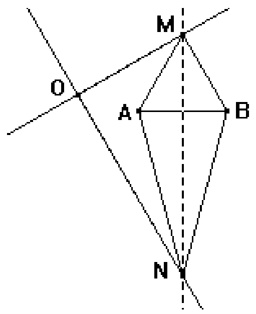
On désigne par $S_{(MA)}$, $S_{(MB)}$, $S_{(NA)}$ et $S_{(NB)}$ les symétries orthogonales d'axes respectifs : (MA), (MB), (NA) et (NB).

On pose $f = S_{(MA)} o S_{(MB)} o S_{(NB)} o S_{(NA)}$

1- Déterminer la nature de f et ses éléments caractéristiques

2- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f, lorsque $(\overrightarrow{NA}\,\hat{,}\,\overrightarrow{NB}) \equiv -\frac{2\pi}{3}\,[2\pi]$

Commentaire



1) Pour la première question, les formules de composition des symétries orthogonales permettent d'écrire :

$f = R_{(M,\frac{-2\pi}{3})} o R_{(N,\frac{-\pi}{3})}$

La somme des angles des rotations composant f étant égal à $-\pi$, alors f est une symétrie centrale.

Pour déterminer le centre de f, la technique souvent utilisée dans les annales d'exercices corrigés consiste à décomposer chacune des rotations $R_{(M,\frac{-2\pi}{3})}$ et $R_{(N,\frac{-\pi}{3})}$ en deux symétries orthogonales convenablement choisies.

Plus précisément, en considérant le triangle MON rectangle en O et tel que :

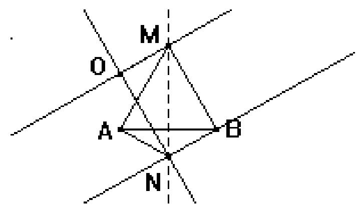
$(\overrightarrow{MO}\,\hat{,}\,\overrightarrow{MN}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$, on obtient :

$R_{(M,\frac{-2\pi}{3})} = S_{(MO)} o S_{(MN)}$ et $R_{(N,\frac{-\pi}{3})} = S_{(MN)} o S_{(NO)}$

Soit : $f = S_{(MO)} o S_{(MN)} o S_{(MN)} o S_{(NO)} = S_{(MO)} o S_{(NO)} = S_O$

2) Dans le cas où $(\overrightarrow{NA} \hat{,} \overrightarrow{NB}) \equiv -\frac{2\pi}{3} [2\pi]$, on obtient : $f = R_{(M, \frac{-2\pi}{3})} o R_{(N, \frac{2\pi}{3})}$.

La somme des angles des rotations composant f étant nul, f est donc une translation.



Pour déterminer son vecteur, on peut décomposer les rotations $R_{(M, \frac{-2\pi}{3})}$ et $R_{(N, \frac{2\pi}{3})}$ et obtenir :

$f = S_{(MO)} o S_{(MN)} o S_{(MN)} o S_{(NB)} = S_{(MO)} o S_{(NB)}$

Les droites (MO) et (NB) étant parallèles (toutes deux perpendiculaires à (MB)), alors $f = t_{2.\overrightarrow{BM}}$.

Remarquons que d'autres techniques restent aussi possibles pour déterminer le centre de la symétrie f dans la première question (on peut par exemple chercher l'image du point N par f) et le vecteur de la translation dans la deuxième question (on cherche par exemple l'image du point B par f). Ces techniques demandent un travail sur les configurations géométriques considérées, qui, dans certains cas, peut paraître moins évident que la technique de décomposition.

Analyse des indices de rigidité et de complétude pour le type de tâches T_5

Les techniques associées aux tâches de décomposition utilisent les formules de composition des transformations géométriques en sens inverse (comme le montre les tâches de décomposition intervenant dans les exercices 8 à 11). Elles sont, de ce fait, étroitement liées aux objets ostensifs mis en jeu, désignant les transformations ou leurs éléments caractéristiques. La réalisation de ces techniques demande d'effectuer des choix convenables concernant les caractéristiques géométriques des transformations considérées pour pouvoir appliquer les formules de composition/décomposition concernées. L'identification de ces caractéristiques géométriques n'est pas toujours évidente et demande parfois la mobilisation de connaissances non indiquées. Notons aussi que dans les situations où intervient la tâche de décomposition, il revient souvent à l'élève d'identifier le type de décomposition appropriée à réaliser, ceci demande la possibilité de mettre en relation et d'organiser les connaissances relatives aux opérations de décomposition et d'effectuer le choix adapté à la situation géométrique de l'exercice à résoudre. Les praxéologies mathématiques mises en œuvre dans ces cas nous semblent de ce fait d'un niveau local.

Ceci étant, nous remarquons par ailleurs que malgré l'existence de théorèmes généraux autour desquels s'articulent les technologies associées aux tâches de composition et de décomposition des transformations géométriques[42], dont les démonstrations font intervenir

[42] Notamment les théorèmes suivants :
1) *Toute isométrie du plan est la composée d'au plus trois symétries orthogonales*

des connaissances géométriques et fonctionnelles d'un niveau structurel, les justifications technologiques requises dans la réalisation des tâches de types T_4 et T_5 sont spécifiques aux caractéristiques géométriques des transformations considérées, l'aspect ensembliste-fonctionnel sous-jacent aux opérations de décomposition demeure invisible dans ce genre de travail. Ceci marque un écart entre le discours technologique mis en œuvre dans les développements théoriques du cours et celui que requiert la résolution des exercices destinés aux élèves.

❖ **Type de tâches T_6 : Mettre en œuvre des transformations géométriques dans des questions de géométrie.**

Ce type de tâches concerne les tâches où sont utilisées les transformations géométriques comme outil pour résoudre des questions de géométrie. Il regroupe une grande variété de tâches mettant en œuvre différentes techniques. Nous nous intéressons ici particulièrement aux manières avec lesquelles seront mobilisées les transformations géométriques dans la réalisation des tâches de ce type, plus précisément nous regardons si la transformation géométrique à mobiliser est explicitée dans l'exercice ou laissée à la charge de l'élève. Nous étudions pour cela trois exercices de géométrie donnés dans des épreuves de baccalauréat[43]. Après l'analyse détaillé de deux de ces exercices, nous commentons les trois exercices, d'une part du point de vue des indices de rigidité et de complétude du type de tâche T_6, et d'autre part du point de vue du niveau de mise en fonctionnement des connaissances concernant les différents types de tâches intervenant dans ces exercices. Ceci nous fournira une idée quant au niveau requis par l'institution concernant l'usage des notions ensemblistes fonctionnelles pour l'entrée à l'Université.

Exercice 12 (Exercice 1 de l'examen du Baccalauréat, session de juin 2005)

Soit ABC un triangle rectangle en B tel que : $(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$, $AB = 3$ et $BC = 4$.

1) Soit f la similitude directe telle que $f(A) = B$ et $f(B) = C$
   a- Déterminer l'angle et le rapport de f
   b- Soit H le projeté orthogonal de B sur (AC)
   Montrer que H est le centre de f.
2) Soit $D = f(C)$.
   a- Montrer que D appartient à la droite (BH).
   b- Construire le point D.
3) Soit g la similitude indirecte qui transforme A en B et B en C. On désigne par Ω le centre de g.
   a- Montrer que $fog^{-1} = S_{(BC)}$
   b- Soit $E = g(C)$. Déterminer $S_{(BC)}(E)$. Construire alors le point E.
   c- Préciser la nature de gog. Montrer que Ω appartient à la droite (AC) ainsi qu'à la droite (BE).
   d- Construire le point Ω et l'axe Δ de la similitude g.

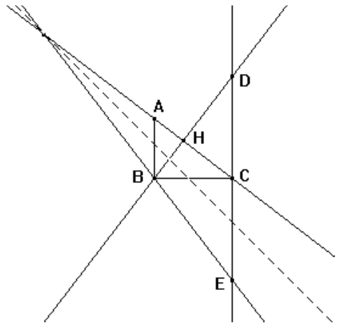
2) *Les similitudes sont les composées des isométries et des homothéties*

[43] Baccalauréat tunisien. Section Mathématiques.

Analyse praxéologique

1) Pour la question 1-a), de $f(A)=B$ et $f(B)=C$ et en utilisant les définitions de l'angle et du rapport de f on obtient immédiatement :

$\alpha \equiv (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ et $k = \frac{BC}{AB}$.



Il s'agit d'une tâche de type T_1, de niveau[44] technique.

2) La question 1-b) est aussi de type T_1, elle vise à identifier le centre de la similitude f. L'élève doit justifier que ce centre est confondu avec H.

Nous indiquons deux techniques possibles :

Désignons par ω le centre de f,

tech₁ : De $f(A)=B$ et $f(B)=C$, on obtient : $(\widehat{\overrightarrow{\omega A}, \overrightarrow{\omega B}}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ et $(\widehat{\overrightarrow{\omega B}, \overrightarrow{\omega C}}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

ω est donc le point d'intersection (autre que B, car $f(B) \neq B$) de demi-cercles passant par H et de diamètres respectifs [AB] et [BC], c'est-à-dire $\omega = H$.

tech₁ : De $f(A)=B$ et $f(B)=C$, on obtient : $(\widehat{\overrightarrow{\omega A}, \overrightarrow{\omega B}}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ et $(\widehat{\overrightarrow{\omega B}, \overrightarrow{\omega C}}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$,

donc : $(\widehat{\overrightarrow{\omega A}, \overrightarrow{\omega C}}) \equiv \pi [2\pi]$ et par suite $\omega \in (AC)$.

D'autre part : $(\widehat{\overrightarrow{\omega B}, \overrightarrow{\omega C}}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ indique que $(\omega B) \perp (\omega C)$ et donc $(\omega B) \perp (AC)$

De $(\omega B) \perp (AC)$ et $\omega \in (AC)$, on déduit que $\omega = H$

La réponse à cette question demande un choix de technique et une organisation des connaissances mises en jeu. Toutefois, la donnée du point H diminue la difficulté de la tâche. Nous considérons pour cela qu'il s'agit d'une tâche de niveau mobilisable.

3) Dans la question 2-a), la tâche est de type T_6. Il s'agit de montrer que l'image D de C par f appartient à la droite (HB). Le contexte de l'exercice suggère d'utiliser les caractéristiques de l'application f. En effet, f étant de centre H et d'angle $\frac{\pi}{2}$, alors :

$f(C)=D$ implique que $(HD) \perp (HC)$,

et $f(B)=C$ implique que $(HB) \perp (HC)$,

d'où $(HB) // (HD)$ et H, B et D sont alignés.

Il est possible aussi d'effectuer un travail sur les angles :

$(\widehat{\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HD}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC}}) + (\widehat{\overrightarrow{HC}, \overrightarrow{HD}}) \equiv \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \equiv \pi \ [2\pi]$

[44] Dans cette analyse, nous désignons par niveau, le niveau de mise en fonctionnement des connaissances (technique, mobilisable, disponible) (Robert, 1998) que requiert la résolution de la question considérée.

L'élève ici est autonome, il doit fixer une technique de travail et s'adapter au contexte de l'exercice en mobilisant l'application f. Nous considérons pour cela que la tâche est de niveau disponible.

4) La tâche 2-b) est de type T_6, elle consiste à construire le point $D = f(C)$.
Pour ce faire, on définit D comme intersection de deux ensembles.
On sait déjà que $D \in (HB)$.
D'autre part : $f(C) = D$ et $f(B) = C$ impliquent que $(BC) \perp (CD)$. Donc D appartient à la droite δ, perpendiculaire à (BC) passant par C.

(HB) et δ étant sécantes, D est donc leur point d'intersection.

Pour réaliser cette tâche, l'élève est appelé à fixer une technique de travail. La question précédente donne une première indication et suggère de mobiliser l'application f. Ceci facilite la réalisation de la tâche. Nous considérons pour cela que cette tâche est de niveau mobilisable.

5) La question 3-a) concerne la composition de transformations, elle est de type T_4. La tâche consiste à montrer l'égalité : $fog^{-1} = S_{(BC)}$, où g est la similitude indirecte telle que $g(A) = B$ et $g(B) = C$.

L'élève pourrait penser à étudier séparément la nature de fog^{-1}, mais la donnée de $S_{(BC)}$ oriente la tâche. Il suffit alors de remarquer que fog^{-1} et $S_{(BC)}$ sont deux similitudes indirectes ; elles seront alors égales dès qu'elles coïncident sur deux points distincts. Le choix de ces deux points ne pose pas de difficulté, puisque le texte donne : $g(A) = B$ et $g(B) = C$. Un calcul simple donne alors :
$fog^{-1}(B) = f(A) = B = S_{(BC)}(B)$ et $fog^{-1}(C) = f(B) = C = S_{(BC)}(C)$. Le résultat en découle.

La réponse à cette question demande d'effectuer des choix non indiqués et une mise en relations de plusieurs données. L'élève ici est autonome. Nous considérons pour cela que la tâche est de niveau disponible.

6) La question 3-b) vise la construction du point $E = g(C)$, elle est de type T_6. La tâche peut, a priori, paraitre non évidente, du fait qu'on ne dispose pas encore du centre et de l'axe de la similitude indirecte g. Néanmoins, l'indication demandant de déterminer d'abord $S_{(BC)}(E)$ ($S_{(BC)}(E) = S_{(BC)}\big(g(C)\big) = S_{(BC)}og(C) = f(C) = D$) oriente la tâche et permet de conclure que E et D sont symétriques par rapport à (BC). D'où la construction de E. Pour cette tâche, même si le texte donne une indication pour sa réalisation, l'élève doit savoir l'exploiter adéquatement. Nous considérons pour cela qu'il s'agit d'une tâche de niveau mobilisable.

7) La question 3-c) concerne la composition et la décomposition de transformations, elle est de type T_4/T_5. La tâche consiste à préciser la nature de gog. g étant une similitude indirecte, alors gog est une similitude directe. En désignant par Ω, k et Δ respectivement, le centre, le rapport et l'axe de g, alors g s'écrit sous forme réduite : $g = h_{(\Omega,k)}oS_{\Delta} = S_{\Delta}oh_{(\Omega,k)}$

D’où : $gog = h_{(\Omega,k)} o S_\Delta o S_\Delta o h_{(\Omega,k)} = h_{(\Omega,k^2)}$

Cette question ne fournit pas d’indications pour déterminer la nature de gog. Le sujet est autonome, il doit réfléchir seul à une technique de résolution. Décomposer dans un contexte général g sous forme réduite et utiliser la commutativité de cette décomposition pour éliminer S_Δ et simplifier le calcul de gog requiert, nous semble-t-il, une disponibilité de connaissances et une possibilité de se détacher du contexte particulier de l’exercice et de travailler dans un cadre général. Nous considérons pour cela que la tâche est de niveau disponible.

8) La question 3-c’) est de type T_6. La tâche consiste à montrer que le centre Ω de g appartient à la fois à (AC) et à (BE). La première partie de la question suggère d’utiliser le fait que Ω est le centre de l’homothétie gog.
On a : $gog(A) = g(B) = C$, donc $\Omega \in (AC)$,
et $gog(B) = g(C) = E$, donc $\Omega \in (BE)$, d’où le résultat.
Cette tâche demande de mobiliser la transformation adéquate et de mettre en relation différentes connaissances. Toutefois, l’indication fournie par la première partie de la question réduit la difficulté de la tâche. Nous considérons que la tâche est de niveau mobilisable.

9) La question 3-d) est aussi de type T_6. La tâche consiste à construire le centre Ω et l’axe Δ de g. La question précédente indique que Ω est le point d’intersection des droites (AC) et (BE), et puisque $g(A) = B$, alors une propriété du cours indique que Δ est la bissectrice intérieure du secteur $(\overrightarrow{\omega A}, \overrightarrow{\omega B})$. Il s’agit d’applications directes d’un résultat antérieurement établi et d’une propriété de cours. La tâche est donc de niveau technique.

Le tableau ci-dessous résume les types de tâches intervenant dans l’exercice, ainsi que le niveau de mise en fonctionnement des connaissances que requiert la résolution de chacune des taches :

Tableau 9 : Niveaux de mise en fonctionnement des connaissances pour l’exercice 12

Question	Type de tâches	Niveau de mise en fonctionnement des connaissances
1-a	T_1	technique
1-b	T_1	mobilisable
2-a	T_6	disponible
2-b	T_6	mobilisable
3-a	T_4	disponible
3-b	T_6	mobilisable
3-c	T_4/T_5	disponible
3-c’	T_6	mobilisable
3-d	T_6	technique

Exercice 13 (Exercice 2 de l'examen du Baccalauréat, session de juin 2003)

Soit ABC un triangle rectangle en C tel que : $(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$, et soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Soit $D = r(C)$ et $E = r^{-1}(B)$. On désigne par I le milieu du segment [CD]

1) a- Montrer qu'il existe un unique déplacement f tel que $f(A) = D$ et $f(C) = A$.
   b- Préciser la nature et les éléments caractéristiques de f.
2) Soit $g = f o r$
   a- Montrer que g est une translation
   b- Soit $F = g(E)$. Montrer que $f(B) = F$ et en déduire la nature du triangle BIF.
   c- Montrer que les points C, A et F sont alignés.
3) Soit $G = t_{\overrightarrow{AD}}(I)$, où $t_{\overrightarrow{AD}}$ désigne la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$
   a- Montrer qu'il existe un unique antidéplacement φ tel que $\varphi(C) = D$ et $\varphi(I) = G$.
   b- Montrer que φ est une symétrie glissante dont on précisera le vecteur et l'axe.

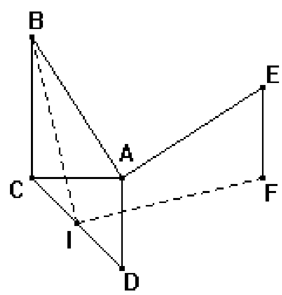
Analyse praxéologique

1) La question 1-a) est de type T_3. Le théorème 1 cité à propos de ce type de tâches permet de conclure quant à l'existence et l'unicité du déplacement f. Il suffit de remarquer que l'on a : $A \neq C$ et $AC = AD$ (car $r(C) = D$). Il s'agit d'une tâche de niveau technique.

2) La question 1-b) est de type T_1. D'après la classification des déplacements du plan, f est soit une translation, soit une rotation. Puisque $f(A) = D$, $f(C) = A$ et $\overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{DA}$, alors f est une rotation d'angle $(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{DA}})$ et dont le centre est le point d'intersection des médiatrices respectives des segments : [AD] et [AC], c'est le point I. D'où $f = r_{(I,-\frac{\pi}{2})}$.

Il s'agit d'une tâche routinière. Nous la considérons de niveau technique.

3) La question 2-a) est de type T_4. Pour y répondre, il suffit d'utiliser le formulaire sur la composition des transformations géométriques. $g = f o r$ est la composée de deux rotations dont la somme des angles est nul, c'est donc une translation. Il s'agit d'une tâche de niveau technique.



4) La question 2-b) vise à préciser la nature du triangle BIF. C'est une tâche de type T_6. Pour faciliter la réalisation de la tâche, on demande d'abord de montrer que $f(B) = F$, ce qui s'obtient par un calcul simple : $f(B) = f(r(E)) = g(E) = F$. Ainsi, F est l'image de B par une rotation de centre I et d'angle $-\frac{\pi}{2}$, donc FIB est un triangle rectangle et isocèle en I.

La mise en fonctionnement de l'application f pour la réalisation de la tâche étant indiquée et les applications à effectuer étant immédiates, nous considérons que la tâche est de niveau technique.

5) La question 2-c) a pour objectif de montrer que les points C, A et F sont alignés. C'est une tâche de type T_6. Aucune indication n'est donnée pour la réalisation de cette tâche. on peut

par exemple procéder come suit : De $f(C) = A$ et $f(B) = F$, on déduit que $(BC) \perp (AF)$ (puisque f est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$) et comme $(BC) \perp (AC)$, alors (AF) et (AC) sont parallèles et par suite C, A et F sont alignés. Il est possible aussi d'effectuer un calcul sur les angles et montrer que l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AF}})$ est nul.

L'élève ici est autonome, il doit fixer une technique de travail et s'adapter au contexte de l'exercice en mobilisant la transformation f. Nous considérons pour cela que la tâche est de niveau disponible.

6) La question 3-a) est de type T_3. On utilise le théorème 3 cité à propos de ce type de tâches. Pour cela on remarque d'une part que :

$G = t_{\overrightarrow{AD}}(I) \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{IG} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IG}$

Et d'autre part, $r(C) = D$ implique que le triangle ACD est rectangle isocèle, donc $CI = AI$

Ainsi, $I \neq C$ **et** $CI = AI = DG$

Le théorème indiqué permet alors de conclure quant à l'existence et l'unicité de l'antidéplacement φ. Il s'agit d'une tâche routinière, et les conditions à réunir pour appliquer le théorème concerné sont faciles à fournir. Nous considérons pour cela que la tâche est de niveau technique.

7) La question 3-b) est de type T_1. Il s'agit de justifier que φ est une symétrie glissante et de préciser ses éléments caractéristiques. La technique associée à T_1 consiste à remarquer que φ, étant un antidéplacement, est soit une symétrie orthogonale soit une symétrie glissante. On a : $\varphi(C) = D$, $\varphi(I) = G$ et les médiatrices de [CD] et [IG] sont distinctes. Donc φ ne peut être une symétrie orthogonale, c'est donc une symétrie glissante. L'axe Δ de φ passe par le milieu I de [CD]. Si $\vec{u}$ est le vecteur de φ, alors $\varphi(I) = t_{\vec{u}} o S_{\Delta}(I) = t_{\vec{u}}(I) = G$, d'où $\vec{u} = \overrightarrow{IG}$.

φ est donc d'axe (IG) et de vecteur $\overrightarrow{IG}$.

Cette tâche requiert une certaine organisation et une mise en relation concernant les données de l'exercice et les connaissances relatives aux antidéplacements. La stratégie générale est néanmoins routinière en classe terminale, il reste à l'élève à l'adapter à la situation de l'exercice. Pour cela, nous considérons que la question est d'un niveau mobilisable.

Le tableau ci-dessous résume les types de tâches intervenant dans l'exercice, ainsi que le niveau de mise en fonctionnement des connaissances que requiert la résolution de chacune des taches :

Tableau 10 : Niveaux de mise en fonctionnement des connaissances pour l'exercice 13

Question	Type de tâches	Niveau de mise en fonctionnement des connaissances
1-a	T_3	technique
1-b	T_1	technique
2-a	T_4	technique
2-b	T_6	technique
2-c	T_6	disponible
3-a	T_3	technique
3-b	T_1	mobilisable

Exercice 14 (Exercice 1 de l'examen du Baccalauréat, session de juin 2004)

Dans le plan orienté, on considère un rectangle OABC tel que OA=2.OC et : $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. La médiatrice Δ du segment [OB] coupe la droite (OA) en I et la droite (OC) en I'. Soit J le symétrique du point O par rapport au point I et J' le symétrique du point O par rapport à I'

1) a- Montrer que les triangles OBJ et OBJ' sont rectangles en B.
   b- En déduire que les points B, J et J' sont alignés.
2) Soit S la similitude directe telle que $S(J) = O$ et $S(O) = J'$.
   a- Déterminer une mesure de l'angle de S
   b- Montrer que le point B est le centre de la similitude S.
   c- Donner le rapport de la similitude S.
3) Soit σ la similitude indirecte telle que $\sigma(J) = O$ et $\sigma(O) = J'$.
   a- Donner le rapport de σ.
   b- En déduire que la similitude σ admet un unique point invariant que l'on notera Ω.
   c- Déterminer $\sigma o \sigma(J)$
   d- En déduire que le point Ω appartient à la droite (JJ').
   e- Construire le point Ω ainsi que l'axe D de la similitude σ.

Commentaire

Cet exercice a pour objectif d'étudier les éléments caractéristiques de deux similitudes données. Nous nous limitons pour cet exercice à la donnée du tableau récapitulant les types de tâches intervenant dans l'exercice et le niveau de mise en fonctionnement des connaissances que requiert la résolution de l'exercice. Les tâches intervenant dans les questions 1-a et 1-b ne font pas intervenir des transformations géométriques. Nous les désignons par T_0.

Tableau 11 : Niveaux de mise en fonctionnement des connaissances pour l'exercice 14

Question	Type de tâches	Niveau de mise en fonctionnement des connaissances
1-a	T_0	mobilisable
1-b	T_0	mobilisable
2-a	T_1	technique
2-b	T_1	mobilisable
2-c	T_1	disponible
3-a	T_1	technique
3-b	T_1	technique
3-c	T_4/T_5	technique
3-d	T_6	disponible
3-e	T_6	mobilisable

Commentaire concernant les exercices 12, 13 et14

Dans les trois exercices donnés dans des examens de Baccalauréat, les tâches de type T_6 occupent une part plus ou moins importante dans l'ensemble des tâches que renferme chacun des exercices (5 sur 9 dans l'exercice 12, 2 sur 7 dans l'exercice 13 et 2 sur 9 dans l'exercice 14). La réalisation des tâches considérées utilisent des techniques de différents niveaux de mise en fonctionnement des connaissances. Néanmoins, les difficultés que représentent certaines de ces techniques sont liées à la situation géométrique de l'exercice plutôt qu'à l'usage des transformations géométriques. Dans la plupart des cas, la transformation géométrique et/ou la propriété fonctionnelle à mobiliser est indiquée dans l'exercice, ce qui réduit le travail des élèves à l'application de techniques indiquées et limite chez eux les possibilités de réfléchir quant aux manières avec lesquelles interviennent les transformations géométriques dans la résolution des questions de géométrie. Ceci, à notre avis, rend difficile l'articulation des techniques considérées autour de praxéologies locales, et rend aussi difficile la disponibilité des connaissances relatives à l'usage des transformations géométriques.

Ceci étant, l'analyse générale des trois exercices montre que les tâches intervenant dans ces exercices sont toujours fermées et ne débordent pas le cadre des types de tâches T_1 à T_6 recensés dans le manuel officiel. Ces exercices, donnés au Baccalauréat dans trois années successives, se caractérisent par une grande ressemblance du point de vue des tâches considérées, de l'indication des techniques à adopter, ainsi que des niveaux de mise en fonctionnement des connaissances. Ceci, naturellement, incite les élèves comme les enseignants, à focaliser leur travail en classe Terminale sur la résolution d'exercices similaires, ce qui amène à routiniser les techniques mises en œuvre dans la réalisation des tâches et à réduire les possibilités d'usage des connaissances à un niveau disponible ou structurel.

❖ **Type de tâches T_7 : Etudier et/ou utiliser la propriété de bijectivité**

Pour ce type de tâche, nous nous ne limitons pas aux transformations géométriques, car en Terminale il y a un autre habitat où est travaillée la propriété de bijectivité, celui de l'étude des fonctions d'une variable réelle.

Comme nous l'avons remarqué dans (IV. 2. 3), l'usage de la notion de bijectivité dans les exercices de géométrie se limite aux deux propriétés suivantes :

- si *f* est bijective, $N = f(M) \Leftrightarrow M = f^{-1}(N)$
- Pour une bijection *f* de *P* sur *P*, $fof^{-1} = id_P$

L'étude de la propriété de bijectivité pour les transformations géométriques et la détermination des bijections réciproques de ces transformations étant réalisés dans le cours, la mise en œuvre des propriétés sus-citées dans les exercices se limite aux trois tâches suivantes :

$\mathbf{T_7^1}$: Calcul de l'antécédent d'un point (par exemple : $g(A) = B$, donc $g^{-1}(B) = A$)

$\mathbf{T_7^2}$: Réduction d'une composée de transformations géométriques

(par exemple : $S_D^{-1} = S_D$, donc $ToT = t_{\vec{u}} o S_D o S_D o t_{\vec{u}} = t_{2.\vec{u}}$)

$\mathbf{T_7^3}$: Détermination d'une transformation (par exemple : $T = t_{\vec{u}} o S_D$, donc $t_{-\vec{u}} o T = S_D$)

Les exercices 8, 10, 11, 12, 13 et 14, analysés ci-dessus donnent des exemples de tâches où interviennent ces propriétés.

Nous nous intéressons ici particulièrement aux praxéologie mathématiques relatives à l'enseignement de la notion de bijection pour les fonctions numériques d'une variable réelle. Nous rappelons dans ce contexte que dans le domaine de l'analyse, l'étude et/ou l'usage de la propriété de bijectivité se limite aux fonctions numériques continues et strictement monotones sur un intervalle I de **R**. Les tâches de type T_7 mises en œuvre à propos de ce type de fonctions sont les suivantes :

$\mathbf{T_7^4}$: Montrer qu'une fonction est bijective

$\mathbf{T_7^5}$: Déterminer la bijection réciproque d'une fonction bijective

$\mathbf{T_7^6}$: Tracer la courbe représentative d'une fonction bijective

$\mathbf{T_7^7}$: Montrer qu'une équation de la forme $f(x) = 0$ (ou se ramenant à cette forme) admet une solution unique dans un intervalle I donné.

Nous désignons dans la suite par $\boldsymbol{tech_7^i}$, la technique associée à la tâche $\mathbf{T_7^i}$. Nous étudions les différentes techniques $\boldsymbol{tech_7^i}$, pour $i \in \{4,5,6,7\}$, à travers des extraits de quatre problèmes d'analyse posés dans des examens de Baccalauréat[45]. Nous nous sommes limités dans ces extraits aux parties des problèmes où intervient l'une des quatre tâches indiquées ci-dessus.

Exercice 15 (Extrait du problème d'analyse de l'examen du Baccalauréat, session de juin 2004)

A- On considère la fonction f_1 définie sur $[-1,+\infty[$ par $f_1(x) = \sqrt{1+x}\, e^{-x}$ et on désigne par C_1 sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a- Etudier la dérivabilité de f_1 à droite de -1
   b- Interpréter graphiquement le résultat obtenu
   c- Calculer la limite de f_1 en $+\infty$
   d- Interpréter graphiquement le résultat obtenu
2) Dresser le tableau de variation de f_1
3) Donner l'équation de la tangente à C_1 au point d'abscisse 0.
4) Montrer que l'équation $f_1(x) = x$ admet une unique solution α dans $[\frac{-1}{2},+\infty[$ et que $\alpha \in]\frac{-1}{2}, 1[$
5) Tracer la courbe C_1

[45] Il s'agit toujours du Baccalauréat tunisien, section Mathématiques. Les énoncés complets des problèmes d'où sont extraits les exercices sont dans l'annexe.

Commentaire

L'objectif de cette partie du problème est l'étude de la fonction f_1 donnée.

La fonction dérivée de f_1 est définie sur $]-1,+\infty[$ par : $f_1^{'}(x) = \dfrac{-2x-1}{2e^x\sqrt{1+x}}$

f_1 est strictement croissante sur $[-1,-\frac{1}{2}]$ de 0 vers $\sqrt{\frac{e}{2}}$ et strictement décroissante sur $[-\frac{1}{2},+\infty[$ de $\sqrt{\frac{e}{2}}$ vers 0.

La question 4 vise à fournir plus de précision pour le traçage de la courbe C_1 de f_1. Elle permet de préciser le point d'intersection de C_1 avec la droite $y = x$. Pour ce faire, la question fait intervenir la tâche T_7^7 .

Pour réaliser cette tâche, la technique consiste à montrer que la fonction g définie sur $I = [\frac{-1}{2},+\infty[$ par $g(x) = f_1(x) - x$ est une bijection de I sur g(I), que $0 \in g(I)$

et de là déduire l'existence et l'unicité de α. Pour montrer que g est bijective, on montre que g est strictement décroissante sur I, et pour déterminer g(I), on utilise un théorème du cours selon lequel : g étant continue et strictement décroissante, alors :

$$g(I) = g([-\frac{1}{2}, +\infty[) = [\lim_{+\infty} g, g(-\frac{1}{2})[= [-1, \sqrt{\frac{e}{2}}[.$$

Notons dans ce contexte que l'indication explicite de g bijective n'est pas exigée dans ce genre de question, en ce sens que l'élève peut se contenter d'indiquer que g est continue et strictement monotone et que $0 \in g(I)$, puis conclure.

La technique $\boldsymbol{tech_7^7}$ pour cette tâche comprend plusieurs étapes qui ne sont pas indiquées dans l'énoncé, notamment la mobilisation de la fonction auxiliaire g et l'usage (implicitement ou explicitement) de la propriété de bijectivité pour justifier l'existence et l'unicité de la solution. Ceci requiert une disponibilité et une mise en relation de différentes connaissances. D'un autre côté, le travail algébrique que requiert la réalisation de la tâche (calcul des dérivées de f_1 et de g, étude des signes des fonctions dérivées, calcul de limites) peut, dans certains cas, ne pas être évident. Néanmoins, la tâche T_7^7 est routinière dans la classe terminale, elle intervient souvent dans les exercices et problèmes d'analyse. Nous dénombrons dans le manuel officiel 14 occasions où intervient une tâche de ce type. Pour toutes ces raisons, nous considérons que cette tâche est d'un niveau mobilisable à ce niveau d'enseignement.

Exercice 16 (Extrait du problème d'analyse de l'examen du Baccalauréat, session de juin 2005)

Soit $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \to f(x) = \dfrac{e^{2x}}{1+e^x}$ et soit (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ A- 1) Dresser le tableau de variation de f 2) a- Déterminer les branches infinies de (C) b- Tracer (C) 3) a- Montrer que f est une bijection de **R** sur $\mathbf{R}_+^*$ b- Tracer la courbe (C') représentative de la fonction réciproque f^{-1} de f. c- Calculer $f^{-1}(x)$ pour $x > 0$

Commentaire

Dans cet exercice interviennent des tâches de types T_7^4, T_7^5 et T_7^6. Bien que les trois tâches s'articulent autour de la notion de bijection, leurs techniques de réalisation sont isolées, en ce sens que le sujet pourrait réaliser chacune des trois tâches de façon séparée et dans n'importe quel ordre (en admettant, pour les tâches T_7^5 (3-b) et T_7^6 (3-c) que f est bijective). Ainsi :

- pour montrer que f est bijective (tâche de type T_7^4), on se sert de l'étude des variations de f effectuée dans la question 1). Cette étude montre que f est continue et strictement croissante

sur **R** (fonction dérivée : $f'(x) = \dfrac{e^{2x}(e^x+2)}{(1+e^x)^2}$) de 0 vers $+\infty$, ce qui permet, d'après un

théorème de cours, de conclure que f est une bijection de **R** sur f(**R**)=$\mathbf{R}_+^*$. Il s'agit d'une technique routinière (nous dénombrons dans le manuel officiel 32 occasions où intervient cette technique), le travail algébrique inhérent à la réalisation de la tâche ne semble pas présenter de difficultés particulières, nous considérons pour cela qu'il s'agit d'une tâche de niveau technique.

- Pour tracer la courbe représentative de f^{-1} (tâche de type T_7^6), on trace, par application d'un théorème de cours, la courbe symétrique de (C) par rapport à la droite $y = x$. Il s'agit aussi d'une tâche routinière, de niveau technique (elle intervient dans 21 exercices du manuel officiel).

- Pour calculer $f^{-1}(x)$ (tâche de type T_7^5), on résout dans **R** et pour $x > 0$, l'équation en y :

$x = \dfrac{e^{2y}}{1+e^y}$. Cette équation conduit à l'équation : $(e^y)^2 - xe^y - x = 0$.

La résolution de l'équation du second degré associée donne pour unique solution strictement

positive : (puisqu'on cherche $e^y > 0$) : $e^y = \dfrac{x+\sqrt{x^2+4x}}{2}$

d'où l'on déduit que $f^{-1}(x) = \ln\left(\dfrac{x+\sqrt{x^2+4x}}{2}\right)$, pour tout $x > 0$.

La technique de réalisation de la tâche T_7^5 est routinière (elle intervient dans le manuel officiel dans 18 occasions). Toutefois, le travail algébrique que requiert la résolution de l'équation requiert l'usage de différentes connaissances dont la mobilisation et l'organisation pourrait présenter certaines difficultés pour l'élève (ramener l'équation $y = f^{-1}(x)$ à une équation du second degré, résoudre l'équation du second degré obtenue et étudier les signes de ses racines, utiliser que ln est la bijection réciproque de la fonction exponentielle pour obtenir y). Nous considérons pour cela qu'il s'agit d'une tâche de niveau disponible.

Notons que la résolution dans **R** de l'équation : $x = \dfrac{e^{2y}}{1+e^y}$, pour $x > 0$, permet à la fois de montrer que f est bijective et de déterminer la bijection réciproque f^{-1}. Néanmoins, en classe terminale, ces deux tâches sont toujours traitées dans les exercices d'analyse de façon séparée.

Exercice 17 (Extrait du problème d'analyse de l'examen du Baccalauréat, session de juin 2006)

> Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = x + \mathrm{Log}(1+e^{-2x})$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$
> A- 1) a- Dresser le tableau de variation de f
> b- Montrer que la droite D d'équation $y = x$ est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$
> c- Déterminer la position de (C) par rapport à D
> d- Tracer D et (C) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$
> 2) a- Montrer que f est une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[\mathrm{Log}2,+\infty[$
> b- Construire la courbe (C') représentative de la fonction f^{-1} réciproque de f.

Commentaire

Dans cet exercice interviennent des tâches de types T_7^4 et T_7^6. Leur réalisation utilise les mêmes techniques (***tech***$_7^4$ et ***tech***$_7^5$) que celles utilisées dans l'exercice précédent pour les tâches de même type. Le travail algébrique que demande la réalisation de ces techniques ne semble pas poser de difficultés particulières (la fonction dérivée de f est $f'(x) = \dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} > 0$).

La donnée de l'intervalle image de $[0,+\infty[$ par f fournit aux élèves un moyen pour vérifier leur travail. Nous considérons qu'il s'agit de deux tâches de niveau technique.

Exercice 18 (Extrait du problème d'analyse de l'examen du Baccalauréat, session de juin 2007)

> Dans tout le problème n désigne un entier naturel on nul
> A- 1) Soit g_n la fonction définie sur **R** par : $g_n(x) = n(x+1) + e^x$
> a- Dresser le tableau de variation de g_n
> b- Montrer que l'équation $g_n(x) = 0$ admet dans **R** une unique solution α_n.
> c- Prouver que $-2 < \alpha_n < -1$
> d- En déduire le signe de $g_n(x)$ suivant les valeurs de x.

Commentaire

L'objectif de cette partie du problème est l'étude du signe de la fonction g_n (qui va servir à l'étude des variations de la fonction principale du problème : $f_n(x) = \dfrac{xe^x}{n + e^x}$).

Pour justifier que $g_n(x)$ s'annule sur **R** en une unique valeur α_n, on fait intervenir une tâche de type T_7^7. Comme dans l'exercice 15, la technique associée consiste à remarquer que, g_n étant continue et strictement croissante sur **R** de $-\infty$ vers $+\infty$, elle définit une bijection de **R** sur $]-\infty,+\infty[$, puis en remarquant que $0 \in]-\infty,+\infty[$, on déduit le résultat. Il s'agit d'une technique routinière, de plus le travail algébrique inhérent à la réalisation de la tâche est immédiat et ne présente aucune difficulté. Nous considérons que la tâche est d'un niveau technique

Analyse des indices de rigidité et de complétude pour le type de tâches T_7

Nous résumons dans le tableau suivant les tâches de type T_7 mises en œuvre à propos de l'étude des fonctions numériques d'une variable réelle ainsi que les niveaux correspondants de mise en fonctionnement des connaissances :

Tableau 12 : Niveaux de mise en fonctionnement des connaissances pour les taches de type T_7 concernant les fonctions numériques

Exercice	Type de tâches	Niveau de mise en fonctionnement des connaissances
15	T_7^7	mobilisable
16	T_7^4	technique
16	T_7^5	disponible
16	T_7^6	technique
17	T_7^4	technique
17	T_7^6	technique
18	T_7^7	technique

Nous remarquons que pour la plupart des tâches, la mise en fonctionnement des connaissances est de niveau technique ; les niveaux supérieurs requis dans certains cas sont dus au travail algébrique (calcul de dérivée, étude du signe de la dérivée, calcul de limites…) inhérent à la réalisation de la tâche et non à la stratégie à adopter. De fait, les techniques associées aux tâches de type T_7 sont standards et routinières, elles interviennent dans un bon nombre d'exercices et de problèmes d'analyse en classe terminale. D'un autre côté, la manière avec laquelle sont posés les questions à propos de ces tâches, caractérisée généralement par l'indication détaillée des pas à suivre et l'absence de tâches ouvertes, rend difficile l'usage de techniques alternatives (comme pour les tâches T_7^4 et T_7^5, qui peuvent dans certains cas être réalisées simultanément via une même technique) ou la mise en œuvre de praxéologies mathématiques de niveau local, où le sujet serait contraint à fixer sa stratégie de travail et à choisir la technique appropriée pour la réalisation de la tâche. Notons aussi que le problème de non bijectivité n’est jamais posé dans les exercices.

Le choix institutionnel de lier de façon systématique l’étude de la propriété de bijectivité pour les fonctions numériques avec le théorème sur les fonctions continues et strictement monotones, et l’usage de techniques stéréotypées associées à des praxéologies ponctuelles souvent indiquées dans les exercices et où les justifications technologiques ne sont pas toujours exigées (comme l’indication de la bijectivité pour justifier l’unicité de la solution de f(x)=0) rendent difficile, à notre avis, la mise en évidence de l’aspect ensembliste de la notion de bijection, empêchent l’intégration des techniques associées aux propriétés de bijectivité utilisées pour les transformations géométriques et celles utilisées pour les fonctions numériques dans des technologies locales et limitent les possibilités de fonctionnement de la notion de bijection à un niveau structurel et dans des contextes généraux non standards.

IV. 3.3. Conclusion concernant l’environnement praxéologique des notions ensemblistes fonctionnelles dans l’institution ES

Nous résumons dans le tableau suivant les caractéristiques de complétude des praxéologies mathématiques étudiées dans ce paragraphe. Nous utilisons les abréviations suivantes pour les techniques associées à ces praxéologies:

NR : technique non rigide. Concerne les techniques indépendantes des objets ostensifs qui les décrivent, ayant des techniques alternatives dont l’usage est à la charge du sujet et admettant éventuellement des techniques inverses si la tâche associée est réversible.

MR : technique moyennement rigide. Concerne les techniques indépendantes des objets ostensifs qui les décrivent, dont l’usage est indiqué ou routinisé et ayant néanmoins des techniques alternatives. Elles sont éventuellement réversibles.

R : technique rigide. Concerne les techniques dépendantes des objets ostensifs qui les décrivent, pour lesquelles il n’y a ni technique alternative ni technique inverse.

Tableau 13 : Synthèse de l'environnement praxéologique des notions ensemblistes fonctionnelles dans l'institution ES

Taches/Type de taches	Niveau de mise en œuvre des praxéologie			Forme d'intervention des praxéologie :		Rigidité des techniques			Possibilité d'intégration des OMP dans des OML
	OMP	OML	OMR	$[T, \tau]$	$[\theta, \Theta]$	R	MR	NR	
T_1	×			×		×			Existe mais non exploitée
T_2		×			×			×	Existe
T_3	×			×			×		Existe mais non exploitée
T_4^1	×			×		×			Existe mais difficile à apercevoir à cause de l'indication des techniques à adopter
T_4^2 / T_4^3	×	×		×	×		×		
T_5		×		×	×		×		Existe mais trop liée au contexte d'étude des transformations géométriques
T_6	×	×		×	×		×		Existe mais difficile à apercevoir à cause de l'indication des stratégies de raisonnement à adopter
$T_7^1 / T_7^2 / T_7^3$	×			×		×			Existe mais difficile à apercevoir à cause de l'isolement des techniques utilisées et de la similitude des contextes où interviennent les tâches
T_7^4	×			×	×		×		
T_7^5	×			×	×	×			
T_7^6	×			×		×			
T_7^7	×				×		×		

L'environnement praxéologique relatif à l'étude des notions ensemblistes fonctionnelles dans la classe terminale est caractérisé par une prédominance des techniques rigides et moyennement rigides et des praxéologies mathématiques ponctuelles. Bien que les blocs pratico-technique et technologico-théorique des praxéologies mises en œuvre soient tous deux sollicités dans la réalisation des tâches, l'intervention du bloc technologico-théorique se limite généralement à la justification de la légitimité d'emploi de la technique, ce qui réduit le discours technologique de l'élève à un travail concernant les caractéristiques (géométrique, analytique et/ou algébrique) de la situation de l'exercice à résoudre ou, le cas échéant, à faire référence à la propriété utilisée. D'un autre côté, la dépendance de plusieurs techniques aux objets ostensifs qui les décrivent, l'indication dans l'énoncé de la stratégie de résolution et la donnée de l'application et/ou de la propriété fonctionnelle à mobiliser dans la réalisation de la tâche, réduisent la fonctionnalité du discours technologique, dès lors que les éléments technologiques nécessaires pour interpréter le fonctionnement des techniques et/ou justifier le choix de la stratégie adoptée ou de la transformation mobilisée ne sont plus requis pour la réalisation de la tâche. Par ailleurs, l'analyse d'extraits de différents sujets de Baccalauréat montre l'absence de tâches mathématiques « ouvertes » concernant l'usage des notions ensemblistes fonctionnelles et que le fonctionnement des connaissances se rapportant à ces notions se limite dans la plupart des cas au niveau technique, les niveaux supérieurs, lorsqu'ils sont sollicités, concernent essentiellement la gestion de la situation géométrique de l'exercice, ou le travail algébrique et analytique inhérent à la réalisation de la tâche.

Nous concluons que l'environnement praxéologique mis en place pour l'étude et l'usage des notions ensemblistes fonctionnelles, bien qu'il présente des potentialités de complétude, reste caractérisé par la rigidité des techniques, l'isolement et l'incomplétude des praxéologies mathématiques ponctuelles qui dominent l'espace de travail des dites notions. Ceci rend difficile l'intégration des praxéologies ponctuelles autour de praxéologies locales relativement complètes ainsi que la mise des notions ensemblistes fonctionnelles à un niveau de fonctionnement disponible ou à un niveau d'usage structurel.

IV. 4. Conclusion concernant le rapport de l'institution ES aux notions ensemblistes fonctionnelles

Trois aspects caractérisent l'enseignement des notions ensemblistes fonctionnelles dans l'institution ES :

- une nécessité d'usage,
- un vide institutionnel concernant la façon de les introduire et de les travailler,
- deux niveaux de discours concernant les praxéologies mathématiques mises en œuvre pour leur étude et leur usage dans les manuels officiels.

L'étude des programmes de 1998 et des manuels officiels en vigueur dans la période qui concerne notre recherche montre que les notions ensemblistes fonctionnelles constituent un outil indispensable pour l'enseignement des mathématiques au lycée. En nous limitant aux thèmes des transformations géométriques et des fonctions numériques d'une variable réelle, sur lesquels a porté notre étude, nos analyses montrent que les notions ensemblistes fonctionnelles interviennent à plusieurs niveaux dans l'étude de ces thèmes. Ainsi les notions d'application et de bijection, les opérations de composition et de décomposition des applications, les opérations algébriques sur les fonctions numériques, les propriétés de transfert…, pour ne citer que ces exemples, sont des notions clé sur lesquelles repose, selon les choix institutionnels, l'étude des propriétés géométriques des transformations planes et l'institutionnalisation de plusieurs résultats et théorèmes en algèbre et en analyse. Malgré cette importance, aucune organisation didactique pour l'étude de ces notions n'est prévue par les programmes officiels, ceux-ci se limitent à recommander d'introduire ces notions dans des activités et d'éviter tout développement théorique à leur propos. En revanche, dans les manuels officiels des différentes classes de lycée, l'analyse des modes d'intervention des notions sus-citées dans différents thèmes fait état d'un usage de niveau théorique et formel des notions ensemblistes fonctionnelles dans les développements des leçons concernées. Ce niveau d'usage s'avère nécessaire pour répondre aux exigences de rigueur et de précision mathématiques que requièrent ces développements. Ceci, sans pour autant que soit introduite de façon explicite et/ou général la plupart des notions utilisées ou que soient précisées les règles de leur usage. Celles-ci sont directement utilisées par les auteurs des manuels chaque fois que le contexte l'exige. Nous pouvons comprendre cela dans la mesure où ce niveau théorique d’usage n’est pas exigible dans la part du travail dévolue aux élèves. En effet, conformément aux recommandations institutionnelles, les tâches données dans les exercices et problèmes concernant les notions fonctionnelles sont conçues de manière à ce que leurs techniques de réalisation ne fassent pas appel aux aspects théoriques des notions ensemblistes sous-jacentes et que le discours technologique que requièrent la justification et l’interprétation de ces techniques ne soit pas trop dépendant des ces notions. L’environnement praxéologique qui résulte de cet état de fait est caractérisé par une dominance de praxéologies mathématiques ponctuelles et rigides, dont la mise en œuvre est essentiellement axée sur les blocs pratico-techniques et où il semble difficile d’utiliser un discours technologique permettant l’intégration des OMP autour de praxéologies mathématiques locales relativement complètes.

Par ailleurs, la prédominance dans les exercices de Baccalauréat de tâches mettant en fonctionnement le niveau technique des connaissances relatives aux notions ensemblistes fonctionnelles indique que c’est ce niveau qui est visé par l’institution à la fin de l’enseignement secondaire pour les dites notions. Ceci conduit naturellement, enseignant et élèves, à focaliser leur travail (à propos des notions ensemblistes fonctionnelles) sur les tâches de niveau technique, dont les stratégies de résolution et les objets à mobiliser sont indiqués et les techniques de réalisation sont répertoriées. Cette situation rend difficile pour les élèves le dépassement du niveau procédural dans l’usage des notions ensemblistes fonctionnelles dans l’institution ES.

En conclusion, dans l’enseignement secondaire, *le niveau institutionnel de fonctionnement des connaissances* relatives aux notions ensemblistes fonctionnelles est, *dans le topos des élèves, essentiellement technique*, centré autour de praxéologies mathématiques ponctuelles et de techniques bien répertoriées et stéréotypées. En même temps, nous notons la présence d’un discours technologique assez développé pour ces notions dans les développements théoriques donnés dans les manuels, exigeant un usage de niveau structurel et disponible des dites notions. La non exigibilité de ce niveau de discours dans le travail demandé aux élèves et notamment dans les exercices de Baccalauréat, installe un écart entre le fonctionnement des connaissances dans le topos de l’élève et celui de l’enseignant et pourrait amener les élèves, et même les enseignants, à ne pas accorder d’importance à ces développements théoriques, ce qui influencerait la formation mathématique des élèves de Secondaire.

V. Rapport de l’institution CPS1 aux notions ensemblistes fonctionnelles

L’enseignement des mathématiques dans les classes préparatoires scientifiques, et particulièrement dans la filière Mathématiques-Physique (MP), a pour objectif de fournir aux étudiants une formation de base solide concernant les concepts fondamentaux sur lesquelles repose le savoir savant mathématique, de leur permettre d’acquérir les méthodes spécifiques du travail et de la recherche mathématiques et de développer chez eux des capacités d'autonomie. Dans cette perspective, les notions ensemblistes et le vocabulaire et symbolisme associés sont considérés par l'institution CPS1 comme des outils fondamentaux et il est attendu que les étudiants apprennent à les maîtriser et à les utiliser à bon escient. Pour l'étude des rapports de l'institution CPS1 à ces notions, nous sommes contraints, vu la variété des notions ensemblistes et leur présence dans tous les domaines mathématiques enseignés, de délimiter les concepts ensemblistes sur lesquels portera notre étude. En continuité avec l'étude réalisée dans l'institution ES et tenant compte des notions autour desquelles seront conçues les expérimentations de la thèse nous avons choisi de nous limiter à l'étude des notions d'application et de bijection et à la manière dont elles interviennent dans les différents chapitres d'Algèbre enseignés en CPS1.

Pour ce faire, nous commençons par donner un aperçu général sur l'enseignement des notions d'application et de bijection dans les programmes d'Algèbre de l'institution CPS1, nous étudions ensuite l'environnement praxéologique des dites notions à travers l'analyse d'exemples d'exercices où elles interviennent, choisis dans les fiches de travaux dirigés (TD) des classes CPS1.

V. 1. Les notions d'application et de bijection dans les programmes de mathématiques de l'institution CPS1

Le texte des programmes de mathématiques pour la classe de première année préparatoire MP, précise en préliminaire des thèmes à enseigner dans le chapitre « Ensembles et Applications », ce qui suit :

> *L'objectif est d'acquérir le vocabulaire usuel sur les ensembles, les applications et les relations. Toute étude systématique, a fortiori toute axiomatique, de la théorie des ensembles est exclue.*
>
> *Le programme se limite strictement aux notions de base figurant ci-dessous. Ces notions doivent être acquises progressivement par les étudiants au cours de l'année, au fur et à mesure des exemples rencontrés dans les différents chapitres d'algèbre, d'analyse et de géométrie. Elles ne doivent pas faire l'objet d'une étude exhaustive bloquée en début d'année.*[46]

Il s'agit par ce préliminaire d'éviter toute excroissance de l'enseignement vers la théorie axiomatique des ensembles et d'éviter aussi de réduire l'enseignement de ces notions à un exposé de concepts présentés aux étudiants au début de l'année, hors de leurs contextes d'utilisation. L'étude des notions ensemblistes et l'acquisition de la manière avec laquelle le vocabulaire et le symbolisme associés interviennent dans la formulation et l'élaboration des énoncés mathématiques doivent se faire de façon progressive le long de l'année, lors de l'étude des différents thèmes d'algèbre, d'analyse et de géométrie. Néanmoins, les enseignants considèrent utile de montrer la manière dont sont structurées les notions ensemblistes et de préciser simultanément les concepts fondamentaux autour desquels elles s'articulent. C'est dans cette perspective que le cours d'Algèbre en CPS1 commence

[46] Préparation MP. Programme de première année. Page 1.

traditionnellement par le chapitre « Ensembles et Applications ». Ce chapitre s'articule autour de trois thèmes principaux :

- Ensembles et opérations sur les parties d'un ensemble.
- Applications, lois de composition.
- Relations d'équivalence et relations d'ordre.

Le paragraphe relatif aux « Applications » dans les programmes officiels précise :

Une application f de E dans (vers) F est définie par son ensemble de départ E, son ensemble d'arrivée F et son graphe G. Ensemble $\mathcal{F}(E,F)$ des applications de E dans F. Ensemble E^I des familles $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments d'un ensemble E indexées par un ensemble I. Composée de deux applications, application identique. Restriction et prolongements d'une application.	Notations $E \xrightarrow{f} F$, $f : E \to F$, $x \mapsto f(x)$, la première étant très commode, notamment pour la composition des applications. Le programme ne distingue pas les notions de fonction et d'application. La notion de correspondance entre deux ensembles est hors programme.
Equations, application injectives, surjectives, bijectives. Application réciproque d'une bijection. Composée de deux injections, de deux surjections, de deux bijections. Définition des images directe et réciproque d'une partie. Compatibilité de l'image réciproque avec les opérations sur les parties. Fonction caractéristique d'une partie. Lien avec les opérations sur les parties.	Aucune connaissance spécifique sur les images et leurs relations avec les images réciproques n'est exigible[47] des étudiants.

Nous remarquons que la plupart des notions indiquées dans ce tableau sont étudiées, ou du moins utilisées, explicitement ou implicitement, déjà dans l'enseignement secondaire. Toutefois, contrairement à ce que nous avons constaté dans l'enseignement secondaire, ces notions sont présentées dans l'institution CPS1 dès le début dans toute leur généralité, indépendamment des contextes où elles seront utilisées, l'on montre la façon avec laquelle elles sont structurées puis comment elles évoluent dans l'enchainement des thèmes d'étude. En nous référant aux polycopies de cours des classes concernées par nos expérimentations, nous récapitulons dans les tableaux suivants les principales étapes de l'enseignement des notions d'application, d'injection, de surjection et de bijection dans le programme d'algèbre de CPS1.

[47] En ce sens qu'elles ne doivent pas faire l'objet de théorèmes de cours. Néanmoins, il est souhaitable que ces connaissances soient traitées en activités dans les TD.

1)Notion d'application

Contexte	Caractéristiques
Général	Ensembles de départ, d'arrivée et graphe
Application linéaire sur un espace vectoriel (ev) de dimension finie	Image d'une base de l'espace de départ
Application linéaire entre espaces vectoriels de dimensions finies	Matrice

2) Notion d'injection

Contexte	Caractéristiques
Général	$f : E \to F$ est injective si l'une des conditions suivantes est vérifiée : - Tout élément de *F* a, au plus, un antécédent dans *E* par *f*. - Pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ admet au plus une solution dans E. - $\forall (x, x') \in E^2$, $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$ - $\forall (x, x') \in E^2$, $x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$ - *f* est la composée de deux injections - Il existe une application $g : F \to E$ telle que $gof = id_E$
Morphisme de groupes ou d'espaces vectoriels	Un morphisme de groupes (ou d'ev) $f : G \to H$ est injectif si, et seulement si, $Kerf = \{0_G\}$
Application linéaire entre espaces vectoriels de dimensions finies	*E* et *F* sont deux espaces vectoriels de dimensions finies respectives p et n. Une application linéaire $f : E \to F$ est injective si, et seulement si, l'une des conditions suivantes est vérifiée : - *f* transforme une base de *E* en une famille libre de *F*. - rang(*f*) = p

3) Notion de surjection

Contexte	Caractéristiques
Général	$f : E \to F$ est surjective si l'une des conditions suivantes est vérifiée : - Tout élément de *F* a, au moins, un antécédent dans *E* par *f*. - Pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ admet au moins une solution dans E. - *f* est la composée de deux surjections - Il existe une application $g : F \to E$ telle que $fog = id_F$
Morphisme de groupes ou d'espaces vectoriels (ev)	Un morphisme de groupes (ou d'ev) $f : G \to H$ est surjectif si, et seulement si, $\operatorname{Im} f = H$
Application linéaire entre espaces vectoriels de dimensions finies	*E* et *F* sont deux espaces vectoriels de dimensions finies respectives p et n. Une application linéaire $f : E \to F$ est surjective si, et seulement si, l'une des conditions suivantes est vérifiée : - *f* transforme une base de *E* en une famille génératrice de *F*. - rang(*f*) = n

4) Notion de bijection

Contexte	Caractéristiques
Général	$f : E \to F$ est bijective si l'une des conditions suivantes est vérifiée : - Tout élément de *F* a un antécédent unique dans *E* par *f*. - Pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ admet une solution unique dans E. - *f* est à la fois injective et surjective - *f* est la composée de deux bijections - Il existe une application $g : F \to E$ telle que $fog = id_F$ et $gof = id_E$
Application entre deux ensembles finis de mêmes cardinaux	f bijective $\Leftrightarrow f$ injective $\Leftrightarrow$ f surjective
Morphisme de groupes ou d'espaces vectoriels (ev)	Un morphisme de groupes (ou d'ev) $f : G \to H$ est bijectif si, et seulement si, $Kerf = \{0_G\}$ et $\mathrm{Im}\, f = H$
Application linéaire entre espaces vectoriels de mêmes dimensions finies	*E* et *F* sont deux espaces vectoriels de mêmes dimensions finies n. Une application linéaire $f : E \to F$ est bijective si l'une des conditions suivantes est vérifiée : - *f* est injective - *f* est surjective - *f* transforme une base de *E* en une base de *F*. - rang(*f*) = n - déterminant(*f*) $\neq 0$ - *f* admet une matrice inversible

Commentaire

L'organisation de l'enseignement des savoirs relatifs aux notions rapportées dans les tableaux ci-dessus (et de façon plus générale des contenus d'étude en CPS1), la démonstration des équivalences entre différents énoncés caractérisant une même notion, la justification des modifications qui s'opèrent sur les caractéristiques des concepts selon les contextes d'étude et la mise en évidence des liens éventuels qui existent entre ces concepts, sont des questions auxquelles on accorde une grande importance dans l'institution CPS1. En témoigne la présence d'un environnement praxéologique assez développé, dont les praxéologies mathématiques sont bien structurées et suffisamment intégrées et où un discours technologique substantiel est mis en œuvre.

D'un autre côté, pour favoriser chez les étudiants la compréhension des concepts et de leur portée, l'exploitation de la multiplicité des points de vue à travers lesquels se présentent ces concepts et l'acquisition de méthodes de travail et de raisonnement répondant aux exigences de formation dans l'institution CPS1, il est considéré très utile de mettre en valeur les méthodes d'élaboration des concepts et des démonstrations et de faire intervenir ces méthodes dans les problèmes et exercices destinés aux étudiants. C'est dans cette perspective que l'étude du cours occupe une place importante dans l'enseignement des mathématiques en CPS1 et joue un rôle central dans la formation des étudiants. Par ailleurs, dans les travaux dirigés (TD) et devoirs, on évite généralement de se limiter à des problèmes routiniers et à des exercices dont la solution met en œuvre uniquement des techniques bien répertoriées. Les exercices et problèmes traités avec les étudiants s'approchent, dans une certaine mesure, des développements théoriques effectués dans le cours.

A partir d'exemples d'exercices extraits de fiches de TD et de devoirs des classes CPSI de l'institut IPEIT[48], nous étudions dans le paragraphe suivant l'environnement praxéologique des notions d'application et de bijection dans l'institution CPS1. Cette étude nous permettra de déterminer le niveau institutionnel de fonctionnement des connaissances dans cette institution.

V. 2. L'environnement praxéologique des notions d'application et de bijection dans l'institution CPS1

Nous adoptons dans cette étude le même modèle d'analyse que celui utilisé pour l'institution ES. Nous résumons dans le tableau suivant les principaux types de tâches que nous étudierons dans les exercices.

Tableau 14 : Types de tâches associées à l'usage des notions ensemblistes fonctionnelles dans l'institution CPS1

Types de tâches	
$\mathcal{T}_1$	Construire une application ou justifier qu'une application est bien définie
$\mathcal{T}_2$	Mettre en œuvre une application pour montrer une propriété donnée
$\mathcal{T}_3$	Montrer qu'une application est injective
$\mathcal{T}_4$	Mettre en œuvre une injection pour montrer une propriété donnée
$\mathcal{T}_5$	Montrer qu'une application est surjective
$\mathcal{T}_6$	Mettre en œuvre une surjection pour montrer une propriété donnée
$\mathcal{T}_7$	Montrer qu'une application est bijective
$\mathcal{T}_8$	Mettre en œuvre une bijection pour montrer une propriété donnée
$\mathcal{T}_9$	Déterminer la réciproque d'une application bijective
$\mathcal{T}_{10}$	Caractériser une application donnée

Nous donnons en annexe les textes entiers des fiches de TD et tests d'où sont extraits les exercices que nous analysons. Ces textes permettent de situer les exercices analysés dans le contexte général du travail destiné aux étudiants.

[48] Institut Préparatoire aux Etudes d'Ingénieur de Tunis. Les fiches de TD et tests utilisés ont été donnés au cours de l'année universitaire 2005/2006.

❖ **Exercice 1** (Série n° 1, 2005/2006)

Soient E, F, G et H quatre ensembles tels que H possède au moins deux éléments et f une application de F vers G. On désigne par $\mathcal{F}(E, F)$ l'ensemble des applications de E vers F.
1) Montrer que :
a- f est injective $\Leftrightarrow$ $[\forall\, g, h \in \mathcal{F}(E, F), (fog = foh \Rightarrow g = h)]$
b- f est surjective $\Leftrightarrow$ $[\forall\, g, h \in \mathcal{F}(G, H), (gof = hof \Rightarrow g = h)]$
2) Soit $u \in \mathcal{F}(E, F)$, $v \in \mathcal{F}(G, H)$ et

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathcal{F}(F, G) & \to & \mathcal{F}(E, H) \\ f & \mapsto & \varphi(f) = vofou \end{array}$$

Montrer que si u est surjective et v est injective, alors φ est injective.

Commentaire

Dans cet exercice les applications considérées ne sont pas définies explicitement. Les principales notions mises en jeu sont :

$\mathbf{n_1}$: composition d'applications
$\mathbf{n_2}$: égalité entre deux applications
$\mathbf{n_3}$: connecteurs logiques d'implication et d'équivalence
$\mathbf{n_4}$: injection
$\mathbf{n_5}$: surjection

Question 1-a

Il s'agit de montrer une équivalence entre deux propriétés. Les notions n_1 à n_4 sont en jeu

- Dans la condition nécessaire intervient une tâche de type $\mathcal{T}_4$, sa réalisation utilisant la définition d'une injection. On peut procéder ainsi :

Si f et g sont deux applications telles que $fog = foh$, alors : $\forall\ x \in E,\ f\big(g(x)\big) = f\big(h(x)\big)$, et comme f est injective, il s'ensuit que : $\forall x \in E,\quad g(x) = h(x)$. D'où $g=h$.

Il s'agit d'une application de la définition d'injection. Il faut néanmoins reformuler les égalités entre applications en des égalités entre images d'éléments. Par ailleurs, avant de mettre en œuvre cette technique, il faut interpréter l'équivalence formelle donnée à démontrer, la décomposer en deux implications et gérer le fait que dans la condition nécessaire (que nous désignons par $A \Rightarrow B$), B est elle-même une implication quantifiée universellement. Il y a là une complexité logique peu familière aux étudiants entrant en classes préparatoires. Nous considérons pour cela que la tâche est de niveau disponible.

- Dans la condition suffisante intervient une tâche de type $\mathcal{T}_3$. Le passage des hypothèses $[\forall\, g, h \in \mathcal{F}(E, F), (fog = foh \Rightarrow g = h)]$ à la propriété [f injective] ne semble pas évident. Il y a des étapes dans la résolution non indiquées, demandant plus d'autonomie à l'étudiant. On peut procéder en effet comme suit :

Soient a et b deux éléments de F tels que $f(a)=f(b)$. On construit les applications constantes : $g : E \to F, x \mapsto a$ et $h : E \to F, x \mapsto b$. L'égalité : $f(a)=f(b)$ s'écrit alors :

$\forall x \in E, \quad f\left(g(x)\right) = f\left(h(x)\right)$ ou encore : $fog = foh$, on en déduit, d'après l'hypothèse, que $g=h$ et par suite que $a=b$. Ceci montre que f est injective.

La réalisation de la tâche demande la construction d'objets spécifiques permettant d'exploiter les hypothèses, en l'occurrence des applications constantes représentant les éléments a et b de F. Les tâches de construction sont généralement réputées difficiles pour les étudiants, surtout lorsqu'elles ne sont pas indiquées et qu'il revient à l'étudiant de les mettre en évidence. Ceci requiert une flexibilité de pensée et une disponibilité des connaissances. Pour cela, nous considérons que la tâche est elle aussi de niveau disponible.

Question 1-b

Là aussi il faut montrer une équivalence. Les notions n_1 à n_3 et n_5 sont en jeu.

- Dans la condition nécessaire intervient une tâche de type $\mathcal{T}_6$. On peut procéder ainsi :
g et h étant deux application de G vers H telles que $gof = hof$, alors :
$\forall y \in F, \quad g\left(f(y)\right) = h\left(f(y)\right)$, comme f est surjective, ceci s'écrit aussi :
$\forall z \in f(F) = G, \quad g(z) = h(z)$, ce qui montre que $g=h$.

La réalisation de la tâche demande là encore la reformulation de l'égalité entre applications en termes d'égalité entre les images de tout point, la reformulation de l'égalité quantifiée universellement obtenue en utilisant la propriété caractérisant une surjection et une gestion appropriée des ostensifs en jeu. Une caractérisation appropriée de la surjection est nécessaire pour la réalisation de la tâche. La tâche nous semble pour cela de niveau disponible.

- Dans la condition suffisante intervient une tâche de type $\mathcal{T}_5$. Sa réalisation requiert la construction d'applications pour rendre l'hypothèse opératoire, l'exploitation du fait que H contient au moins deux éléments et le choix d'un point de vue adéquat de la notion de surjection. On peut procéder par l'absurde comme suit :
On suppose que [$\forall g, h \in \mathcal{F}(G, H), (gof = hof \;\Rightarrow\; g = h)$] et que $f(F) \neq G$. Soient h_1 et h_2 deux éléments distincts de H. Considérons les applications g et h de G dans H définies par :
Pour tout $x \in F$ et $y = f(x) \in f(F)$, $g(y) = h(y)$,
et pour tout $y \in (G - f(F))$, $g(y)=h_1$ et $h(y)=h_2$.
On obtient dans ces conditions : $\forall x \in F, \quad g\left(f(x)\right) = h\left(f(x)\right)$ et par suite que $g=h$ (d'aprés l'hypothèse), ce qui est absurde puisque $h_1 \neq h_2$. On a donc $f(F) = G$ et f est surjective.

Outre le choix d'une stratégie fixant le mode de raisonnement (par l'absurde dans la solution proposée) et une caractérisation convenable de la surjection, la réalisation de la tâche requiert la construction d'applications appropriées pour pouvoir exploiter l'hypothèse. Un choix adéquat et une bonne gestion des ostensifs en jeu sont aussi nécessaires. Ceci demande une flexibilité de pensée, une disponibilité des connaissances et la possibilité de gérer et d'organiser les notions mises en œuvre. La tâche nous semble ici encore de niveau disponible.

Question 2

Cette question fait intervenir une tâche de type $\mathcal{T}_3$. Les notions n_1, n_2, n_4 et n_5 sont en jeu. Une difficulté particulière réside dans le double statut des éléments de $\mathcal{F}(F,G)$ (resp. $\mathcal{F}(E,H)$), qui sont suivant le cas des variables (resp. images d'éléments par φ) ou des fonctions. Ceci demande un jeu entre des objets fonctionnels de niveau différent et une bonne gestion des ostensifs considérés. Une façon de procéder est la suivante :

Considérons f_1 et f_2 dans $\mathcal{F}(F, G)$ telles que $\varphi(f_1)=\varphi(f_2)$, alors : $vof_1ou = vof_2ou$ donc : $\forall x \in E,\ v\left(f_1(u(x))\right) = v\left(f_2(u(x))\right)$

Si v est injective alors, $\forall x \in E,\ f_1(u(x)) = f_2(u(x))$, ce qui s'écrit, si u est surjective : $\forall z \in F,\ f_1(z) = f_2(z)$. Ceci montre que $f_1 = f_2$.

En plus de l'appréhension globale de la question, notamment la variété des données constituant l'hypothèse de la condition nécessaire à démontrer, la tâche demande une reformulation d'une égalité fonctionnelle en termes d'égalité d'image des éléments, une exploitation appropriée de l'injectivité et de la surjectivité et la gestion du jeu entre éléments et ensembles dans les quantifications universelles mises en œuvre. Nous considérons pour ces raisons que la tâche est de niveau disponible.

❖ **Exercice 2** (Série n° 1, 2005/2006)

> Soient E un ensemble fini non vide et φ une application de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(E)$ telle que :
> (i) $\varphi(\varnothing) = \varnothing$
> (ii) $\forall$ A$\in \mathcal{P}(E)$, $\forall$ B$\in \mathcal{P}(E)$, $\varphi(A \cup B) = \varphi(A) \cup \varphi(B)$.
> (iii) $\forall$ A$\in \mathcal{P}(E)$, card A $\leq$ card φ(A).
> 1) Démontrer que pour toutes parties A et B de E, on a:
> - $A \subset B \Rightarrow \varphi(A) \subset \varphi(B)$.
> - $\varphi(A \cap B) \subset \varphi(A) \cap \varphi(B)$.
>
> 2) Une partie A de E est dite normale pour φ si et seulement si card A = card φ(A).
> a- Montrer que $\varphi(E) = E$.
> b- Montrer que, si A et B sont deux parties normales de E, $A \cup B$ et $A \cap B$ sont normales et que $\varphi(A \cap B) = \varphi(A) \cap \varphi(B)$.

Commentaire

Dans cet exercice, l'existence d'une application φ vérifiant les conditions données est implicitement admise. Ce sont les conditions imposées à φ qui seront mises en œuvre pour démontrer les propriétés données. Les principales notions mises en jeu sont la définition d'une application et les « opérations sur les ensembles ». Nous nous limitons à l'analyse de la première question. La deuxième question met en œuvre essentiellement un travail algébrique sur les cardinaux.

Démonstration de la première propriété

La question fait intervenir une tâche de type $\mathcal{T}_2$. Une façon de procéder est la suivante :

Si $A \subset B$, alors $A \cup B = B$ et donc $\varphi(A \cup B) = \varphi(B)$,

ce qui s'écrit, d'après (ii), : $\varphi(A) \cup \varphi(B) = \varphi(B)$. On en déduit que $\varphi(A) \subset \varphi(B)$

Une première difficulté réside dans la nature des éléments des ensembles de départ et d'arrivée de φ qui sont des parties de *E*. Ceci pourrait entraîner des confusions entre l'image d'un élément par φ et la notion d'image d'une partie de l'ensemble de départ. Si par exemple, obéissant à une stratégie usuelle, l'étudiant exprime l'inclusion en passant aux éléments *x* de A et *y* de $\varphi(A)$ et pose $y = \varphi(x)$, sa stratégie sera erronée, car φ s'applique aux parties de E et non à ses éléments. Bien saisir le sens porté par les ostensifs en jeu est ici nécessaire. Par ailleurs, la tâche requiert une reformulation appropriée de l'inclusion permettant d'opérationnaliser la condition (ii) sur φ. Le sujet ici est autonome, doit bien saisir les données et doit savoir adapter ses connaissances à la situation de l'exercice. Nous considérons pour cela que la tâche est de niveau disponible.

Démonstration de la deuxième propriété

Cette propriété fait intervenir une tâche de type $\mathcal{T}_2$ et utilise la première propriété. Une façon de procéder est la suivante :

$A \cap B \subset A$, donc, d'après la propriété 1, $\varphi(A \cap B) \subset \varphi(A)$ (1)
et aussi $A \cap B \subset B$, donne : $\varphi(A \cap B) \subset \varphi(B)$ (2)
De (1) et (2), on déduit que $\varphi(A \cap B) \subset \varphi(A) \cap \varphi(B)$.

La tâche a les mêmes caractéristiques que la précédente. Il est ainsi nécessaire de bien identifier la nature des variables en jeu pour l'application φ, de savoir utiliser convenablement les opérations sur les parties A et B de E et de tirer profit du résultat de la question précédente. Nous considérons ici encore que la tâche est de niveau disponible.

❖ **Exercice 3** (Test n° 1, 05/01/2006)

> On munit **R** de la loi de composition interne définie par :
> $\forall (a,b) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, $a * b = \sqrt[3]{a^3 + b^3}$
> Montrer que $(\mathbf{R}, *)$ est un groupe abélien isomorphe au groupe $(\mathbf{R}, +)$

Commentaire

L'exercice fait intervenir une tâche de type $\mathcal{T}_1$ (construction d'une application). Pour établir l'isomorphisme entre les groupes $(\mathbf{R}, *)$ et $(\mathbf{R}, +)$, le sujet sera amené à construire une application de **R** vers **R** qui soit un morphisme bijectif. La tâche comprend plusieurs étapes, des sous tâches de types $\mathcal{T}_7$ et $\mathcal{T}_8$ sont en jeu, elles correspondent à des contraintes pour la construction de l'application visée. Nous considérons pour cela que la question concerne principalement une tâche de type $\mathcal{T}_1$.

Deux stratégies sont ici possibles :

Stratégie 1 : Montrer que ($\mathbf{R}, *$) est un groupe abélien (via la vérification des axiomes du groupe abélien), puis construire un isomorphisme entre les groupes en question.

Stratégie 2 : Commencer par construire un morphisme f de **R** vers **R** pour les lois + et $*$, qui soit bijectif. Dans ce cas, étant donnée que (**R**,+) est un groupe abélien, le théorème sur le transfert de la structure de groupe permet de transporter la structure du groupe (**R**,+) vers ($\mathbf{R}, *$). L'isomorphisme entre les deux groupes sera ainsi établi.

Nous nous intéressons ici particulièrement à la construction d'un isomorphisme f entre les deux groupes. Trois sous-tâches composent cette tâche :

t_1 : Construire f (de type $\mathcal{T}_1$)
t_2 **:** Montrer que f est un morphisme
t_3 : Montrer que f est bijectif (de type $\mathcal{T}_7$)

- Pour t_1, et pour les deux stratégies, l'application à construire est suggérée par la loi $*$, il s'agit de l'application $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \to \sqrt[3]{x}$. Cette construction n'est pas tout à fait évidente, les puissances 3 dans ($a^3 + b^3$) pouvant perturber l'étudiant.

- Pour t_2, il suffit d'appliquer à f la définition de morphisme. Il s'agit d'une tâche de niveau technique

- Pour t_3, plusieurs techniques sont possibles :

- Montrer que pour tout réel y, l'équation $y = f(x)$, d'inconnue x admet une solution unique dans **R**.
- Montrer séparément que f est injective et surjective.
- Montrer que f est strictement croissante sur **R** et que $f(\mathbf{R})=\mathbf{R}$.
- Considérer l'application g définie de **R** vers **R** par $g(x) = x^3$ et montrer que $fog = gof = id_{\mathbf{R}}$

Pour réaliser la tâche, le sujet ici est autonome, il doit fixer une stratégie de travail, organiser et mettre en relation les connaissances en jeu, effectuer un choix entre différentes techniques, vérifier l'opportunité de ses choix et de son travail… Cependant, l'isomorphisme à construire entre (**R**,+) et ($\mathbf{R}, *$) est suggéré par l'énoncé et le type de tâches concerné est plus ou moins routinisé dans le domaine de l'algèbre. Nous considérons pour cela que la tâche est globalement de niveau mobilisable.

❖ **Exercice 4** (Test n° 1, 05/01/2006)

> Pour tous n$\in$ **N*** et a$\in$ **Z**, on note $cl_n(a)$ la classe de a dans $\mathbf{Z}/_{\mathbf{nZ}}$.
> Soient n et p deux entiers naturels non nuls.
> On considère la correspondance :
> $$\varphi \ : \ \mathbf{Z}/_{\mathbf{npZ}} \to \mathbf{Z}/_{\mathbf{nZ}} \times \mathbf{Z}/_{\mathbf{pZ}}$$
> $$\varepsilon \mapsto (cl_n(x)\ ,\ cl_p(x))$$
> où x est un entier relatif tel que $\varepsilon = cl_{np}(x)$
> 1) Montrer que φ définit une application de $\mathbf{Z}/_{\mathbf{npZ}}$ vers $\mathbf{Z}/_{\mathbf{nZ}} \times \mathbf{Z}/_{\mathbf{pZ}}$.
> 2) On suppose que n $\wedge$ p = 1.
> Montrer que φ est un isomorphisme du groupe ($\mathbf{Z}/_{\mathbf{npZ}}$, $\hat{+}$) sur le groupe ($\mathbf{Z}/_{\mathbf{nZ}} \times \mathbf{Z}/_{\mathbf{pZ}}$, $\dot{+}$).

Commentaire

La première question de l'exercice fait intervenir une tâche de type $\mathcal{T}_1$ et la deuxième une tâche de type $\mathcal{T}_7$. L'exercice se situe dans le contexte de l'arithmétique dans **Z**. Les notions de classe d'équivalence, congruence dans **Z** et divisibilité dans **Z** sont en jeu.

Question 1

Il s'agit de montrer que $\varphi : \mathbf{Z}/_{\mathbf{npZ}} \to \mathbf{Z}/_{\mathbf{nZ}} \times \mathbf{Z}/_{\mathbf{pZ}}$, $\varepsilon \mapsto (\mathrm{cl}_n(x), \mathrm{cl}_p(x))$ (où $\varepsilon = \mathrm{cl}_{np}(x)$) définit bien une application. Une première difficulté résulte de la formulation de $\varphi(\varepsilon)$, où la dépendance entre ε et $\varphi(\varepsilon)$ n'est pas directement explicitée. Il faut par ailleurs identifier la tâche à réaliser pour prouver que φ est bien définie. Il s'agit précisément de montrer que si $\varepsilon = \mathrm{cl}_{np}(x_1) = \mathrm{cl}_{np}(x_2)$, où x_1 et x_2 sont deux entiers relatifs, alors : $(\mathrm{cl}_n(x_1), \mathrm{cl}_p(x_1) = (\mathrm{cl}_n(x_2), \mathrm{cl}_p(x_2)$. Ceci suppose que l'étudiant connaisse ce qui caractérise la définition d'une application et aussi qu'une classe d'équivalence peut avoir plus d'un représentant.

En supposant que la tâche est bien identifiée, nous résumons dans le tableau suivant les étapes d'une solution possible :

Hypothèse	Résultats obtenus	Connaissances utilisées
$cl_{np}(x_1)=cl_{np}(x_2)$	$\Rightarrow \quad x_1 \equiv x_2 \quad [np]$	Définition d'une classe d'équivalence modulo n
	$\Rightarrow$ np | $x_1 - x_2$	Définition de la relation de congruence
	$\Rightarrow n \vert x_1 - x_2$ et $p \vert x_1 - x_2$	Propriété de divisibilité
	$\Rightarrow x_1 \equiv x_2$ [n] et $x_1 \equiv x_2$ [p]	Définition de la relation de congruence
	$\Rightarrow cl_n(x_1) = cl_n(x_2)$ et $cl_p(x_1) = cl_p(x_2)$	Définition des classes d'équivalence modulo n

Outre la connaissance de la définition générale d'une application et l'identification de la tâche à réaliser, la réponse à cette question fait intervenir des notions et des propriétés d'arithmétique dans **Z**. C'est le bloc $[\theta, \Theta]$ qui est concerné par la tâche à réaliser. Le sujet doit pouvoir adapter la définition générale d'une application au contexte de l'exercice, ce qui requiert une bonne familiarité avec la notion de classe d'équivalence. Toutefois, l'usage fait des congruences ici est assez standard en CPS1. Nous considérons pour cela que la tâche est de niveau mobilisable.

Question 2

Il s'agit de montrer que l'application $\varphi : \varepsilon \mapsto (\mathrm{cl}_n(x), \mathrm{cl}_p(x))$ est un isomorphisme du groupe ($\mathbf{Z}/\mathbf{npZ}$, $\hat{+}$) sur le groupe ($\mathbf{Z}/\mathbf{nZ} \times \mathbf{Z}/\mathbf{pZ}$, $\dot{+}$).

La tâche relative au morphisme est une application immédiate de la définition, nous nous intéressons particulièrement à la bijectivité de φ. C'est une tâche de type $\mathcal{T}_7$. Deux stratégies de résolution sont possibles :

***Strat. 1* :** On montre que φ est injective et surjective

***Strat. 2* :** Tenant compte du fait que l'application φ est définie entre deux ensembles finis de même cardinal np, il suffit de montrer que φ est injective ou surjective.

Nous adoptons ici la stratégie qui consiste à montrer que φ est injective. Plusieurs techniques sont possibles :

tech₁ : Elle utilise l'un des énoncés définissant une injection

tech₂ : Elle utilise le fait que φ est un morphisme de groupes, il suffit dans ce cas de montrer que $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{\mathrm{cl}_{np}(0)\}$. Cette technique donne une solution économique à la tâche par rapport aux autres techniques. Nous résumons dans le tableau suivant les étapes constituant cette technique :

Soient ε dans $\mathbf{Z}/_{\mathbf{npZ}}$ et x dans $\mathbf{Z}$ tel que $\varepsilon = cl_{np}(x)$.

Hypothèse	Résultats obtenus	Connaissances utilisées
$\varepsilon \in$ Ker φ	$\Rightarrow \varphi(cl_{np}(x)) = (cl_n(0), cl_p(0))$	Définition de Ker *f*
	$\Rightarrow cl_n(x)=cl_n(0)$ et $cl_p(x)=cl_p(0)$	Egalité de deux couples
	$\Rightarrow x \equiv 0 \quad [n]$ et $x \equiv 0 \quad [p]$	Définition de la classe d'équivalence modulo n
	$\Rightarrow n \mid x$ et $p \mid x$	Définition de la relation de congruence
	$\Rightarrow np \mid x \qquad (\text{car } n \wedge p = 1)$	**Théorème** : Si un entier est divisible par deux entiers premiers entre eux, il est divisible par leur produit.
	$\Rightarrow x \equiv 0 \quad [np]$	Définition de la relation de congruence
	$\Rightarrow cl_{np}(x) = cl_{np}(0)$	Définition de la classe d'équivalence modulo n
	$\Rightarrow \varepsilon = cl_{np}(0)$	Hypothèse : $cl_{np}(x) = \varepsilon$

Ceci montre que Ker $\varphi \subset \{cl_{np}(0)\}$. L'inclusion réciproque est généralement admise, elle est toujours vérifiée.

Cette tâche admet plusieurs techniques de réalisation. Effectuer un choix adéquat de stratégie et de technique de travail demande une bonne appropriation de la situation et la connaissance des différents points de vue caractérisant la propriété de bijectivité. Toutefois, quelle que soit la caractérisation de bijection choisie, le travail sur les congruences qui s'ensuit est, à de petites modifications prés, similaire d'une technique à l'autre et il est assez standard comme dans la tâche précédente. Nous considérons là encore qu'il s'agit d'une tâche de niveau mobilisable.

Exercice 5 (Série n° 5, 2005/2006)

Soit A = {0,1} un anneau intègre à deux éléments. E étant un ensemble quelconque, on considère l'anneau ($\mathcal{F}$(E, A), +, **.**) des applications de E dans A.

1) Montrer que tout a ∈ $\mathcal{F}$(E, A) est idempotent. Quels sont les diviseurs de zéro de cet anneau ?
2) A tout a ∈ $\mathcal{F}$(E, A) on associe $X \in \mathcal{P}(E)$ tel que $X = \{x \in E / a(x) = 1\}$
   i) Montrer que l'application $\Phi : a \mapsto \Phi(a) = X$ est une bijection de $\mathcal{F}$(E, A) sur $\mathcal{P}$(E).
   ii) Montrer que si $\Phi(a) = X$ et $\Phi(b) = Y$, alors $\Phi(a+b) = X \Delta Y$ et $\Phi(a.b) = X \cap Y$

   En déduire que ($\mathcal{P}$(E), Δ, $\cap$) est un anneau isomorphe à ($\mathcal{F}$(E, A), +, **.**)

Commentaire

L'exercice s'inscrit dans le contexte d'étude des anneaux. Nous nous intéressons particulièrement à la deuxième question. Celle-ci fait intervenir des tâches de types $\mathcal{T}_7$ et $\mathcal{T}_8$. La définition de Φ, la nature des éléments des ensembles de départ et d'arrivée et le symbolisme utilisé pourraient constituer des obstacles à la résolution ou être sources d'erreurs. Les principales connaissances en jeu concernent les opérations entre ensembles et l'image réciproque d'une partie par une application.

Question 2-i

Il s'agit d'une tâche de type $\mathcal{T}_7$. Deux techniques sont possibles :

tech₁ : Montrer que Φ est injective et surjective

tech₂ : Montrer que pour tout X dans $\mathcal{P}$(E), il existe une application a dans $\mathcal{F}$(E, A) unique telle que $\Phi(a) = X$.

Il est intéressant de remarquer que $\Phi(a) = a^{-1}(\{1\})$. Ceci met en évidence la dépendance entre a et son image et permet de simplifier certains calculs. Nous analysons la tâche selon les deux techniques indiquées.

1) Avec la technique 1

- Φ *est injective*

Soient a et b deux éléments de $\mathcal{F}$(E, A) tels que : $\Phi(a) = \Phi(b)$. Alors : $a^{-1}(\{1\}) = b^{-1}(\{1\})$. On en déduit que l'on a aussi : $a^{-1}(\{0\}) = b^{-1}(\{0\})$. Car A ne contient que 0 et 1. Ceci montre que $a = b$, et par suite que Φ est injective.

- Φ *est surjective*

Soit X $\in \mathcal{P}$(E). L'application $a : E \to A$ définie par : $a(x) = 1$, si $x \in X$ et $a(x) = 0$, si $x \notin X$, vérifie : $\Phi(a) = X$. Ceci montre que Φ est surjective.

2) Avec la technique 2

On fait un travail identique à celui réalisé pour montrer que Φ est surjective, puis on remarque que l'application "a" ainsi construite est unique car A ne contient que 0 et 1.

Il nous semble que pour l'une ou l'autre des deux techniques, la réalisation de la tâche est étroitement liée à la possibilité de s'approprier du sens du symbolisme mis en œuvre et à la possibilité de gérer adéquatement ce symbolisme. Par ailleurs, les deux techniques demandent une adaptation de la définition de bijection à la situation de l'exercice, ce qui ne semble pas évident : il faut construire une application sous contrainte, mettre cette construction en relation avec l'hypothèse que A contient seulement deux éléments et utiliser, implicitement ou explicitement, la notion d'image réciproque d'une partie par une application. La tâche nous semble pour ces raisons de niveau disponible.

Question 2-ii

Il s'agit d'une tâche de type $\mathcal{T}_8$. La première partie de la question indique la stratégie à adopter pour montrer que ($\mathcal{P}$(E), $\Delta, \cap$) est un anneau isomorphe à ($\mathcal{F}$(E, A), +, **.**). En effet, en montrant que $\Phi(a+b) = \Phi(a)\Delta\Phi(b)$ et que $\Phi(a.b) = \Phi(a) \cap \Phi(b)$, on obtient que Φ est un morphisme pour les lois de ($\mathcal{F}$ (E, A), +, **.**) et($\mathcal{P}$ (E), $\Delta,\cap$). Comme Φ est bijectif et ($\mathcal{F}$(E,A), +, **.**) a la structure d'anneau, le théorème sur le transfert des structures permet de conclure.

La démonstration des égalités $\Phi(a+b)=\Phi(a)\Delta\Phi(b)$ et $\Phi(a.b)=\Phi(a)\cap\Phi(b)$ met en œuvre les opérations sur les ensembles et demande une bonne familiarisation avec le langage ensembliste. Nous démontrons à titre d'exemple la première égalité :

On a $\Phi(a)=X=\{x\in E, a(x)=1\}$ et on note $\overline{X}=E-X=\{x\in E, a(x)=0\}$. De même, $\Phi(b)=Y=\{x\in E, b(x)=1\}$ et $\overline{Y}=\{x\in E, b(x)=0\}$.

$$x\in\Phi(a+b) \quad\Leftrightarrow\quad a(x)+b(x)=1$$

$$x\in\Phi(a+b) \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} a(x)=1 \text{ et } b(x)=0 \\ \text{ou} \\ a(x)=0 \text{ et } b(x)=1 \end{cases}$$

$$x\in\Phi(a+b) \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x\in X \text{ et } x\in\overline{Y} \\ \text{ou} \\ x\in\overline{X} \text{ et } x\in Y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in X\cap\overline{Y} \\ \text{ou} \\ x\in\overline{X}\cap Y \end{cases}$$

D'où : $\Phi(a+b)=(X\cap\overline{Y})\cup(\overline{X}\cap Y)=X\Delta Y$

La réalisation de cette tâche comprend plusieurs étapes et met en œuvre des notions de différents thèmes d'étude (notamment : ensembles et applications, structure d'anneau), il y a lieu aussi de connaître la manière avec laquelle seront traitées les égalités ensemblistes à démontrer (par équivalence ou par double inclusion). Un certain niveau d'abstraction est également requis pour pouvoir travailler en même temps dans un ensemble d'applications et dans un ensemble de parties et aussi pour adapter la caractérisation d'une bijection au contexte de l'exercice. Une bonne gestion du symbolisme en jeu est aussi nécessaire. Nous considérons pour cela que la tâche est de niveau disponible.

❖ **Exercice 6** (Série n° 5, 2005/2006)

Soit u un endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ de rang 1. 1. Montrer qu'il existe un réel k unique tel que $u^2=k.u$ 2. Montrer que si k est différent de 1, alors $(u-id_{R^n})$ est inversible. Exprimer son inverse (On pourra calculer u^2-u).

Commentaire

L'exercice fait intervenir des tâches de type $\mathcal{T}_{10}$ (caractériser une application), $\mathcal{T}_7$ (montrer qu'une application est bijective) et $\mathcal{T}_9$ (déterminer la réciproque d'une application bijective). Il se situe dans le domaine de l'algèbre linéaire et requiert une adaptation des notions ensemblistes concernées à ce contexte.

Tâche 1

Il s'agit de trouver un réel *k*, unique, tel que $u^2 = k.u$ (tâche de type $\mathcal{T}_{10}$). Les notions de rang, d'espace vectoriel de dimension finie et d'application linéaire sont en jeu ici. Une façon de procéder est :

rang(u)=1 signifie que $dim(Im\,u) = 1$. Si $< a >$ *désigne* une base de *Imu,* il existe alors un réel *k* tel que $u(a) = k.a$; et pour tout x dans $\mathbf{R}^n$, il existe un réel α_x tel que $u(x) = \alpha_x.a$, ce qui donne (puisque *u* est linéaire) : $u^2(x) = \alpha_x.u(a) = \alpha_x k.a = k.u(x)$. D'où $u^2 = k.u$.

Si on a aussi $u^2 = k'.u$, on en déduit : $(k - k').u = \tilde{0}$ (application nulle sur $\mathbf{R}^n$). *u*, étant de rang 1, n'est pas nulle ; on en déduit : $(k - k') = 0$. D'où l'unicité de k.

La réalisation de la tâche se fait en deux étapes (existence et unicité) et requiert la mise en relation de plusieurs notions d'algèbre linéaire (rang d'une application linéaire, dimension et base d'un ev, caractérisation de *Imu*). De plus, l'étudiant doit pouvoir mettre en évidence la particularité du scalaire *k* associé à la base $< a >$ par rapport à un scalaire α_x associé à un vecteur quelconque de $\mathbf{R}^n$, savoir exploiter la linéarité de *u* et gérer convenablement le passage de l'égalité entre images d'éléments à une égalité entre applications. Le problème de l'unicité de *k* aussi ne semble pas être évident. L'étudiant doit choisir une stratégie à adopter et savoir exploiter l'hypothèse que *u* est de rang 1. Pour toutes ces raisons nous considérons que la tâche est de niveau disponible.

Tâche 2

Il s'agit de montrer que pour $k \neq 1$, $(u - id_{R^n})$ est inversible (tâche de type $\mathcal{T}_7$). Deux stratégies sont possibles : montrer que $(u - id_{R^n})$ est bijective, ou déterminer une application réciproque à $(u - id_{R^n})$. La deuxième stratégie permet de répondre aux deux parties de la question en même temps. Toutefois, la formulation de la question suggère de séparer la tâche de bijectivité de celle de la détermination de la bijection réciproque. Nous adoptons ce point de vue dans la solution que nous proposons.

Tenant compte du fait que $(u - id_{R^n})$ est une application linéaire entre deux espaces vectoriels de mêmes dimensions finies, il suffit de montrer que $(u - id_{R^n})$ est injective (on peut aussi envisager d'utiliser une autre caractéristique de la bijectivité). Pour ce faire, on peut, soit utiliser la définition générale d'une injection, soit montrer que $Ker(u - id_{R^n}) = \{0_{R^n}\}$. Nous résolvons la question selon cette dernière technique :

Soit $x \in Ker(u - id_{R^n})$, c'est-à-dire $u(x) = x$, alors $u^2(x) = u(x)$.

Comme on a $u^2 = k.u$, il vient $k.x = x$. k étant différent de 1, alors $x = 0_{R^n}$ et $Ker(u - id_{R^n}) = \{0_{R^n}\}$. On en déduit que $(u - id_{R^n})$ est injective et par suite est bijective.

Pour réaliser cette tâche, l'étudiant est autonome : il doit choisir une stratégie de travail, reformuler la propriété de bijectivité dans le contexte de l'exercice, mettre la question en relation avec la propriété $u^2 = k.u$ et doit savoir exploiter l'hypothèse que k est différent de 1. Toutefois, dans le domaine de l'algèbre linéaire, cette technique est plus ou moins routinisée en CPS1 et les calculs à effectuer ne semblent pas poser des difficultés. Nous considérons pour cela que la tâche est de niveau mobilisable.

Tâche 3

Il s'agit de déterminer l'inverse de $(u - id_{R^n})$ (tâche de type $\mathcal{T}_9$). L'application *u* n'étant pas définie par son expression, la technique qui convient dans cette situation consiste en la détermination d'une application *v* telle que $(u - id_{R^n}) o v = v o (u - id_{R^n}) = id_{R^n}$. L'indication donnée ne permet pas une détermination immédiate de *v*. Une façon de procéder est la suivante :

De $u^2 = k.u$, on déduit : $u^2 - u = k.u - u$, ce qui s'écrit

$(u - id) o u = (k-1).u = (k-1)\big((u - id) + id\big)$

D'où $(u - id) o \left(\dfrac{1}{k-1}.u\right) = (u - id) + id$

Ce qui donne : $(u - id) o \left(\dfrac{1}{k-1}.u - id\right) = id$

et on vérifie facilement que $\left(\dfrac{1}{k-1}.u - id\right) o (u - id) = id$

On conclut que : $\left(u - id_{R^n}\right)^{-1} = \left(\dfrac{1}{k-1}.u - id\right)$.

La réalisation de la tâche demande tout d'abord de fixer une technique de travail adaptée au contexte de l'exercice. La technique que nous venons d'expliciter, tout en restant au niveau formel (on reste au niveau des applications), requiert un calcul réfléchi articulant les propriétés algébriques des opérations de l'algèbre ($\mathcal{L}$($\mathbf{R}^n$),+, **.** , o) des endomorphismes de $\mathbf{R}^n$. L'étudiant doit notamment savoir exploiter convenablement l'égalité $u^2 = k.u$ et réécrire *u* en *u-id+id* pour rendre productif le calcul algébrique sur les endomorphismes en jeu. Les opérations algébriques à effectuer dans ce contexte ne semblent pas évidentes non plus. Pour ces raisons, nous considérons que la tâche est de niveau disponible.

V. 3. Conclusion concernant le rapport de l'institution CPS1 aux notions ensemblistes fonctionnelles

Dans les exercices que nous venons d'analyser, nous remarquons que dans la plupart des tâches, généralement, le choix d'une stratégie de résolution, la justification ou l'interprétation du choix effectué, l'identification et la réalisation des techniques de travail, sont souvent laissés à la charge de l'étudiant. Ceci sur le plan stratégique. Au niveau des connaissances et des praxéologies mathématiques mises en œuvre, nous remarquons que le bloc technologico-théorique est souvent mobilisé dans la réalisation des techniques. Celles-ci sont rarement routinières, les tâches familières et d'application directe de cours sont aussi rares et le savoir mis en jeu fonctionne dans la plupart des cas au niveau formel/structurel. D'un autre côté, dans une même tâche, une notion fonctionnelle (injection, surjection et bijection) peut généralement être traitée selon plusieurs points de vue, selon le cadre de résolution choisi (ensembliste, algèbre des structures, algèbre linéaire), ce qui donne une multiplicité de techniques pour la réalisation de la tâche considérée. Il s'ensuit que les praxéologies mathématiques correspondant à de telles tâches peuvent être qualifiées de praxéologies locales permettant l'intégration des praxéologies ponctuelles correspondantes aux différents cadres de travail. Par ailleurs, même si nous constatons le manque dans les exercices analysés de praxéologies associés à des tâches ouvertes, en revanche, les tâches de construction ou de recherche (construire une application sous contraintes, montrer l'existence d'un élément d'un ensemble vérifiant une condition donnée…) occupent une place non négligeable dans ces exercices (de telles tâches sont parfois implicites et il revient à l'étudiant de les identifier comme dans le cas de l'exercice 1). Ce type de tâches, comme pour les problèmes ouverts, s'avère souvent problématique pour les étudiants, il requiert une bonne disponibilité des connaissances et des compétences de flexibilité ainsi que de la créativité. Par ailleurs, conformément aux recommandations institutionnelles stipulant d'éviter toute étude axiomatique des théories sous-jacentes aux thèmes d'étude (théories des ensembles, des groupes, des idéaux…), nous remarquons l'absence de praxéologies mathématiques de niveau régional dans les exercices analysés. En fait, les exercices et problèmes traités en travaux dirigés, bien qu'ils soient d'un niveau technologique assez développé, se limitent néanmoins à l'aspect opératoire des mathématiques enseignés, celui qui fait apparaitre la portée des concepts enseignés, la richesse du symbolisme mis en jeu et la spécificité des méthodes de travail mathématiques, sans s'engager dans les problèmes de fond relatifs à l'apparition des concepts et/ou à l'émergence des théories. Nous notons d'un autre côté, le rapprochement, dans l'institution CPS1, du niveau du discours technologique utilisé dans les développements théoriques des cours et de celui requis dans la mise en œuvre des praxéologies mathématiques dans les TD et les devoirs. Ceci est, d'une part attesté par la fréquente intervention du bloc technologico-théorique dans les praxéologies mathématiques étudiées, et d'autre part justifié par l'objectif de formation que vise l'institution CPS1 pour ses sujets apprenants. Finalement, nous remarquons que le niveau technique de mise en fonctionnement des connaissances est sous-estimé dans l'institution CPS1, ils n'intervient que comme ingrédient aux autres niveaux de travail.

En conclusion, dans l'institution CPS1, le niveau institutionnel de fonctionnement des connaissances, pour les notions ensemblistes fonctionnelles, est intermédiaire entre le mobilisable et le disponible, et nous ne trouvons pas de grand écart entre le fonctionnement des connaissances dans le topos des étudiants et dans celui des enseignants. Les connaissances mises en œuvre fonctionnent essentiellement au niveau formel/structurel. En revanche, nous notons une sous-estimation des besoins d'apprentissage de niveau technique ou procédural.

VI. Conclusion générale pour l'étude des rapports institutionnels

Nous récapitulons dans le tableau suivant les principaux résultats établis dans l'étude des rapports des institutions ES et CPS1 aux notions ensemblistes fonctionnelles.

Tableau 15 : Comparaison des caractéristiques des environnements praxéologiques des institutions ES et CPS1

	Institution ES	**Institution CPS1**
Niveau dominant des praxéologies	Ponctuel	Local
Caractéristique dominante des techniques	Rigide/Moyennement rigide	Non rigide
Mode d'intervention des praxéologies le plus fréquent	$[T, \tau]$	$[\theta, \Theta]$
Niveau de mise en fonctionnement des connaissances	Technique (Procédural)	Mobilisable/Disponible (Formel/Structurel)
Ecart entre le fonctionnement des connaissances dans le topos des apprenants et dans celui des enseignants	Fort	Faible

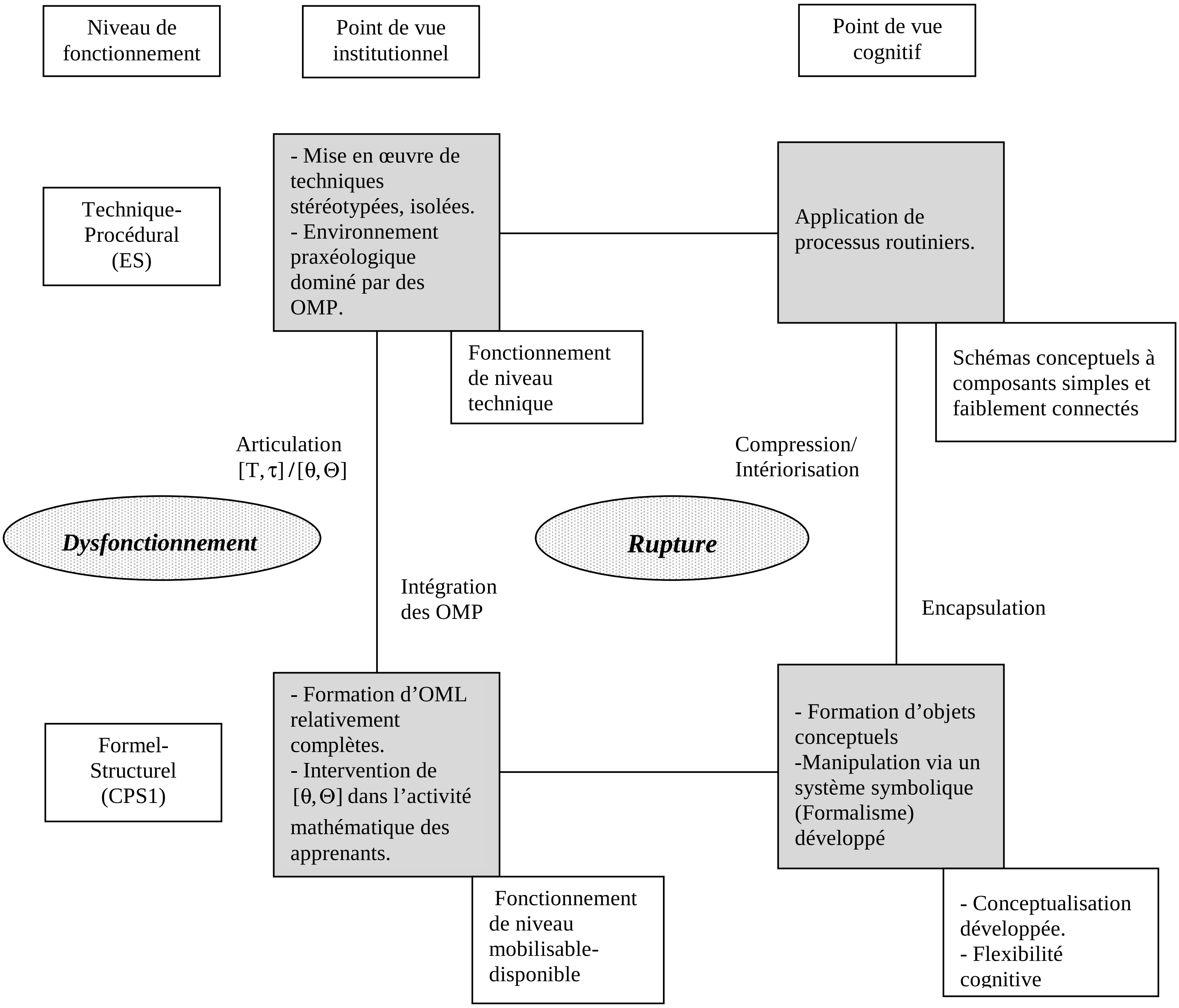
Un premier constat qui découle de notre étude est que dans chacune des institutions ES et CPS1, les environnements praxéologiques relatifs à l'étude des notions ensemblistes fonctionnelles obéissent globalement aux objectifs de formation visés par chacune des institutions pour ses sujets apprenants. Dans l'enseignement secondaire, les notions ensemblistes fonctionnelles n'étant pas considérées par l'institution comme un objectif d'étude, leur mise en fonctionnement, dans le topos des élèves, se limite essentiellement au niveau technique. Ceci apparaît à travers les organisations mathématiques concernées par les exercices et problèmes donnés dans les manuels officiels et aussi par les extraits des sujets de Baccalauréat relatifs à l'usage des dites notions. Ces organisations se caractérisent par une prédominance de praxéologies mathématiques ponctuelles et isolées, dont l'intervention se localise le plus souvent au niveau pratico-technique et dont la plupart des techniques associées sont rigides et relativement stéréotypées. Dans ces conditions, l'usage des notions ensemblistes fonctionnelles se réduit, pour l'élève, au niveau procédural (Tall, 1997), où le travail est centré sur la reproduction de techniques répertoriées dans des tâches bien définies et sur un usage réglementé d'ostensifs permettant de réaliser certaines tâches sans que la considération du contenu conceptuel de ces ostensifs ou des notions ensemblistes qui leur sont sous-jacentes ne soit obligatoirement convoquée. D'un autre côté, dans les démonstrations des théorèmes et propriétés du cours, les auteurs des manuels, contraints de se conformer aux normes institutionnels de rigueur et de précision mathématiques, font usage d'un discours technologique formel, où les notions ensemblistes fonctionnelles sont employées à un niveau plus ou moins structurel et fonctionnent à un niveau mobilisable-disponible. Se crée ainsi un écart entre le niveau de fonctionnement des notions ensemblistes fonctionnelles dans les développements théoriques des leçons et celui présent dans le topos de l'élève. Cet écart pourrait conduire à une négligence de la part des élèves envers les contenus théoriques enseignés (notamment les démonstrations, du moment que les techniques, les démarches et le formalisme qui y sont mis en jeu ont peu d'incidence sur le travail qu'ils sont appelés à réaliser) ce qui influencerait leur formation mathématique (en ce qui concerne les notions ensemblistes fonctionnelles) qui se trouverait essentiellement réduite au niveau *Technique-Procédural*.

Dans les classes préparatoires scientifiques, en revanche, l'environnement praxéologique dans lequel évolue l'activité mathématique des étudiants est dominé par des praxéologies mathématiques locales relativement complètes, intégrant des praxéologies ponctuelles associées à différents cadres de travail, comportant le plus souvent une forte composante technologico-théorique et fonctionnant à un niveau intermédiaire entre le mobilisable et le disponible. Les techniques associées à ces praxéologies sont le plus souvent non rigides, le choix et la mise en œuvre de celles-ci, laissés généralement à la charge de l'étudiant, requièrent une bonne disponibilité de connaissances, une flexibilité de pensée et une maîtrise du formalisme souvent nouveau mis en jeu. *Les notions ensemblistes fonctionnelles fonctionnent dans ces conditions au niveau Formel-Structurel*, et leur emploi se rapproche, au niveau des méthodes et du discours technologique, du fonctionnement qui est le leur dans les développements théoriques associés. Sur le plan cognitif, ce fonctionnement correspond à un niveau conceptuel (pour les notions concernées) assez avancé, caractérisé chez les sujets par des unités cognitives compressées et suffisamment connectées (Barnard & Tall, 1997). Se pose alors la question des possibilités qu'offrent les choix institutionnels concernant l'enseignement des notions ensemblistes fonctionnelles dans les institutions ES et CPS1, pour favoriser l'accès à ce niveau conceptuel et de fonctionnement.

Selon l'approche cognitive, le passage du niveau *Technique-Procédural*, auquel est réduit l'usage des notions ensemblistes fonctionnelles dans le Secondaire, au niveau *Formel-Structurel*, qui caractérise l'usage des mêmes notions en CPS1, s'effectue via des opérations de compressions et d'intériorisation mentales des processus routiniers appliqués au niveau procédural, conduisant progressivement à l'encapsulation de ces processus en des objets (qui, selon Tall, peuvent être des concepts, des définitions, des théorèmes…) pensables et manipulables via un symbolisme précis, permettant une bonne conceptualisation des concepts enseignés et une flexibilité dans leur usage. Ceci peut être mis en relation avec les opérations d'intégration des praxéologies mathématiques ponctuelles (OMP) dans de praxéologies mathématiques locales (OMP) relativement complètes, en assimilant les processus routiniers de l'approche cognitive aux techniques rigides et isolées des OMP, et la transition vers des OML relativement complètes, comme un moyen de dépasser le niveau technique de fonctionnement des connaissances. De ce point de vue, la transition cognitive *procédural / Structurel* est à rapprocher, du côté praxéologique, de la transition *Ponctuel / Local* et ceci nous conduit à nous interroger quant aux facteurs, au niveau de l'enseignement, intervenant dans l'opération d'intégration des OMP en des OML pouvant favoriser le passage du niveau *Procédural* au niveau *Structurel* sur le plan cognitif.

Pour Bosch et al. (2004), on ne peut attendre des étudiants qu'ils construisent spontanément par eux-mêmes des OML relativement complètes, cette construction doit être prise en charge par l'institution via des organisations didactiques et mathématiques adaptées, favorisant l'articulation entre les blocs $[T/\tau]$ et $[\theta/\Theta]$ et faisant apparaître l'intérêt des éléments technologiques ou théoriques enseignés. Or, d'une part, l'étude du rapport institutionnel dans l'institution ES a mis en évidence une centration sur le travail technique et une insuffisance dans la mise en œuvre du bloc technologico-théorique $[\theta/\Theta]$ dans le travail des élèves, ce qui a conduit à des difficultés pour l'intégration des OMP dans des OML relativement complètes, et d'autre part, l'étude du rapport institutionnel dans l'institution CPS1 a fait apparaître une négligence quant au travail d'ordre technique et une prédominance des OML dans l'environnement praxéologique. Le bloc pratico-technique $[T/\tau]$ en CPS1 se trouve le plus souvent déconnecté du bloc technologico-théorique $[\theta/\Theta]$ et ne joue qu'un rôle auxiliaire dans l'apprentissage des théories, et les OML évoquées sont supposés disponibles avec un degré suffisant de complétude, ce qui est contraire à ce que nous avons constaté dans l'institution ES. Il y a là une rupture et un dysfonctionnement dans le spectre des organisations praxéologiques au niveau de la transition ES/CPS1 (cf. diagramme 3 ci-dessous), conduisant naturellement à des difficultés d'apprentissage pour les étudiants dans l'institution CPS1. Dans les chapitres suivants, nous étudions les effets de ce dysfonctionnement institutionnel sur les possibilités d'apprentissage et de réussite des étudiants dans leurs cursus universitaire.

Diagramme 3 : Correspondance Praxéologique/Cognitive dans la transition ES/CPS1



Chapitre III : Rapports personnels des étudiants de CPS1 aux notions ensemblistes fonctionnelles

Dans ce chapitre, nous étudions les rapports des étudiants de l'institution Première année des Classes préparatoires scientifiques (CPS1) aux notions ensemblistes fonctionnelles. Cette étude se fera en deux parties : dans la première partie nous nous intéresserons aux rapports des étudiants aux notions ensemblistes fonctionnelles avant le début de l'enseignement dans l'institution du supérieur. Nous nous appuierons pour cela sur un test diagnostique passé par les étudiants le premier jour de la rentrée dans les classes CPS1. Ce test vise à faire un état des lieux des connaissances (savoirs et méthodes de travail) des étudiants à propos des notions ensemblistes fonctionnelles et à préciser *le niveau personnel de fonctionnement des connaissances* dominant chez ces étudiants à la fin de l'Enseignement Secondaire (ES). Ceci nous permettra d'apporter des éléments de réponse à la troisième question de notre recherche :

- Quelles connaissances ont les étudiants à propos des notions ensemblistes fonctionnelles à la fin de leurs études secondaires ?

La deuxième partie du chapitre est consacrée à l'étude de l'évolution du rapport personnel des étudiants aux notions ensemblistes fonctionnelles et de leurs aptitudes à mettre en œuvre ces notions dans la résolution des problèmes, au terme de deux trimestres d'enseignement dans l'institution CPS1. Un test d'évaluation a été, pour ce faire, proposé aux étudiants de l'institution CPS1 au début du troisième trimestre de l'année universitaire. Il visait à évaluer les progrès des étudiants concernant l'apprentissage des notions ensemblistes fonctionnelles et l'usage du symbolisme mathématique associé et à identifier les difficultés éventuelles qu'ils rencontraient dans la mise en œuvre de ces notions dans la résolution des problèmes. Cette seconde partie nous permettra d'apporter des éléments de réponse aux questions 4 et 5 de la thèse :

- Comment évoluent les rapports des étudiants de CPS1 aux notions ensemblistes fonctionnelles et au symbolisme mathématique associé ?
- Quelles sont les difficultés éventuelles qu'éprouvent les étudiants dans l'activité de résolution de problème dues à l'usage des notions ensemblistes fonctionnelles et du formalisme mathématique ? A quel niveau se situent ces difficultés, et quelles sont leurs origines ?

Nous conclurons en examinant les possibilités des étudiants à dépasser la rupture et le dysfonctionnement constatés dans les organisations praxéologiques relatives à l'enseignement des notions ensemblistes fonctionnelles dans la transition ES/CPS1.

I. Aperçu général sur la population concernée par les expérimentations

Les deux tests, diagnostique et d'évaluation, ont été passés par les étudiants de deux classes de CPS1 (filière Mathématiques-Physique) de l'Institut Préparatoire aux Etudes d'Ingénieurs de Tunis (IPEIT) au cours de l'année universitaire 2006/2007. Nous assurons nous-mêmes l'enseignement du cours d'Algèbre pour ces deux classes. Les classes comprennent ensemble 51 étudiants[49], le tableau ci-dessous donne leurs résultats de mathématiques, en classe terminale et au Baccalauréat ainsi que leur moyenne générale de réussite au Baccalauréat pour ces étudiants.

Tableau 1 : Niveau institutionnel des étudiants concernés par l'expérimentation

	Moyenne de mathématiques en classe terminale		**Note de mathématiques au Baccalauréat**		**Moyenne générale au Baccalauréat**	
Intervalles des moyennes et des notes (sur 20)	*Effectifs (sur 51)*	*Pourcentage*	*Effectifs (sur 51)*	*Pourcentage*	*Effectifs (sur 51)*	*Pourcentage*
$[14,17[$	19	37 %	12	23,5 %	44	86 %
$[17,20[$	32	63 %	39	76,5 %	7	14 %

Nous remarquons à travers ces données que tous les étudiants concernés par les expérimentations ont de bons résultats, aussi bien en classe terminale qu'à l'examen du Baccalauréat. Nous pouvons par suite considérer qu'il s'agit d'une population de « *bons sujets* » (Chevallard, 1989) dans l'institution de la classe terminale. Ce choix nous fournit un observatoire privilégié dont nous espérons qu'il répondra à nos attentes relatives à l'atténuation des facteurs personnels (négligence de la matière, manque de motivation pour les études menées…) relatifs à l'apprentissage des mathématiques au lycée et en CPS1, qui pourraient influer sur l'étude des effets des choix institutionnels concernant l'enseignement des mathématiques dans les institutions concernées.

II. Rapports personnels aux notions ensemblistes fonctionnelles dans l'institution ES

II.1. Organisation générale de l'expérimentation

II. 1. 1. Conception du test diagnostique

Conformément à l'objectif visé par l'expérimentation, les exercices du test diagnostique sont conçus de façon à nous permettre de :

1) Connaître l'état des connaissances des notions ensemblistes fonctionnelles chez les nouveaux bacheliers :

- Quelles définitions retiennent les étudiants à propos d'une application, d'une bijection ? Quels en sont pour eux des exemples prototypiques ?
- Quels moyens utilisent-ils pour reconnaître ces deux objets mathématiques ?

[49] Tous les étudiants sont issus de la section « Mathématiques » du Secondaire.

- Quelle importance accordent les étudiants aux différents éléments intervenant dans les définitions de ces deux concepts (ensemble de départ, ensemble d'arrivé, unicité de l'image, unicité de l'antécédent dans le cas d'une bijection)

2) Etudier la disponibilité de ces notions chez les étudiants dans la résolution de problèmes.

Par ailleurs, en vue d'amener les étudiants à centrer leur attention sur les notions qui intéressent notre travail et de réduire les erreurs pouvant être dues à l'usage d'autres notions, nous avons fait en sorte que les questions et exercices du test soient énoncés dans des contextes supposés assez familiers pour des élèves moyens de lycée et ne requièrent pas de connaissances approfondies relatives aux thèmes enseignés dans le Secondaire.

II. 1. 2. Contexte de l'expérimentation

Nous avons fait passer le test lors de notre premier contact avec les étudiants. Le test a été passé le même jour par les deux classes concernées sur deux plages horaires différentes mais qui ne permettaient pas d'échanges[50]. Nous avons accordé aux étudiants 1h 30' pour répondre aux questions posées, ce qui nous a semblé largement suffisant. D'ailleurs, la plupart des étudiants ont remis leurs copies avant la fin du temps accordé.

II. 1. 3. Méthodologie d'analyse

Pour l'analyse des productions des étudiants, nous nous sommes intéressés à quatre catégories de réponses selon lesquelles nous avons effectué le dépouillement des copies :

➢ Réponse correcte, convenablement rédigée et bien justifiée (si une justification est requise). Désignée par « **C+** ».

➢ Réponse correcte mais manque de précisions (dans la rédaction et/ou la justification) ou présence d'implicite. Désignée par « **C-** ».

➢ Réponse fausse. Désignée par « **F** ».

➢ Copie sans réponse. Désignée par « **SR** ».

Les réponses incomplètes seront considérées, soit dans la catégorie C-, soit dans F, selon ce que la partie fournie apporte à la réalisation de la tâche. Par ailleurs, pour distinguer les différentes solutions données par les étudiants à un exercice donné, tout en facilitant le dépouillement et le traitement statistique des résultats obtenus, nous avons regroupé, pour chaque exercice, les réponses que nous avons considérées comme similaires. Ces réponses se caractérisent par un même contenu mathématique avec de légères différences sur le plan de la rédaction. Donnons-en quelques exemples :

[50] De 9h à 10h 30'pour la première classe et de 10h 45' à 12h15' pour la deuxième classe. Pour le premier contact avec les étudiants, ceux-ci ne connaissaient pas encore leur enseignant avant l'entrée en classe.

Exemple 1

A la question : *Qu'est ce qu'une application de X vers Y ?*

Nous considérons comme similaires les réponses suivantes :

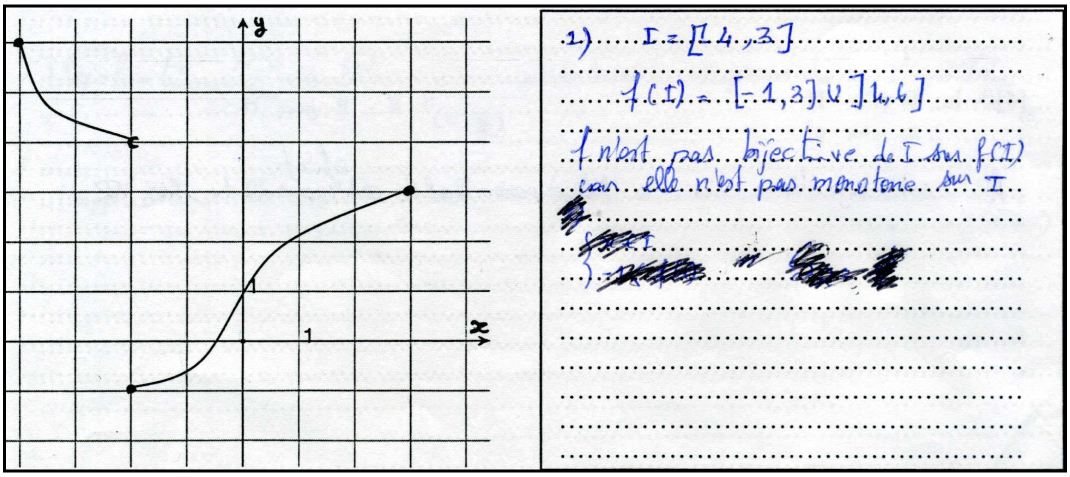
« *Une application de X vers Y est une relation où on associe à chaque élément de X un unique élément de Y* ».

« *Une application est une relation définie entre deux ensembles tel que chaque élément de l'ensemble de départ appelé antécédent possède une unique image appartenant à l'ensemble d'arrivé* ».

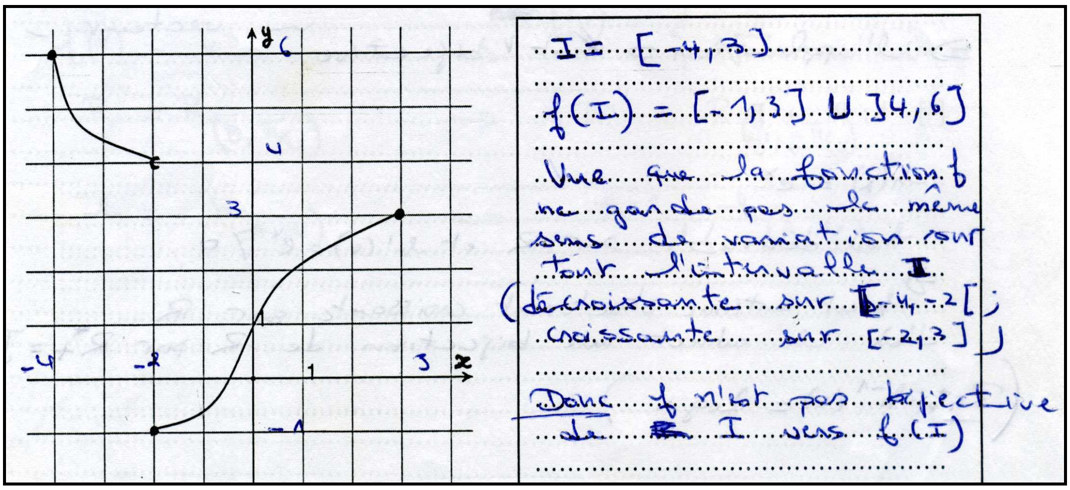
Exemple 2

Pour la question 3 de l'exercice 2 demandant de statuer sur la bijectivité de la fonction f à partir de sa représentation graphique, les réponses suivantes seront considérées comme similaires :

Réponse1



Réponse2



II. 2. Le test diagnostique

Pour chacun des exercices du test, nous effectuons au préalable une analyse a priori, puis nous analysons les réponses des étudiants à l'exercice[51].

II. 2. 1. Le premier exercice

II. 2. 1. 1. Analyse a priori

Exercice 1

> *X et Y désignent deux ensembles non vides.*
>
> *1- a) Qu'est ce qu'une application de X vers Y ?*
>
> *b) Donner trois exemples d'applications (une choisie dans le domaine de l'algèbre, une autre dans le domaine de la géométrie et la troisième quelconque mais définie entre deux ensembles finis).*
>
> *2-a) Soit f une application de X vers Y. Que signifie que f est bijective?*
>
> *b) Donner trois exemples simples de bijections (une algébrique, une autre géométrique et une troisième quelconque entre des ensembles finis). Donner la bijection réciproque de chacune d'elles.*

Analyse a priori

Dans le chapitre précédent, nous avons vu que les notions d'application et de bijection sont fort présentes dans les thèmes d'étude enseignés au lycée. Généralement, dans les manuels officiels du Secondaire, les exemples d'applications utilisés sont bien définis (d'un intervalle de **R** vers un intervalle de **R**, pour les fonctions numériques, et du plan vers le plan pour les transformations géométriques) et l'accent est surtout mis sur l'expression algébrique f(x) pour les fonctions numériques et sur les ostensifs spécifiques pour les transformations géométriques. L'aspect ensembliste est souvent invisible et inopérant dans l'usage de ces applications. Nous rencontrons dans les manuels officiels une seule fois la définition générale d'une application (donnée dans le manuel de première année secondaire) et une seule fois la définition d'une fonction numérique d'une variable réelle (donnée dans le manuel de deuxième année secondaire).

Notre objectif à travers cet exercice est de voir quelles définitions les étudiants retiennent d'une application et d'une bijection lorsqu'on ne se réfère pas aux cas particuliers où les ensembles de départ et d'arrivée sont des parties de **R** ou le plan. A travers les exemples que les étudiants vont fournir, nous estimerons également l'importance qu'ils accordent aux différents éléments qui interviennent dans la détermination de ces deux objets mathématiques (ensemble de départ, ensemble d'arrivée, unicité de l'image, unicité de l'antécédent dans le cas d'une bijection).

[51] Le texte complet du test diagnostique est donné en Annexe

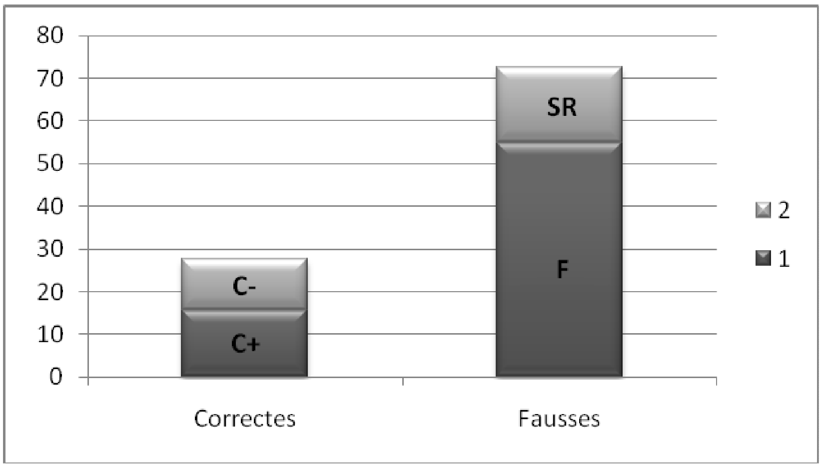
II. 2. 1. 2. Analyse des productions des étudiants

Question 1-a) Définition d'une application

Pour cette question, sur 51 copies, nous dénombrons : 14 réponses correctes dont 8 sont convenablement rédigées, 28 réponses fausses et 9 copies sans réponse. Le tableau et le graphique ci-dessous illustrent ces résultats.

Tableau 2 : Classement des réponses pour « Définition d'une application »

Types de réponses	Effectifs	Pourcentage
Réponses correctes	14	27,5 %
Réponses fausses	28	55 %
Sans réponse	9	17,5 %



Graphique 1 : Définition d'une application (en %)

Pour chacune des catégories de réponses selon lesquelles nous avons fait le classement, nous rapportons dans le tableau ci-dessous des exemples des réponses les plus fréquentes données par les étudiants.

Tableau 3 : Exemples de « Définition d'une application »

	Exemples de réponses	Commentaire	Type de réponses et Fréquence
Réponses correctes	**R$_1$** : *Une application de X vers Y est une relation où on associe à chaque élément de X un unique élément de Y.*	Dans ces types de réponses, où la définition donnée est correcte et précise, nous rencontrons dans certaines rédactions des erreurs sur le plan du langage utilisé (Erreurs de vocabulaire, de construction…, comme c'est le cas dans **R$_2$**). Ces erreurs ne modifient en rien la rigueur mathématique de la définition donnée.	C_+ (15,5 %)
	R$_2$: *Tout élément appartenant à un ensemble (X) qui a une seul image dans la partie (Y), cette relation est une application.*		
	R$_3$: *Une application associe à chaque point d'un ensemble de départ (ensemble des antécédents) une image unique de l'ensemble d'arrivée.*	Ici, les étudiants ne précisent pas ce qu'est une application en tant qu'objet mathématique (en l'occurrence, une relation entre deux ensembles). Ils se limitent à donner la caractéristique de la relation sans évoquer l'objet « relation ».	C_- (12 %)
	R$_4$: *On appelle application de X vers Y lorsque chaque élément de X possède une seule image dans Y.*		
Réponses fausses	**R$_5$** : *Une application de X vers Y est toute relation qui à chaque élément de l'ensemble de départ X associe un élément dans l'ensemble d'arrivée Y.*	Comme le montre ces exemples, les erreurs les plus fréquentes dans les réponses fausses sont : - non considération de l'unicité de l'image, - confusion entre la notion d'application et celle de bijection, - restriction de la notion d'application aux fonctions numériques ou complexes, sans la donnée de la condition caractéristique d'une application.	F (55 %)
	R$_6$: *Une application de X vers Y est une relation qui à tout élément de X associe un ou plusieurs élément de Y.*		
	R$_7$: *Une application de X vers Y est une fonction qui à chaque élément de X donne un et un seul élément de Y, et pour chaque élément de Y, il existe un seul antécédent x de X.*		
	R$_8$: *Une application de X vers Y est une fonction dont les éléments de départ sont définis dans un ensemble réel ou complexe et de même pour les éléments d'arrivée.*		
	R$_9$: *Une application est une transformation qui caractérise un ensemble de points, une courbe par exemple.*		

Commentaire

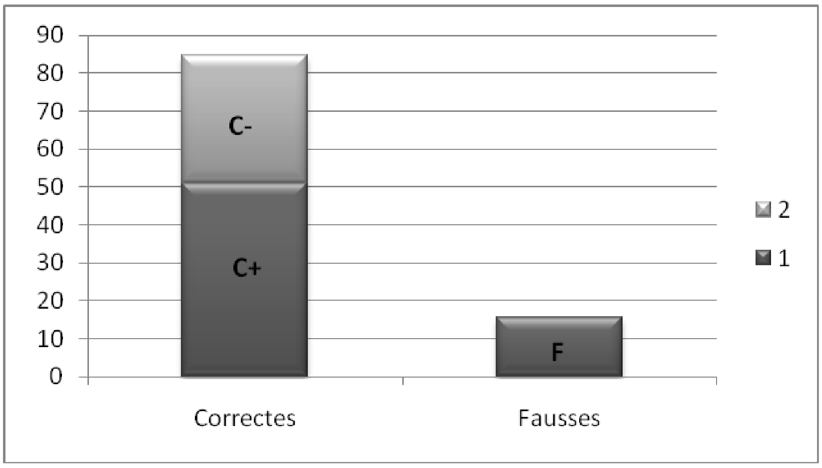
Pour cette question, nous remarquons que seulement 27,5 % des étudiants ont donné une réponse correcte, et un bon nombre de ces réponses (6 /14) manquent de précision. La majorité des étudiants (72,5 %) ne sont pas parvenus à donner une réponse correcte à la définition d'une application. La conception qui semble dominante pour ces étudiants est qu'une application est un moyen qui permet de relier des éléments entre eux. La notion de correspondance (ou de relation) existe, explicitement ou implicitement, dans toutes les réponses fausses. Néanmoins, la condition à laquelle doit satisfaire cette correspondance n'est pas connue de façon précise par ces étudiants. Nous remarquons aussi qu'il y a restriction de la notion d'application aux cas de fonctions numériques ou complexes. Ceci peut s'expliquer par le fait que c'est généralement dans ces situations que l'on utilise les ostensifs « application », « fonction » et « $x \mapsto f(x)$ », renvoyant à l'idée d'une application ou d'une correspondance dans l'enseignement secondaire, et que par contre, en géométrie, les transformations géométriques (opérant dans les exercices souvent sur des figures géométriques) et les ostensifs associés (homothétie : h(O,k), rotation $R(\Omega, \theta)$, symétrie orthogonale S_Δ, …) semblent avoir éloigné certains étudiants de la conception de correspondance ponctuelle pour ces transformations, ce qui les a amené à ne pas considérer ces transformations comme des exemples d'application.

Question 1-b) Exemples d'applications

Pour cette question, nous dénombrons 135 exemples d'application données par les étudiants (Certains étudiants se sont contentés de donner 1 ou 2 exemples seulement et non 3 comme le demande la question). Parmi ces applications il y a 114 réponses correctes, dont 69 sont convenablement explicitées et 21 réponses fausses. Le tableau et le graphique ci-dessous illustrent ces résultats.

Tableau 4 : Classement des réponses pour « Exemples d'applications »

Types de réponses	Effectifs	Pourcentage
Réponses correctes	114	84,5 %
Réponses fausses	21	15,5 %



Graphique 2 : Exemples d'applications (en %)

Les exemples d'applications donnés par les étudiants sont, dans leur majorité, choisis parmi les applications étudiées au lycée : applications affines, fonctions polynômes, fonctions rationnelles, translations, rotations, similitudes planes…. Nous trouvons aussi certains exemples originaux. Les méthodes de rédaction utilisées par les étudiants pour écrire les exemples choisis sont variées. Nous rapportons dans les tableaux ci-dessous les manières les plus fréquentes utilisées dans l'écriture des applications données.

Tableau 5 : Réponses correctes de type (C+)
(Applications convenablement explicitées)

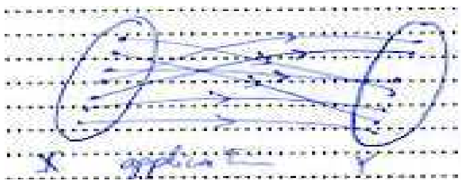
Exemples de réponses				Fréquence
1) $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ $x \mapsto x^2 + 2x$	2) $f : \mathbf{N} \to \mathbf{Z}$ $x \mapsto -x$	3) $f : \{0,2\} \to \{1,3\}$ $x \mapsto x + 1$	4) $f : [-\pi,\pi] \to [-1,1]$ $x \mapsto \sin x$	
5) $g : [0,1] \to [0,7]$ $t \mapsto 7t^2$	6) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+^*$ $x \mapsto e^x$	7) $f : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}_+$ $x \mapsto 2 \,\mathrm{Log}\, x - 1$	8) $f : [1,2] \to [1,\sqrt{2}]$ $x \mapsto \sqrt{x}$	
9) $E : \mathbf{R} \to \mathbf{Z}$ $x \mapsto E(x)$ (partie entière de x)	10) $f : \mathbf{P} \to \mathbf{P}$ $M(z) \mapsto M'(z')$ t.q : $z' = 2e^{i\theta} z - i$	11) $h_{(O,2)} : \mathbf{P} \to \mathbf{P}$ $M \mapsto M'$ tel que : $\overrightarrow{OM'} = 2.\overrightarrow{OM}$	12) $r_{(O,\theta)} : \mathbf{P} \to \mathbf{P}$ $M \mapsto r_{(O,\theta)}(M)$	
13) $f : \mathbf{R}^* \to \mathbf{R}$ $x \mapsto \dfrac{3x^2 - 1}{x}$	14) L'identité du plan est une application du plan dans le plan	15) $h : \mathbf{P} \to \mathbf{P}$ $M(x,y \mapsto M'(x',y')$ t.q : $\begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = 2y + 3 \end{cases}$	16) $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ $(x,y) \mapsto x + y$	69 (51 %)
17) $s : \mathcal{C} \to \mathbf{R}_+$ $C(o, r) \mapsto p$ $\mathcal{C}$: ensemble des cercles du plan p : périmètre du cercle.	18) $\mathcal{V} \to \mathbf{R}_+$ $\vec{u} \mapsto \|\vec{u}\|$	19) 		

Tableau 6 : Réponses correctes de type (C-)
(Formulations correctes mais incomplètes ou/et imprécises)

Exemples de réponses	Commentaires	Fréquence
1) $f : X \to Y$ $x \mapsto y = ax + b$; avec $(a,b) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$.	Les ensembles X et Y ne sont pas précisés.	
2) $A \to C$ lettre $\mapsto$ chiffre A désigne l'ensemble des lettres et C désigne l'ensemble des chiffres.	La dépendance entre « lettre » et son image « chiffre » n'est pas précisée	
3) L'application qui à chaque personne on associe l'âge x: f : **Population** $\to$ **N** personne $\mapsto$ âge	L'ensemble « Population » n'est pas précisé	45 (33,5 %)
4) $f(x) = 5x + 2$, $f(x) = x$ 5) $f : x \mapsto x$ 6) Valeur absolue, racine carrée, la fonction affine. 7) La multiplication 8) La translation $t_{\vec{u}}$, une rotation, un déplacement…	Dans ces exemples, les applications données sont définies de façon générique. Les ensembles de départ et d'arrivée sont implicites.	

Tableau 7 : Réponses Fausses

Exemples de réponses	Commentaires	Fréquence
1) $f : [0,8] \to [1,20]$ $x \mapsto x^2$	Les intervalles de départ et d'arrivée ne se correspondent pas.	21 (15,5 %)
2) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $x \mapsto tg^2x + \cos x - \sin x$ 3) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $x \mapsto \frac{x^2}{2}$ - tg x + 1, $\mathbf{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$	Confusion entre application et fonction. (Au lycée on distingue ces deux notions. Une fonction est une application seulement si son ensemble de départ coïncide avec son domaine de définition)	
4) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}\backslash\{3\}$ $x \mapsto \frac{2x^2+5}{x-3}$	Confusion dans l'écriture des ensembles de départ et d'arrivée.	
5) $f(x) = \frac{1}{\cos x}$, $x \in [\pi, -\pi]\backslash\{\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\}$ et $f(x) \in [-1,1]$	Ensemble de départ mal écrit et ensemble d'arrivée faux.	
6) y = 2x + 3, est une application affine.	Problème d'ostensifs. Confusion entre les désignations d'une application, de sa courbe représentative et d'une équation de cette courbe.	
7) Si X droite et l'application sinus, on aura une sinusoïde qui est Y. 8) Si X désigne (xx') et l'application $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f : x \mapsto x^2$, on aura une parabole qui est Y.	Problèmes de langage.	
9) $g : P \to P$ $M(x,y) \mapsto M'(x',y')$, $N(x,y) \mapsto N'(x'',y'')$, tels que MN = M'N' 10) $h : P \to P$ $A(x,y) \mapsto \Delta : x + y = 0$ 11) $h : X_i \to Y_i$ $x_i \mapsto h(x_i) = y_i$, $i \in \mathbf{N}$ et $i \leq 10$.	Ces écritures établissent des correspondances quelconques qui ne désignent pas des applications. Il y a là confusion entre différentes notions.	

Soulignons que pour les exemples d'« applications » entre ensembles finis, la majorité des élèves qui ont répondu à cette question (19 sur 37) ont considéré comme ensemble fini un intervalle fermé de **R,** comme dans les exemples suivants :

$f : [0,1] \to [0,7]$ $t \mapsto t+7$	$g : [-1,1] \to [0,1]$ $x \mapsto x^2$
$h : [-\pi, \pi] \to [-1,1]$ $x \mapsto \sin x$	$E : [0,5] \to [0,5]$ $x \mapsto E(x)$

Commentaire

Nous remarquons tout d'abord que contrairement à la question 1-a, la majorité des réponses (84,5 %) à cette question sont correctes, dont plus que la moitié sont convenablement explicitées. Cette différence peut s'expliquer par la familiarité différente des étudiants avec les connaissances demandées dans chacune des deux questions. En effet, comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, la définition générale d'une application ne constitue pas un objectif d'apprentissage pour les élèves de Secondaire, et généralement, ces élèves rencontrent cette définition une ou deux fois au lycée sans que l'accent soit mis sur son apprentissage ou sur son utilisation. On passe rapidement ensuite à l'étude d'exemples d'applications. L'étude des fonctions numériques en analyse et des transformations géométriques en géométrie occupe la part essentielle des programmes de mathématiques du Secondaire et fournit aux élèves l'occasion de manipuler une grande variété d'applications, ce qui explique que les élèves n'aient pas éprouvé de difficultés pour répondre correctement à la question 1-b.

Ceci étant, pour les réponses correctes de type C+, nous remarquons que la majorité des exemples donnés (exemples 1 à 15) sont choisis dans le répertoire des applications étudiées et utilisées au lycée. Les exemples originaux (comme les exemples 16 à 19), sont rares (8/69). Les étudiants qui ont donné de tels exemples ont formulé correctement la définition d'une application dans la question précédente. Nous notons aussi la bonne gestion des correspondances entre ensemble de départ et ensemble d'arrivée, surtout dans les cas où ces ensembles sont distincts de **R** et de **P**.

Pour les réponses correctes de type C-, les insuffisances notées se trouvent généralement au niveau de la détermination des ensembles de départ et d'arrivée, ces ensembles sont ou bien implicites (pour les fonctions usuelles) ou bien ils ne sont pas complètement définis. L'accent est surtout mis sur la correspondance entre éléments de départ et éléments d'arrivée, bien que la dépendance entre ces éléments ne soit pas toujours bien explicitée.

Concernant les réponses fausses, nous remarquons d'abord que certains étudiants qui ont donné de tels exemples ont fourni un deuxième et parfois un troisième exemple correct. Ceci étant, nous pouvons classer les erreurs enregistrées dans les réponses fausses en trois catégories :

- Erreurs concernant la détermination des ensembles de départ et d'arrivée. Les ensembles donnés ne correspondent pas exactement aux domaines de variation des éléments correspondants.
- Erreurs sur le plan langagier, dues à des confusions entre le concept « application » (en tant qu'objet mathématique) et ses représentations dans d'autres registres sémiotiques.
- Erreurs où seulement l'aspect « correspondance » (entre ensembles et entre éléments) reste correct, avec un flou et/ou des incohérences au niveau du sens du symbolisme utilisé.

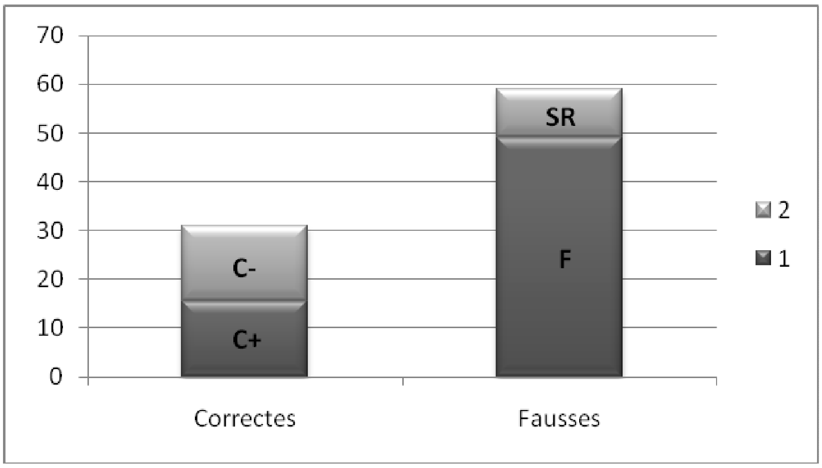
En conclusion, dans tous les exemples donnés par les étudiants, la notion de « correspondance » pour une « application » est toujours présente. Les imprécisions et erreurs les plus fréquentes se situent au niveau du choix des ensembles de départ et d'arrivée, qui, soit, ne sont pas complètement précisés, soit, ne correspondent pas aux domaines de variation des éléments correspondants. Ceci peut s'expliquer par le fait que pour les fonctions étudiées au lycée (dans le cours ou dans les exercices), les ensembles de départ et d'arrivée sont le plus souvent implicites (**R** pour les fonctions numériques et le plan pour les transformations géométriques) et, que généralement, on n'accorde pas d'importance au rôle que jouent ces deux ensembles dans la détermination d'une « application ». Même le domaine de définition d'une fonction numérique est regardé comme un concept lié à l'expression algébrique f(x) et non à la fonction f, ce qui explique la réponse des étudiants (il y en a eu 5) qui ont donné des exemples de type 4 (tableau 7). Notons finalement la confusion chez un bon nombre d'étudiants (19/51) entre les notions d'ensemble fini et d'intervalle de **R** de longueur finie.

Question 2-a) Définition d'une bijection

Pour cette question, sur 51 copies, nous dénombrons : 16 réponses correctes dont 8 sont convenablement rédigées, 30 réponses fausses et 5 copies sans réponse. Le tableau et le graphique ci-dessous illustrent ces résultats.

Tableau 8 : Classement des réponses pour « Définition d'une bijection »

Types de réponses	Effectifs	Pourcentage
Réponses correctes	16	31 %
Réponses fausses	30	59 %
Sans réponse	5	10 %



Graphique 3 : Définition d'une bijection (en %)

Nous rapportons dans le tableau ci-dessous les exemples les plus fréquents de réponses données par les étudiants.

Tableau 9 : Exemples de « Définition d'une bijection »

	Exemples de réponses	Commentaire	Type de réponses et Fréquence
Réponses correctes	**R_1** : *Une application f de X vers Y est dite bijective ssi chaque élément de Y possède un seul antécédent dans X.*	Ce type de réponses est caractérisé par une formulation correcte et précise.	C_+ (15,5 %)
	R_2 : *f est bijective ssi elle admet une application réciproque f^{-1}.*		
	R_3 : *f est une bijection $\Leftrightarrow$ $\forall$ $x \in X$, x admet une seule image $y \in Y$ et $\forall$ $y \in Y$, y admet un seul antécédent $x \in X$.*	La condition sur les éléments de *X* est inutile, du moment que dans l'hypothèse de l'exercice *f* est supposée une application.	C_- (15,5 %)
	R_4 : *f est bijective signifie que :* *- $\forall$ $x_1, x_2 \in D_f$, si $x_1 \neq x_2$ alors $f(x_1) \neq f(x_2)$* *- Chaque point de l'ensemble d'arrivée n'a qu'un seul antécédent.*	La première condition, qui traduit la propriété d'injectivité pour *f*, est inutile, du moment que l'unicité de l'antécédent est précisée pour les éléments de l'ensemble d'arrivée.	
Réponses fausses	**R_5** : *Une fonction bijective signifie que chaque élément de la partie image de f admet un unique antécédent dans le domaine de départ de f.*	Confusion entre ensemble d'arrivée et ensemble image.	F (59 %)
	R_6 : *f est bijective ssi* $\forall x \in X, \exists!\, y \in Y \,/\, f(x) = y$	Confusion entre les notions d'application et de bijection.	
	R_7 : *f est bijective* $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} -\ f \text{ est continue} \\ -\ f \text{ est strictement monotone} \end{cases}$ *d'où toute image $\in$ Y admet un seul antécédent dans X.*	Confusion entre la définition générale d'une bijection et la bijectivité des fonctions numériques. Pour ce type de fonctions, la condition (*f strictement monotone*) est suffisante mais pas nécessaire et la condition (*f continue*) est inutile.	
	R_8 : *f est bijective si chaque image appartenant à l'ensemble d'arrivée admet un unique antécédent de l'ensemble de départ, une fonction bijective admet nécessairement une fonction réciproque, graphiquement ce sera une courbe qui est continue et qui garde un même sens de variation.*	Il y a tout d'abord confusion entre élément de l'ensemble d'arrivée et élément image. Ensuite, la réponse donne l'idée que la propriété de bijectivité est liée aux fonctions numériques, puisqu'on évoque la courbe de *f* . Dans ce cas, comme dans **R_7**, la continuité de *f* est inutile.	
	R_9 : *f est bijective signifie qu'a tout élément de X elle associe un élément de Y et la relation est valable dans l'autre sens.*	La condition sur l'unicité de l'antécédent n'est pas indiquée.	
	R_{10} : *f est bijective c-à-d chaque élément de Y admet son antécédent dans X.*		
	R_{11} : *f est bijective signifie qu'il existe un unique $x \in D_f$ tel que $f(x) = y$.*	Il manque à préciser que ceci doit être pour tout *y* dans *Y*.	

Commentaire

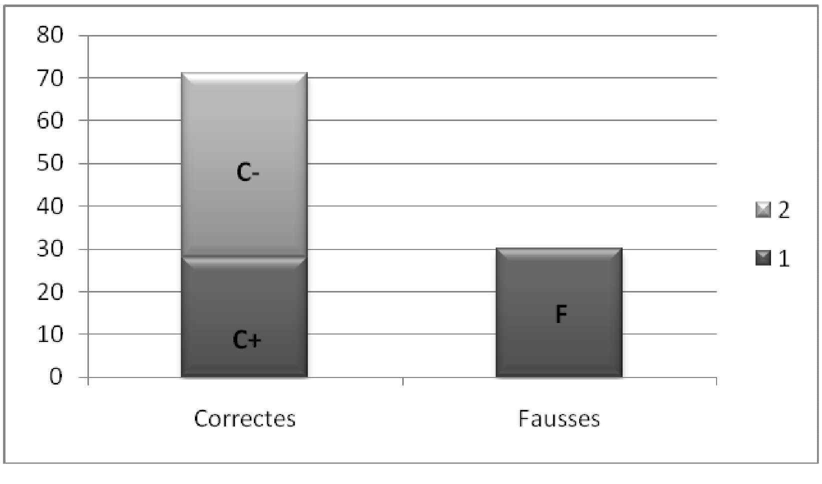
Pour cette question, il y a 31 % de réponses correctes, dont la moitié manque de précision et 69 % de réponses fausses ou de copies sans réponse. A part les réponses de types R_1 et R_2, dont la formulation est bien précise, les autres réponses reflètent un certain flou chez les étudiants à propos de la propriété de bijectivité. Pour les réponses de type C-, ce flou est du à un manque de précision quant à la condition suffisante liée à la propriété de bijectivité. Les étudiants ayant donné ce type de réponses ajoutent des conditions inutiles à ce propos. Pour les réponses fausses, il y a souvent un amalgame entre plusieurs notions ensemblistes liées à la notion d'application : ensemble d'arrivée/ensemble image, application/bijection, fonction bijective/fonction continue et strictement monotone… Ce genre de réponses, qui représente la majorité des réponses fausses (21/30), montre l'insuffisance dans la connaissance des notions ensemblistes de base chez les étudiants. Ceci reste compréhensible, dès lors que de telles précisions servent au lycée surtout dans les développements théoriques des cours, qui, généralement, restent à la charge de l'enseignant, alors que dans les exercices destinés aux élèves, les techniques de résolution ne requièrent pas l'usage d'un discours technologique formel, où la distinction entre les différentes notions ensemblistes s'avère essentielle. Nous regarderons dans l'analyse des exercices 2 et 3 qui suivent si les formulations imprécises ou fausses des étudiants ont des effets sur leurs possibilités à mettre en œuvre les techniques vues au lycée à propos de la vérification de la propriété de bijectivité.

Question 2-b) Exemples de bijections

Pour cette question, nous dénombrons 119 exemples d'applications données par les étudiants (la plupart des étudiants se sont contentés de donner 1 ou 2 exemples seulement, au lieu des trois demandés par l'énoncé). Dans ces réponses, il y a 84 réponses correctes, dont 33 sont convenablement rédigées (où la bijection et la bijection réciproque sont correctement explicitées) et 35 réponses fausses. Le tableau et le graphique ci-dessous illustrent ces résultats.

Tableau 10 : Classement des réponses pour « Exemples de bijections »

Types de réponses	Effectifs	Pourcentage
Réponses correctes	84	70,5 %
Réponses fausses	35	29,5 %



Graphique 4 : Exemples de bijections (en %)

Les exemples de bijections donnés par les étudiants sont, dans la plus part des cas, choisis parmi les applications bijectives usuelles dont l'étude figure dans le programme des mathématiques de la classe terminale. D'autres exemples sont toutefois donnés par certains étudiants. Nous rapportons dans les tableaux ci-dessous les exemples les plus fréquents de réponses données.

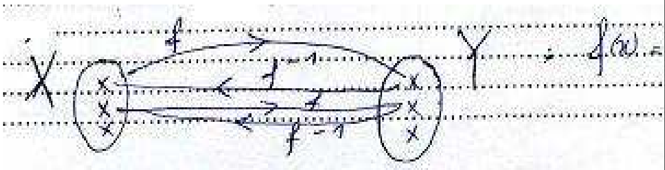
Tableau 11 : Réponses correctes de type (C+)
(Bijections et leurs réciproques convenablement explicitées)

Types de bijections	Bijections réciproques	Fréquence
1) $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ $x \mapsto x^2$	$f^{-1} : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ $x \mapsto \sqrt{x}$	33 (28 %)
2) $f : [2,+\infty[\to [4,+\infty[$ $x \mapsto x^2$	$f^{-1} : [4,+\infty[\to [2,+\infty[$ $x \mapsto \sqrt{x}$	
3) $f : [0,5] \to [1,11]$ $x \mapsto y = 2x+1$	$f^{-1} : [1,11] \to [0,5]$ $x \mapsto \frac{x-1}{2}$	
4) $f : \mathbf{P} \to \mathbf{P}$ $M(z) \mapsto M'(z') / z' = e^{i\frac{\pi}{2}}.z$	$f^{-1} : \mathbf{P} \to \mathbf{P}$ $M(z) \mapsto M'(z') / z' = e^{-i\frac{\pi}{2}}.z$	
5) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+^*$ $x \mapsto e^x$	$f^{-1} : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ $x \mapsto \ln x$	
6) $h : [1,2] \to [0, \text{Log}2]$ $x \mapsto \text{Log } x$	$h^{-1} : [0, \text{Log}2] \to [1,2]$ $x \mapsto e^x$	
7) $h(O,k) : \mathbf{P} \to \mathbf{P}$ $M \mapsto M'$ tel que $\overrightarrow{OM'} = k.\overrightarrow{OM}$. Avec $k \in \mathbf{R}^*$	$h(O,\frac{1}{k}) : \mathbf{P} \to \mathbf{P}$ $M \mapsto M'$; $\overrightarrow{OM'} = \frac{1}{k}.\overrightarrow{OM}$	
8) Rotation du plan de centre O et d'angle θ ($\theta \in \mathbf{R}$) : $R_{(O,\theta)} : \mathbf{P} \to \mathbf{P}$ $M \mapsto M' = R_{(O,\theta)}(M)$	Rotation de centre O et d'angle $-\theta$ $R_{(O,-\theta)} : \mathbf{P} \to \mathbf{P}$ $M \mapsto M'$	
9) $f : \{1,2, \dots ,n\} \to \{0,1, \dots ,n-1\}$ $p \mapsto p-1$	$f^{-1} : \{0,1, \dots ,n-1\} \to \{1,2, \dots ,n\}$ $p \mapsto p+1$	

Tableau 12 : Réponses correctes de type (C-)
(Formulations correctes mais incomplètes ou/et imprécises)

Exemples de réponses	Commentaires	Fréquence
1) La fonction g : x $\to$ 2x, x$\in$ **R** est bijective, sa bijection réciproque est $g^{-1} : x \to \frac{x}{2}$, x$\in$ **R** 2) La fonction exponentielle (e^x) est bijective. Sa bijection réciproque est la fonction Log x. 3) $f(x) = e^x \Rightarrow f^{-1}(x) = \ln x$.	Les ensembles de départ et d'arrivée ne sont pas indiqués.	
4) e^x est la bijection de Log x 5) f (x) = Log x, x > 0 $f^{-1} = e^x$	Les ensembles de départ et d'arrivée ne sont pas indiqués, de plus il y a des erreurs dans la formulation langagière.	
6) L'homothétie h (ω, k) est bijective (si k$\in$ R*) et sa réciproque est h ($\omega, \frac{1}{k}$). 7) $f = s_\Delta$, $f^{-1} = s_\Delta$ 8) La similitude S(ω, k , θ) est bijective et sa réciproque est : $S^{-1}(\omega, \frac{1}{k}, -\theta)$ *(Aucune précision n'est donnée sur les paramètres ω, k, θ)*	Les applications sont désignées par leurs symboles spécifiques. Les ensembles de départ et d'arrivée sont implicites.	
9) L'application qui associe à chaque être humain sa structure d'ADN (son caryotype) et réciproquement l'application qui à chaque caryotype associe un être humain bien déterminé.	Exemple original, cependant les ensembles de départ et d'arrivée sont implicites	45 (33,5 %)
10) $f : \mathbf{P} \to \mathbf{P}$ $A(z) \mapsto B(z') / z' = 5.z + 10i$ 11) $f : \{0,1,2\} \to \{3,4,5\}$ $n \mapsto n+3$ 12) $f : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ $x \mapsto \mathrm{Log}\, x$ 13) L'homothétie est bijective 14) $f : [0,4] \to [0,12]$ $x \mapsto 3x$ 15) $f : \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$; $x \mapsto \sin x$	Dans ces exemples, les étudiants n'indiquent pas les bijections réciproques des applications bijectives données. Notons que pour les exemples de type 13, les réciproques des fonctions trigonométriques ne figurent pas dans le programme du secondaire.	
16) $f : \mathcal{C} \to \Delta$ $M \mapsto M'$; avec $\mathcal{C}$ représente un demi-cercle et Δ un segment du plan et M' le projeté orthogonal de M sur Δ. 17) L'homothétie $f : \mathbf{P} \to \mathbf{P}$ $\vec{u} \mapsto k.\vec{u}$ (où $\vec{u}$ est un vecteur du plan), est bijective.	La bijection réciproque n'est pas indiquée, de plus, pour (15), le segment Δ ne peut être arbitraire, il fallait le préciser (Par exemple le diamètre de $\mathcal{C}$), et pour (16) les ensembles de départ et d'arrivée sont des ensembles de points, alors que les variables sont des vecteurs, et il faut préciser que k est un réel non nul.	

Tableau 13 : Réponses Fausses

Exemples de réponses	Commentaires	Fréquence
1) $f : \mathbf{P} \setminus \{M_1\} \to \mathbf{P}$ $M(z) \mapsto M'(z')$ tel que $z' = \dfrac{3z+2}{z-1}$ est bijective f et $f^{-1} : \mathbf{P} \setminus \{M_2\} \to \mathbf{P}$ $M(z) \mapsto M'(z')$ tel que $z' = \dfrac{z+2}{z-3}$	Erreurs dans le choix des ensembles de départ et d'arrivée de f et de f^{-1}, de plus les points M_1 et M_2 ne sont pas définis.	35 (29,5 %)
2) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$, $f^{-1} : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ $x \mapsto x^2$ $x \mapsto \sqrt{x}$ 3) $f : [0,9[\to]0,9[$, $f^{-1} :]0,9[\to [0,9[$ $x \mapsto x+1$ $x \mapsto x-1$ 4) $f : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ et $f^{-1} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $x \mapsto \ln x$ $x \mapsto e^x$	Dans ces exemples, les expressions de f(x) et de $f^{-1}(x)$ peuvent définir des applications bijectives, seulement, avec les ensembles de départ et d'arrivée choisis la propriété de bijectivité n'est pas vérifiée.	
5) $f(x) = x^2$ est bijective et $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$. 6) $g(x) = \mathrm{Log}(x-1)$ où $D_g =]1,+\infty[$ est bijective et $g^{-1}(x) = e^x + 1$, avec $D_{g^{-1}} = \mathbf{R}$. 7) $f(x) = x + 1$, sa bijection réciproque : $f^{-1}(x) = x - 1$ 8) $f(x) = x^3$ est bijective et $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$, si $x \geq 0$, et $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{-x}$, si $x<0$ 9) $\mathrm{Log}\, x = y \to x = e^y$	Dans ces exemples, les étudiants ne s'intéressent qu'aux expressions de f(x) et de $f^{-1}(x)$, qui se correspondent du point de vue de la réciprocité. Cependant, l'absence des ensembles de départ et d'arrivée, ou de l'un d'eux, ne permet pas de décider si l'application considérée est bijective ou non. Nous considérons qu'il s'agit là de réponses fausses.	
10) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $x \mapsto 2x^2 - 3$ 11) $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $x \mapsto x + \sin x + \cos x$	Ces applications ne sont pas bijectives. Les ensembles de départ et d'arrivée ne se correspondent pas vis-à-vis de la propriété de bijectivité.	
12) La fonction $f : [\pi, 2\pi] \to [-1,0]$ $x \mapsto \cos x$ est bijective 13) La fonction $f : [1,5] \to [1,5]$ $x \mapsto 2x$ est bijective 14) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $x \mapsto \sin x - \cos x + \mathrm{tg} x$ 15)  	Les exemples choisis ici ne définissent pas des applications. Il y a inconvenance dans le choix des ensembles de départ et d'arrivée.	
16) $h : \mathbf{P} \to \mathcal{V}$ $M,N \mapsto \vec{u} = 2\overrightarrow{MN}$ ($\mathcal{V}$ désigne l'ensemble des vecteurs du plan) 17) $f : \mathbf{P} \to \mathbf{P}$ $x \mapsto \overrightarrow{ox} = t_{\vec{u}}$, $\vec{u} \neq \vec{o}$	Il y a ici des erreurs sur le plan de la formulation symbolique des applications choisies.	

Commentaire

Remarquons d'abord que dans la question précédente (2-a), relative à la définition de bijection, il y a eu 31 % de réponses correctes (y compris celles de type C_{-}), alors que nous en trouvons ici 70,5 %. Ceci pourrait s'expliquer par le fait que beaucoup d'étudiants qui ne sont pas parvenus à formuler correctement la définition d'une bijection, ont donné des exemples de bijections correctes (avec plus ou moins de précision). Notons dans ce contexte que dans les réponses de certains étudiants nous rencontrons un mélange d'exemples corrects et moins corrects. D'un autre côté, la plupart des bijections données (toute catégories confondues) sont assez familières pour les étudiants, étant donné que ces bijections sont supposées longtemps manipulées en classe terminale, ce qui pourrait indiquer que certains étudiants ont fourni leurs exemples sans se soucier de la concordance de chaque exemple avec la définition de bijection qu'il a écrite.

Ceci étant, nous soulignons que la majorité des imprécisions (pour les réponses de type C_{-}) et des erreurs (pour les réponses fausses) enregistrées sont dues à l'absence des ensembles de départ et d'arrivée des fonctions choisies, ou à leur non concordance vis-à-vis de la propriété de bijectivité. Ceci indique que pour beaucoup d'étudiants, la propriété de bijectivité est liée avant tout à l'expression de f(x), et que la bijection réciproque relève de la possibilité de trouver une solution à l'équation en x : $y = f(x)$, indépendamment de l'unicité de cette solution et des domaines d'appartenance de x et de y. Remarquons dans ce contexte que dans 18 exemples de bijection (soit environ 21 % des réponses correctes), la bijection réciproque n'est pas mentionnée, et ceci même pour des bijections simples et/ou usuelles (comme pour les exemples 10 à 14 du tableau 12). A notre avis, ceci traduit des difficultés chez les étudiants à faire le lien (rapidement) entre une bijection et sa réciproque, effet qui pourrait résulter du fait qu'en classe terminale, on sépare toujours la tâche de vérification de la bijectivité d'une application, de celle de la détermination de la bijection réciproque, comme nous l'avons constaté dans le chapitre précédent à propos de l'étude des rapports institutionnels.

Concernant les bijections entre ensembles finis, il est à noter que trois exemples seulement répondent correctement à la question (l'exemple 9 et 2 exemples de type 11), tous les autres étudiants (17/51), bien qu'ils aient fourni des applications qui sont bijectives, ont considéré un intervalle de longueur fini comme ensemble fini, comme c'était le cas pour les exemples d'applications entre ensembles finis. Finalement, nous remarquons que les erreurs au niveau de la formulation symbolique des applications restent rares dans cette question (4 étudiants sur 51, soit environ 7,8 %)

II. 2. 1. 3. Conclusion pour l'exercice 1

Les principaux résultats qui ressortent de l'analyse des productions des étudiants à ce premier exercice sont les suivants :

1) Un tiers des étudiants seulement sont parvenus à expliciter correctement (avec de légères imprécisions parfois) les définitions relatives aux notions d'application et de bijection (dans la plupart des cas, il s'agit des mêmes étudiants). En revanche, environ les 3/4 des étudiants ont fourni des exemples d'applications et de bijections correctes (avec plus ou moins de précision). Ceci montre que beaucoup d'étudiants n'ont pas fait le lien entre la technique de construction d'une application et la technologie que suppose la justification.

2) Les imprécisions et les erreurs enregistrées dans les exemples d'applications et de bijections donnés par les étudiants sont, dans leur majorité, dues à l'absence des ensembles de départ et d'arrivée dans les exemples donnés ou à la non adéquation de ces ensembles avec l'objet de la question. Pour la plupart des étudiants, c'est l'expression de *f(x)* seule qui caractérise une application et permet d'étudier ses propriétés. Ceci, à notre avis, résulte du fait qu'au lycée, les ensembles de départ et d'arrivée des fonctions numériques et des transformations géométriques sont, la plupart du temps, implicites, et que la majorité des techniques mises en œuvre à propos des applications concernent un travail sur *f(x)* (pour les fonctions numériques) ou sur les symboles spécifiques désignant les transformations géométriques. Rares sont les tâches qui font intervenir un travail sur les ensembles de départ et d'arrivée.

3) Un bon nombre d'étudiants (environ 35 %) confondent ensemble fini et intervalle de longueur finie. Ceci reflète une confusion entre fini et borné.

4) Enfin, nous notons l'existence chez certains étudiants de difficultés au niveau de l'usage du symbolisme mathématique dans la désignation des applications et des bijections.

Ce constat met en évidence, d'une part une insuffisance dans les connaissances théoriques mises en jeu, et d'autre part le peu d'effet de cette insuffisance sur les réponses des étudiants aux questions d'ordre technique (celles qui concernent la donnée d'exemples d'applications et de bijections). A notre avis, il s'agit là d'une des conséquences de la déconnexion des blocs pratico-technique $[T, \tau]$ et technologico-théorique $[\theta, \Theta]$ dans les environnements praxéologiques mis en place dans l'enseignement secondaire.

II. 2. 2. Le deuxième exercice

II. 2. 2. 1. Analyse a priori

Exercice 2

Pour chacune des applications ci-dessous, dire si l'application est bijective ou non. Justifier votre réponse.

[1] $f : [-\pi, +\pi] \to [-1, +1]$

$x \mapsto \cos(x)$

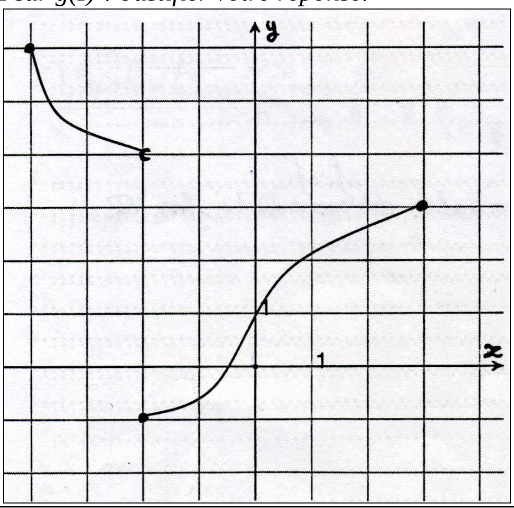
[2] $p : \mathcal{V} \to \boldsymbol{R}_+$

$\vec{u} \mapsto \|\vec{u}\|$

Où $\mathcal{V}$ *désigne l'ensemble des vecteurs du plan.*

[3] La fonction g est définie sur l'intervalle $I = [-4, +3]$ *par sa représentative graphique* C_g *tracée ci-dessous dans un système d'axes (O, Ox, Oy). Un demi-cecle à l'extrémité de la courbe indique que le point en question est exclu de* C_g *. Un petit disque plein à l'extrémité de la courbe indique que le point en question appartient à* C_g *.*

Dire si g est bijective de I sur g(I) ? Justifier votre réponse.



Analyse a priori

Dans l'exercice on donne trois fonctions numériques qui se distinguent par la manière dont elles sont définies : fonction numérique à variable réelle, fonction numérique dont la variable est un vecteur et fonction définie graphiquement. Pour chacune de ces fonctions, la définition d'une bijection donne un moyen simple pour décider si elle est bijective ou non. Ainsi :

- pour [1], la fonction f n'est pas bijective, il suffit par exemple de remarquer que $f(-\pi) = f(\pi) = -1$,

- pour [2], la fonction p n'est pas bijective, il suffit par exemple de remarquer que pour tout vecteur $\vec{u}$, on a : $p(\vec{u}) = p(-\vec{u})$

- pour [3], la fonction g est bijective de I sur $g(I)$, car on vérifie graphiquement que tout réel de $g(I)$ admet un seul antécédent dans I.

L'objectif de l'exercice est de voir comment les étudiants vont-ils procéder pour étudier la propriété de bijectivité pour chacune de ces trois fonctions. Rappelons qu'en classe terminale, la technique souvent utilisée dans les exercices pour montrer qu'une fonction numérique d'une variable réelle f réalise une bijection consiste à montrer que f est continue et strictement monotone[52], la définition d'une bijection étant généralement utilisée uniquement dans les développements théoriques des cours. Nous voulons connaître l'effet de ce choix institutionnel relatif à l'étude de la propriété de bijectivité sur les possibilités des étudiants à gérer les différentes situations données dans l'exercice.

Pour [1] et [3], on s'attend à ce que certains étudiants répondent que les fonctions f et g ne sont pas bijectives car elles ne sont pas monotones sur leurs intervalles de définition respectifs (ou discontinue pour g). Pour [2], les variables sont des vecteurs, et donc les notions de continuité et de sens de variation ne sont plus utilisables.

II. 2. 2. 2. Analyse des productions des étudiants

Pour le besoin des commentaires, nous analysons les réponses des étudiants relatives aux fonctions f , g et p respectivement. L'interprétation des résultats obtenus sera réalisée à l'issue de ces analyses.

Réponses relatives à la fonction [1]

$$[1] \quad f:[-\pi,+\pi] \to [-1,+1], \quad x \mapsto \cos(x)$$

Pour cette question, sur 51 copies, nous dénombrons 20 réponses correctes dont 12 sont convenablement rédigées et 31 réponses fausses.

[52]En fait, l'hypothèse de continuité ne joue aucun rôle dans la propriété de bijectivité. Cependant, en classe terminale, on joint généralement les deux hypothèses (continuité et sens de variation) lors de l'étude de la bijectivité des fonctions numériques. Ceci car, pour une fonction f définie sur un intervalle I, la tâche de bijectivité est souvent accompagnée de la tâche de détermination de l'intervalle image $f(I)$. Pour cette dernière tâche, l'hypothèse de continuité s'avère nécessaire pour pouvoir appliquer le théorème de cours correspondant (L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle).

Tableau 14 : Réponses relatives à la bijectivité de la fonction [1]

	Exemples de réponses	Commentaire	Type de réponses et Fréquences
Réponses correctes	***R₁*** *: l'application n'est pas bijective car pour chaque image existent deux antécédents* ***R₂*** *: Cette application n'est pas bijective car* $f(\frac{-\pi}{2}) = f(\frac{\pi}{2}) = 0$. *Le réel 0 admet deux antécédents par f.* ***R₃*** *: cette application n'est pas bijective car il y a des images admettant deux antécédents, exemple :* $cos^{-1}(\frac{1}{2}) = \left\{ \frac{\pi}{3} \text{ ou } -\frac{\pi}{3} \right.$	Dans ce type de réponses, les étudiants appliquent convenablement la définition de bijection.	C_+ (23,5 %)
	R₄ *: f ne réalise pas une bijection car il y a des éléments de départ qui coïncident avec le même élément d'arrivée :* *Exp :* $cos(-\pi) = cos(\pi) = -1$	Dans ce type de réponses, il y a généralement des erreurs dans la formulation ou un manque dans la justification.	C_- (15,5 %)
	R₅ *: f n'est pas bijective car f(-x)=f(x)=cosx*		
	R₆ *: la restriction de f à* $[-\pi, 0]$ *réalise une bijection et la restriction de f à* $[0, \pi]$ *réalise une bijection, mais f ne réalise pas une bijection*		
Réponses fausses	***R₇*** *:* $f'(x) = -\sin x$. $f'(x)$ *change de signe sur* $[-\pi, +\pi]$, *donc f n'est pas bijective*	Pour les réponses fausses, la plupart des étudiants (20/ 31) ont donné une réponse de type **R₇** ou **R₈**. Pour ces étudiants, les conditions : « continue » et « strictement monotone » (ou l'une des deux) sont nécessaires pour qu'une fonction numérique soit bijective. Il y a eu 7 réponses de type **R₉** ou **R₁₀**, et 4 réponses variées, comme **R₁₁** et **R₁₂**.	F (61 %)
	R₈ *: f n'est pas monotone sur* $[-\pi, +\pi]$, *donc f n'est pas bijective*		
	R₉ *: Sur* $[-\pi, 0]$ *f est continue et strictement croissante, donc réalise une bijection.* *Sur* $[0, \pi]$ *f est continue et strictement décroissante, donc réalise une bijection.* *Donc sur* $[-\pi, +\pi]$ *f est bijective*		
	R₁₀ *:* $f'(x) = -\sin x < 0$ *f est continue et strictement décroissante donc f réalise une bijection de* $[-\pi, +\pi]$ *sur* $f([-\pi, +\pi]) = [-1, +1]$		
	R₁₁ *: f est bijective car tout élément de l'intervalle* $[-\pi, +\pi]$ *admet une unique image dans* $[-1, 1]$ *et chaque élément de* $[-1, 1]$ *admet un unique antécédent dans* $[-\pi, +\pi]$.		
	R₁₂ *: f est bijective car la fonction réciproque* cos^{-1} *existe, sa courbe représentative est la symétrique par rapport à* $\Delta : y = x$ *de la courbe de f*		

Commentaire

Pour cette question, 39 % des étudiants sont arrivés à reconnaître que la fonction f n'est pas bijective. La plupart de ces étudiants (16/20) ont utilisé la définition d'une bijection pour justifier leurs réponses. Parmi ces 16 étudiants, 10 ont fourni une définition correcte de la bijection dans la question 2-a du premier exercice, ce qui indique que 6 étudiants ont donné une définition correcte d'une bijection sans l'utiliser dans leurs réponses et 6 autres en ont donné une définition fausse (ou n'en ont donnée aucune) et pourtant sont arrivés à justifier leurs réponses à l'aide de la définition d'une bijection. Ceci montre que 12 étudiants n'ont pas fait le lien entre la définition d'une bijection et la technique relative à l'étude de la bijectivité d'une fonction.

Concernant les réponses fausses, nous renvoyons leurs origines aux points suivants :

- une application erronée du théorème sur les fonctions continues et strictement monotones (réponses de types $\mathbf{R_7}$, $\mathbf{R_8}$ et $\mathbf{R_9}$),
- une insuffisance dans la connaissance des propriétés des fonctions cosinus et sinus, ou dans l'appropriation de la situation (réponses de types $\mathbf{R_{10}}$, $\mathbf{R_{11}}$ et $\mathbf{R_{12}}$).

Néanmoins, c'est le premier point qui est le plus représentatif dans l'ensemble des réponses fausses : 27/31. La plupart de ces 27 étudiants (20/27) considèrent que la continuité, et/ou la monotonie stricte d'une fonction est (sont) une (des) condition(s) nécessaire(s) pour qu'une fonction numérique soit bijective. Notons par ailleurs qu'en dépit de la conformité de la réponse ou de la pertinence de la justification, nous dénombrons 31 étudiants sur 52 (soit environ 60 %) qui ont lié l'étude de la bijectivité au théorème sur les fonctions continues et strictement monotones. Ceci, à notre avis, est une conséquence du choix institutionnel concernant le travail de la propriété de bijectivité au lycée.

Réponses relatives à la fonction [3]

Dans cette question, sur 51 copies, nous dénombrons 17 réponses correctes dont 6 sont convenablement rédigées, 28 réponses fausses et 6 copies sans réponse.

Tableau 15 : Réponses relatives à la bijectivité de la fonction [3]

<table>
<tr><th></th><th>Exemples de réponses</th><th>Commentaire</th><th>Type de réponses et Fréquence</th></tr>
<tr><td rowspan="6">Réponses correctes</td><td>RR_1 : La fonction g est bijective car chaque élément de l'ensemble d'arrivée admet un unique antécédent.</td><td rowspan="2">Dans ce type de réponses les étudiants utilisent la définition d'une bijection. (il y a eu 5 réponses sur 6 de ce type)</td><td rowspan="3">C_+
(12 %)</td></tr>
<tr><td>R_2 : g est bijective car chaque image lui correspond un seul antécédent.</td></tr>
<tr><td>R_3 : g est continue et strictement décroissante sur $[-4,-2[$, donc g est une bijection de $[-4,-2[$ sur $]4,6]$.
g est continue et strictement croissante sur $[-2,3]$, donc g est une bijection de $[-2,3]$ sur $[-1,3]$. Et $[-1,3]\cap]4,6]=\emptyset$.
Donc g est une bijection.</td><td>Dans cette réponse l'étudiant (le seul) étudie la bijectivité sur chacun des intervalles de continuité de g via le théorème sur les fonctions strictement monotones. Il n'oublie pas de remarquer que l'intersection des intervalles images est vide, sans quoi, la fonction ne serait pas bijective sur I.</td></tr>
<tr><td>R_4 : g est bijective car elle est strictement monotone sur chacun de ses intervalles :
- sur $[-4,-2[$: g est strictement décroissante
- sur $[-2,3]$: g est strictement croissante</td><td rowspan="3">Dans ce type de réponses, les étudiants ne précisent pas que les intervalles images $[-1,3]$ et $]4,6]$ sont disjoints, comme dans R_3. Certains étudiants n'évoquent pas ces intervalles et se contentent de regarder le sens de variation de g.</td><td rowspan="3">C_-
(21,5 %)</td></tr>
<tr><td>R_5 : - g est continue et strictement décroissante sur $[-4,-2[$, donc g est une bijection de $[-4,-2[$ sur $]4,6]$.
- g est continue et strictement croissante sur $[-2,3]$, donc g est une bijection de $[-2,3]$ sur $[-1,3]$.</td></tr>
<tr><td>R_6 : g est bijective de I sur g(I) car sur chaque intervalle elle garde un même sens de variation et est continue.</td></tr>
<tr><td rowspan="6">Réponses fausses</td><td>R_7 : g est bijective car elle est continue et strictement décroissante sur $[-4,-2[$ et continue et strictement croissante sur $[-2,3]$, donc elle est continue et strictement monotone sur I. d'où g est bijective.</td><td rowspan="6">Dans ce type de réponses, la plupart des étudiants (21/28) considèrent que les conditions : « continue » et « strictement monotone » (ou l'une des deux) sont nécessaires pour qu'une fonction numérique soit bijective. Il y a seulement 7 copies où les étudiants évoquent d'autres raisons pour justifier leurs réponses, pour ces derniers les erreurs sont dues à une mauvaise interprétation de la propriété de bijectivité, comme dans R_{12} où il y a confusion avec la définition d'une application</td><td rowspan="6">F
(55 %)</td></tr>
<tr><td>R_8 : g n'est pas bijective car elle n'est pas continue.</td></tr>
<tr><td>R_9 : g n'est pas bijective de I sur g(I) car elle n'est pas monotone sur I.</td></tr>
<tr><td>R_{10} : g n'est pas une bijection car elle est discontinue et possède plus qu'un sens de variation.</td></tr>
<tr><td>R_{11} : g est non dérivable et non continue sur I dons g est non bijective.</td></tr>
<tr><td>R_{12} : g est bijective car tout élément de I admet une seule image dans g(I).</td></tr>
</table>

Commentaire

Pour cette fonction, nous remarquons d'abord que 33 étudiants sur 51 (soit 65 %) ont fait appel au théorème sur les fonctions continues et strictement monotones pour justifier leurs réponses, et ceci indépendamment de la pertinence de cette réponse. Comme dans le cas de l'exemple [1], ceci montre l'influence du choix institutionnel concernant le travail de la propriété de bijectivité sur les modalités de travail des étudiants à ce propos. Parmi ces 33 étudiants, nous dénombrons 12 (soit 36,5 %) qui ont donné une réponse correcte (dont un seul a convenablement justifié sa réponse). Les 21 autres étudiants (63,5 %) ont appliqué le dit théorème de façon erronée, la plupart d'entre eux ont considéré que la continuité et la stricte monotonie sont des conditions nécessaires pour qu'une fonction soit bijective (dès que l'une des conditions n'est pas vérifiée, ils concluent que la fonction n'est pas bijective). Par ailleurs, nous dénombrons seulement 7 étudiants qui ont utilisé la définition d'une bijection pour répondre à cette question. 5 d'entre eux ont répondu correctement, ceux-ci ont donné une définition correcte de la bijection dans l'exercice 1. Les définitions données par les deux autres étaient erronées.

Réponses relatives à la fonction [2]

$$[2] \quad p : \begin{array}{ccc} \mathcal{V} & \rightarrow & \mathbf{R}_+ \\ \vec{u} & \mapsto & \|\vec{u}\| \end{array}$$

Pour cette question, sur 51 copies, nous dénombrons 28 réponses correctes dont 21 sont convenablement rédigées, 9 réponses fausses et 14 copies sans réponses.

Tableau 16 : Réponses relatives à la bijectivité de la fonction [2]

	Exemples de réponses	Commentaire	Type de réponses et Fréquences
Réponses correctes	***R_1*** *: Cette application n'est pas bijective car si on prend un vecteur unitaire $\vec{i}$, on aura : $p(\vec{i}) = p(-\vec{i}) = 1$. Donc 1 admet au moins deux antécédents $\vec{i}$ et $-\vec{i}$.* ***R_2*** *: p n'est pas bijective car un élément de l'ensemble d'arrivée peut admettre plusieurs antécédents dans l'ensemble de départ.* ***R_3*** *: l'application p n'est pas bijective car on peut avoir une infinité de vecteurs admettant un module donné.* ***R_4*** *: p n'est pas bijective car 2 vecteurs non égaux peuvent avoir la même norme.* ***R_5*** *: pour les vecteurs $\vec{u}(3,3)$ et $\vec{v}(4,\sqrt{2})$, on a : $p(\vec{u}) = p(\vec{v}) = \sqrt{18}$, donc p n'est pas bijective.*	Dans ce type de réponses, plusieurs justifications sont formulées. Elles utilisent toutes la définition de bijection.	C_+ (41 %)
	R_6 *: p n'est pas bijective car elle ne possède pas d'application réciproque.*	Dans ce type de réponses, les justifications, ou bien manquent de précisions (comme dans **R_6**) ou bien sont non conformes (comme dans **R_7** et **R_8**, où les étudiants considèrent un vecteur $\vec{u}$ et ses représentants comme une multitude d'antécédents à $\lVert\vec{u}\rVert$, alors qu'il s'agit du même vecteur).	C_- (14 %)
	R_7 *: p n'est pas une bijection, car chaque vecteur du plan possède une norme mais chaque norme ne renvoie pas nécessairement à un seul vecteur du plan (le vecteur possède une infinité de représentant)*		
	R_8 *: Cette application n'est pas bijective car à chaque vecteur du plan on peut associer un représentant qui aura nécessairement sa norme, et par suite on ne peut pas avoir l'application dans le sens inverse.*		
Réponses fausses	***R_9*** *: p est une bijection, car pour un vecteur $\vec{u}$ lui correspond une seule norme $\lVert\vec{u}\rVert$.*	Les réponses fausses sont dues, soit à une méconnaissance de la propriété de bijectivité (comme dans **R_9** et **R_{10}**), soit à une mauvaise compréhension de la définition de l'application *p* (comme dans **R_{11}**, **R_{12}** et **R_{13}**). Un seul étudiant à donné la réponse **R_{14}**.	F (17,5 %)
	R_{10} *: p est bijective car à chaque réel de $\mathbf{R}_+$ on peut associer un vecteur $\vec{u}$ de $\mathcal{V}$.*		
	R_{11} *: L'application p est bijective car chaque vecteur du plan lui correspond un unique vecteur unitaire, de même chaque vecteur unitaire a un vecteur du plan ce qui explique que p est une bijection.*		
	R_{12} *: p n'est pas bijective car à chaque vecteur on associe une norme mais on ne peut pas associer à chaque norme un vecteur.*		
	R_{13} *: p n'est pas une bijection, car p est une valeur et non une fonction.*		
	R_{14} *: p n'est pas bijective, car p n'est pas continue.*		

Commentaire

Notons tout d'abord que l'application p ici peut être considérée comme non familière aux élèves du lycée. La norme d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ au Secondaire est toujours définie comme la distance de A à B, et non en tant qu'application.

Ceci étant, deux remarques caractérisent les réponses des étudiants à cette question : le nombre élevé de réponses correctes (55 %) et le nombre relativement important de copies sans réponses (28 %) (contrairement aux cas des fonctions f et g précédentes). Les variables de l'application p étant des vecteurs, le théorème sur les fonctions continues et strictement monotone n'est plus applicable (un seul étudiant a utilisé le théorème dans ce cas). Les étudiants se sont partagés alors entre deux tendances envers la réalisation de la tâche : environ le tiers d'entre eux n'ont pas donné de réponse à la question (5 parmi ces étudiants ont pourtant donné une définition correcte de la bijection dans l'exercice 1, ce qui montre que ces étudiants ne sont pas arrivé à rendre opératoire leur connaissance à propos de cette définition dans ce nouveau contexte). D'un autre côté, plus que la moitié des étudiants (55 %) se sont référés à la définition de bijection et sont arrivés à justifier convenablement que l'application p n'est pas bijective. Environ 40 % de ces étudiants ont donné une définition correcte de la bijection dans l'exercice 1 et 60 % ont en donné une définition erronée ou n'en ont donnée aucune. Pour ces derniers, il y a séparation semble t-il du travail d'ordre technique avec celui d'ordre technologique. Par ailleurs, la plupart des réponses fausses et les copies sans réponses montrent que certains étudiants sont, en quelque sorte, perturbés par la définition de l'application p qui ne leur est pas familière. On retrouve aussi quelques cas de confusion entre la condition définissant une application et celle définissant une bijection.

II. 2. 2. 3. Conclusion pour l'exercice 2

Nous interprétons les résultats établis à propos de l'étude de la bijectivité des fonctions f, g et p selon trois modalités :

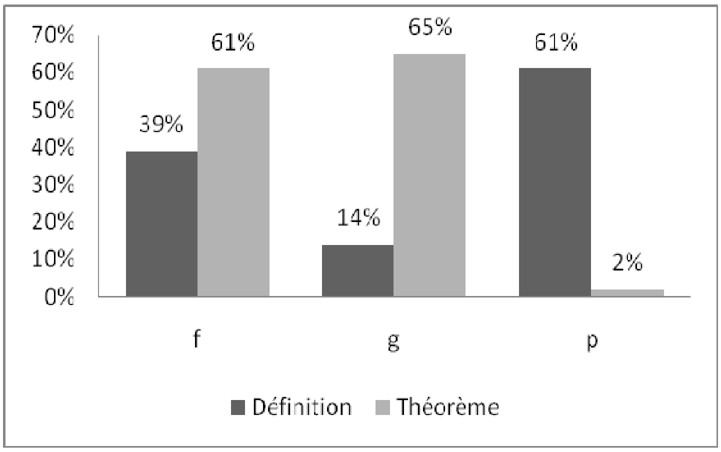
1) Influence du choix institutionnel concernant l'étude de la propriété de bijectivité au lycée, sur les possibilités de choix de techniques de travail par les étudiants pour la résolution de l'exercice.

2) Effet de ce choix institutionnel sur la conception des étudiants à propos de la bijectivité des fonctions numériques d'une variable réelle.

3) Effet de la déconnexion des blocs pratico-technique $[T, \tau]$ et technologico-théorique $[\theta, \Theta]$ dans les environnements praxéologiques mis en place au lycée sur les modes de travail des étudiants.

Modalité 1 : *Influence des choix institutionnels sur le travail des étudiants*

Pour cette modalité, nous nous intéressons au moyen (définition d'une bijection – désignée dans la suite par **Définition** tout court – ou théorème sur les fonctions continues et strictement monotones – désigné dans la suite par **Théorème** tout court –) mis en œuvre par les étudiants pour l'étude de la bijectivité des fonctions *f*, *g* et *p*, et ceci indépendamment de la pertinence des solutions données. Nous classons pour cela les étudiants selon deux critères : ceux qui ont fait appel à la Définition dans leur réponses et ceux qui ont utilisé le Théorème. Le graphique ci-dessous représente la répartition des étudiants selon ces deux critères.



Graphique 5 : Influence des choix institutionnels sur le travail des étudiants

Le graphique montre que la tendance dominante chez les étudiants, pour le choix d'une technique de travail concernant l'étude de la propriété de bijectivité, diffère selon le type de fonction à étudier, ainsi :

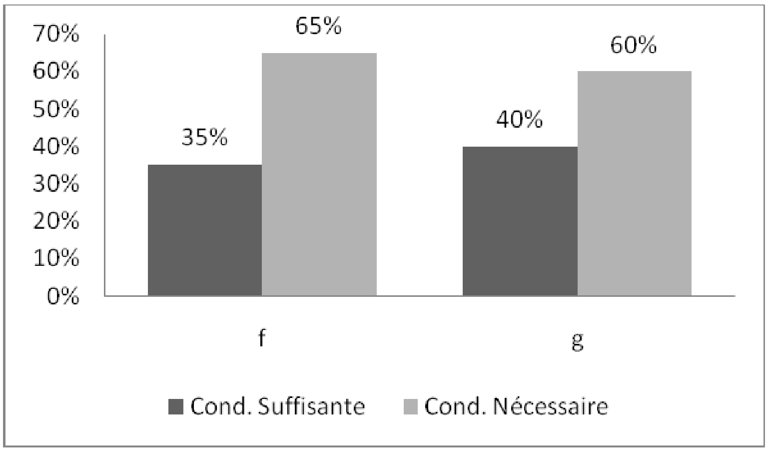
- pour les fonctions numériques d'une variable réelle, la plupart des étudiants préfèrent utiliser le théorème sur les fonctions continues et strictement croissantes. Néanmoins, l'usage de la définition pour ce type de fonction est non négligeable dans le cas de la fonction *f*, et devient faible pour la fonction *g*. Il nous semble que ceci est à lier au registre sémiotique dans lequel est définie la fonction. En effet, pour la fonction *f* , explicitée dans le registre ensembliste, et dont les caractéristiques (ensemble de départ, d'arrivée et expression *f(x)*) sont supposés assez familières pour les étudiants, la vérification de la définition de bijection apparait plus immédiate que l'application du Théorème, ceci pour les étudiants qui sont supposés connaitre les deux techniques de travail concernant la bijection (notons que 80 % des étudiants qui ont utilisé la définition pour *f* ont répondu correctement à la question). Par contre, pour la fonction *g*, explicitée dans le registre graphique, les étudiants semblent avoir trouvé plus facile la lecture des conditions du théorème (sens de variation et éventuellement continuité) que la vérification de la définition de bijection, ce qui pourrait expliquer la diminution du nombre d'étudiants qui ont opté pour la Définition de bijection dans leur travail.

- pour la fonction *p*, la plupart des étudiants ont compris que le Théorème n'est pas applicable dans ce cas, et ont alors essayé d'utiliser la définition de bijection dans leur travail. Notons que 87,5 % d'entre eux (soit 55% de la totalité des étudiants) ont répondu correctement à la question en utilisant la définition. Ceci indique que plus de la moitié des étudiants connaissent les deux techniques de travail pour l'étude de la propriété de bijectivité.

Il ressort de là que pour l'étude de la propriété de bijectivité, la plupart des étudiants optent pour le Théorème sur les fonctions continues et strictement monotones lorsqu'il s'agit d'une fonction numérique d'une variable réelle. Ceci se produit même pour des fonctions où la définition apparait plus simple à utiliser et bien que plus de la moitié des étudiants connaissent les deux techniques de travail concernant cette tâche. A notre avis, ceci montre l'influence du choix institutionnel concernant le travail de la propriété de bijectivité au lycée, sur les possibilités de choix de techniques de travail par les étudiants à propos de cette tâche. Rappelons que dans la classe terminale, l'institution fait systématiquement appel au Théorème sur les fonctions continues et strictement monotones pour l'étude de la propriété de bijectivité pour les fonctions numériques de variable réelle et n'utilise la définition que dans les développements théoriques des cours et notamment avec les transformations géométriques.

Modalité 2 : *Effet des choix institutionnels sur les conceptions des étudiants*

Pour cette modalité, nous nous intéressons aux étudiants qui considèrent que les conditions « continue » et « strictement monotone » (ou l'une d'elles) sont nécessaires pour qu'une fonction numérique f soit bijective. Parmi les étudiants qui ont utilisé le Théorème, nous distinguons ceux qui ont considéré que les conditions concernées (ou seule la stricte monotonie) sont suffisantes[53] et ceux qui ont considérés que l'une d'elles est nécessaire pour la propriété de bijectivité. Le graphique ci-dessous donne la répartition des étudiants selon ces deux critères[54].



Graphique 6 : Modes d'usage du Théorème dans l'étude de la propriété de bijectivité

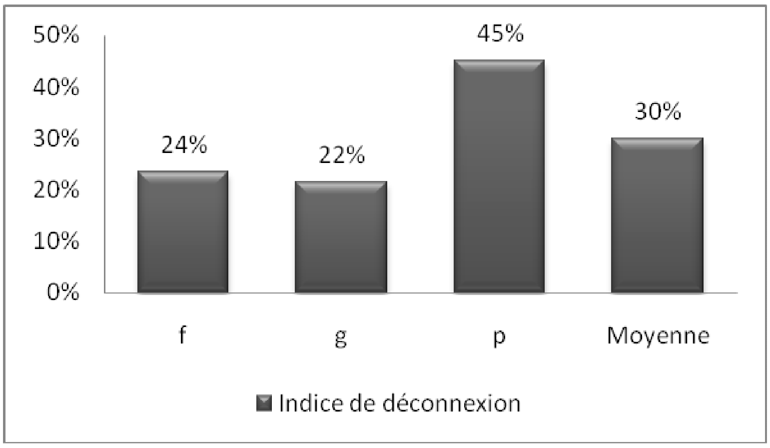
Nous remarquons ici que la plupart des étudiants qui utilisent le Théorème pour l'étude de la bijectivité ont développé une conception erronée quant à la notion de bijection. Ces étudiants considèrent que les conditions « continue » et « strictement monotone » (ou l'une

[53] Sera considéré ainsi un étudiant qui a donné une réponse fausse avec une application correcte du théorème (comme la réponse $\mathbf{R_7}$, tableau 15).
[54] Nous n'avons pas considéré dans ce graphique le cas de la fonction p, car un seul étudiant a utilisé dans ce cas le Théorème, le pourcentage correspondant pourrait fausser nos interprétations.

d’elles) sont nécessaires pour qu’une fonction numérique d’une variable réelle soit bijective. Il semble qu’à force d’utiliser au lycée le Théorème concerné (en Analyse) dans la tâche de bijectivité, et de se limiter dans les exercices aux cas des fonctions numériques d’une variable réelle, beaucoup d’étudiants ont fini par identifier la propriété de bijectivité avec les conditions du Théorème. Rappelons à ce propos que dans l’exercice 1 (question 2-a) il y a des étudiants qui ont énoncé le Théorème (en conditions nécessaire et suffisante) comme définition d’une bijection. Ceci montre l’influence de la rigidité des techniques et de l’isolement des tâches sur les conceptions des étudiants.

Modalité 3 : *Effet des environnements praxéologiques sur les modes de travail des étudiants.*

Pour cette modalité, nous nous intéressons aux étudiants pour qui, l’étude de la propriété de bijectivité pour les fonctions *f*, *g* et *p* n’est pas cohérente avec leur réponses à propos de la définition de bijection dans l’exercice 1. Il s’agit précisément des étudiants qui ont donné une définition correcte d’une bijection mais qui ne l’ont pas utilisée dans l’étude de la bijectivité des fonctions *f*, *g* et *p* (ou de l’une d’elles), et des étudiants qui ont utilisé correctement la définition d’une bijection dans l’exercice 2, sans qu’ils n’aient donné une définition correcte (ou une définition tout court) d’une bijection dans l’exercice 1. Le graphique ci-dessous donne la répartition des étudiants selon ces deux critères.



Graphique 7 : Indice de déconnexion des blocs $[\mathbf{T}, \boldsymbol{\tau}]$ et $[\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Theta}]$ dans l’étude de la propriété de bijectivité

Nous remarquons que 30 % des étudiants, en moyenne, n’ont pas fait le lien entre le travail de la technique associée à la tâche de bijectivité et la technologie (définition) correspondante. Pour certains de ces étudiants, la technologie qu’ils ont fournie est même incompatible avec la technique utilisée (il s’agit des étudiants qui ont donné une Définition fausse de bijection dans l’exercice 1, et ont utilisé la Définition correctement dans l’exercice 2, il y en a eu 13 %). Ceci prouve que les connaissances de beaucoup d’étudiants sont d’ordre technique plutôt que technologique, en ce sens que ceux-ci sont capables de reproduire des techniques de travail de façon convenable sans pour autant qu’ils aient le besoin de se rapporter aux justifications technologiques associées à ces techniques ou de se soucier de la compatibilité de la technique utilisée avec la technologie associée qu'ils connaissent. Les blocs $[T, \tau]$ et $[\theta, \Theta]$ des praxéologies mathématiques mises en œuvre dans ce cas sont séparés. Ceci appuie la conclusion établie dans l'exercice 1 concernant l'effet de la déconnexion des blocs pratico-technique et technologico-théorique dans les praxéologies mathématiques mises en place au Secondaire sur les connaissances des étudiants entrant à l'université.

En conclusion, cet exercice met en évidence, d'une part une fragilité dans les connaissances théoriques des étudiants concernant la propriété de bijectivité et des difficultés chez beaucoup de ces étudiants pour gérer des situations non familières, même simples, à propos de cette propriété ; d'autre part, il montre les effets des choix institutionnels sur la forme des connaissances des étudiants et sur leurs modalités de travail.

II. 2. 3. Le troisième exercice

II. 2. 3. 1. Analyse a priori

Exercice 3

Pour tout réel x on pose : f(x) = - x^3 *Montrer que f définie une bijection de* ***R*** *sur* ***R****. Donner la bijection réciproque de f.*

Analyse a priori

L'exercice comprend deux tâches : étude de la bijectivité d'une fonction polynôme f et détermination de sa bijection réciproque f^{-1}. L'objectif de l'exercice est de voir les stratégies que vont adopter les étudiants dans l'étude de la bijectivité de f, et leurs possibilités à déterminer f^{-1}. La fonction f est choisie de manière à ce que la réalisation des tâches demandées ne requière pas beaucoup de travail algébrique ou analytique concernant *f(x)*, ce qui pourrait entraver les résultats de nos analyses qui s'intéressent aux connaissances des étudiants à propos la notion de bijectivité.

Ceci étant, au vu des programmes de l'enseignement secondaire, les étudiants disposent de deux stratégies pour résoudre l'exercice :

Stratégie 1 : Montrer que pour tout x dans **R**, l'équation : $f(y) = x$ admet une solution unique y dans **R**. Ceci permet à la fois de montrer que f est bijective et de déterminer la bijection réciproque f^{-1}. Cette stratégie se réfère à la définition d'une bijection.

Stratégie 2 : Dans cette stratégie, chacune des deux tâches de l'exercice sera réalisée à part.

- Pour montrer que f est bijective, on montre que f est continue et strictement décroissante de **R** sur f(**R**) et que f(**R**)=**R** (par la technique : $f(]-\infty,+\infty[) =]\lim\limits_{+\infty} f, \lim\limits_{-\infty} f[$).

- On résout ensuite l'équation en y : $f(y) = x$, pour déterminer la bijection réciproque f^{-1}.

Cette stratégie se réfère au théorème sur les fonctions continues et strictement monotones pour la première tâche et à la définition de f^{-1} pour la deuxième tâche.

Notons qu'en classe terminale, les élèves étudient de façon générale la bijectivité de la fonction f définie sur $\mathbf{R}_+$ par : $f(x) = x^n$ ($n \in \mathbf{N}$ et $n \geq 2$) et définissent la fonction réciproque f^{-1}. Dans le manuel officiel de la classe terminale[55], nous lisons (p. 94) l'activité suivante qui propose une démonstration du théorème qui établit l'existence de la fonction racine n$^{\text{ème}}$: $f^{-1} : x \mapsto \sqrt[n]{x}$

Activité
Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et f la fonction définie sur $\boldsymbol{R}$ *par* $f(x) = x^n$.
a) Montrer que f est continue et strictement croissante sur $\boldsymbol{R}_+$.
b) En déduire que f admet une fonction réciproque ;

Nous trouvons ensuite (p. 97) l'énoncé du théorème suivant établissant les différents cas de résolution du l'équation $x^n = a$, pour a réel et $n \geq 2$:

Soit a réel et n un entier supérieur ou égal à 2.
** Si n est impair et* $a \geq 0$*, l'équation* $x^n = a$ *admet une unique solution :* $\sqrt[n]{a}$.
** Si n est impair et* $a < 0$*, l'équation* $x^n = a$ *admet une unique solution :* $-\sqrt[n]{-a}$.
** Si n est pair et* $a \geq 0$*, l'équation* $x^n = a$ *admet comme solutions :* $-\sqrt[n]{a}$ *et* $\sqrt[n]{a}$.
** Si n est pair et* $a < 0$*, l'équation* $x^n = a$ *n'admet aucune solution.*

Ce théorème est surtout utilisé dans la détermination des racines n$^{\text{ème}}$ d'un nombre complexe, ce qui suppose qu'il soit assez familier pour les élèves de Terminale.

II. 2. 3. 2. Analyse des productions des étudiants

Notons tout d'abord qu'aucun des étudiants n'a adopté la stratégie 1 dans sa résolution de l'exercice. Le tableau suivant donne la répartition des 51 copies selon les différents cas de réponses suivant la stratégie 2 :

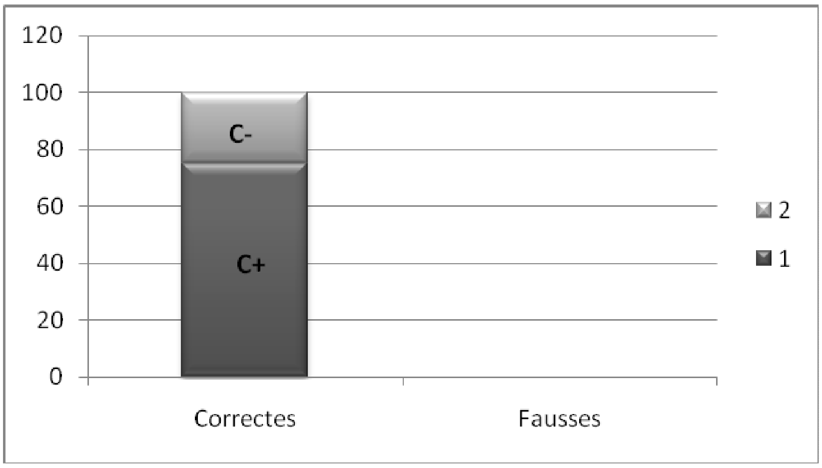
Tableau 17 : Répartition des réponses pour l'exercice 3

	Réponse correcte (C+)	Réponse correcte (C-)	Réponses fausses	Sans réponse
Tâche 1	38 (75 %)	13 (25 %)	0	0
Tâche 2	7 (14 %)	0	35 (69 %)	9 (17 %)

Analyse des réponses relatives à la tâche 1

Nous illustrons la répartition des réponses des étudiants à cette tâche par l'histogramme suivant :

[55] Ben Younes Ali. & al. (1999) : Mathématiques. 4$^{\text{ème}}$ année de l'enseignement secondaire. Section Math. Tome 1.



Graphique 8 : Réponses à la tâche 1 (en %)

Nous rapportons dans le tableau suivant les réponses les plus fréquentes produites par les étudiants :

Tableau 18 : Réponses relatives à la première tâche

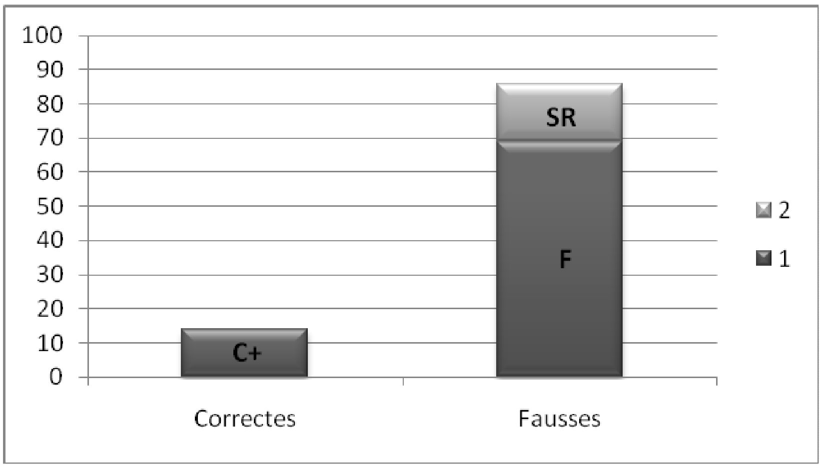
	Exemples de réponses	Commentaire	Type de réponses et Fréquence
Réponses correctes	***R₁*** *:* $f'(x)=-3x^2\le 0$, *et* $f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$, *donc f est strictement décroissante, et f est continue* $\Rightarrow$ *f est une bijection de* ***R*** *sur f(**R**)=* $=]\lim_{+\infty} f,\lim_{-\infty} f[=]-\infty,+\infty[$ *alors f est strictement décroissante sur* ***R****, alors f définie une bijection de* ***R*** *sur f(**R**)=**R**.*	Dans ce type de réponses, nous trouvons des réponses bien détaillées, comme **R_1** et d'autres qui contiennent de l'implicite, comme dans **R_2** et **R_3** où l'on ne précise pas comment on détermine l'intervalle image, ou le sens de variation de *f*.	C_+ (75 %)
	R₂ *: f est dérivable sur* ***R****.* $f'(x)=-3x^2\le 0, \forall x\in \mathbf{R}$*, alors f est strictement décroissante sur* ***R****, alors f définie une bijection de* ***R*** *sur f(**R**)=**R**.*		
	R₃ *:* $f'(x)=-3x^2$ *f est continue et strictement décroissante sur* ***R****, donc f réalise une bijection de* ***R*** *sur* ***R.***		
	R₄ *: f est dérivable sur* ***R*** *et* $f'(x)=-3x^2\le 0$**,** *donc f est décroissante et f est continue, donc f définit une bijection de* ***R*** *sur f(**R**)=* $=]\lim_{+\infty} f,\lim_{-\infty} f[=]-\infty,+\infty[$	Dans ce type de réponses nous trouvons beaucoup d'implicites et surtout les étudiants ne précisent pas que la décroissance de *f* est stricte.	C_- (25 %)
	R₅ *:* $f'(x)=-3x^2<0$**,** *donc f est décroissante. f est continue et décroissante sur* ***R*** *donc admet une bijection de* $\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}$		
	R₆ *: f est dérivable sur* ***R*** *et* $f'(x)=-3x^2<0$**,** *donc f définit une bijection de* ***R*** *sur f(**R**)=**R***		

Commentaire

Pour l'étude de la bijectivité de la fonction f, tous les étudiants ont utilisé le théorème sur les fonctions continues et strictement monotones et tous ont utilisé la fonction dérivée pour déterminer le sens de variation de f. La question ne semble poser aucune difficulté pour les étudiants. Toutefois, nous rencontrons plusieurs niveaux de rigueur concernant les formulations produites comme le montrent les exemples rapportés dans le tableau ci-dessus. Les imprécisions et les implicites que renferment les productions des étudiants pourraient être dus aux habitudes de travail des étudiants dans l'institution du secondaire, où l'on tolère parfois de telles imprécisions, ou encore au statut du test, qui, n'étant pas une évaluation officielle, a conduit certains étudiants à donner des réponses rapides sans chercher à fournir toutes les justifications nécessaires.

Analyse des réponses relatives à la tâche 2

Nous illustrons la répartition des réponses des étudiants à cette tâche par l'histogramme suivant :



Graphique 9 : Réponses à la tâche 2 (en %)

Les étudiants qui ont répondu à cette question ont adopté deux techniques de travail : la plupart d'entre eux ont posé l'équation $f(y) = x$ (ou, $f(x) = y$, selon les rôles attribués aux ostensifs *x* et *y*) et ont essayé de déterminer l'antécédent *y* (ou, *x*) pour un réel *x* (ou, *y*) donné. D'autres ont explicité directement la bijection réciproque f^{-1}. Pour ces derniers, ou bien ils ont effectué la résolution de l'équation au brouillon, ou bien ils ont appliqué directement le théorème du cours relatif à la résolution de l'équation $x^n = a$ (rapporté ci-dessus). Le tableau suivant donne les réponses les plus fréquentes produites par les étudiants relatives à la détermination de la bijection réciproque f^{-1}. Nous nous limitons dans ce tableau à la donnée de la réponse finale concernant les expressions de $f^{-1}(x)$ données par les étudiants.

Notons que la réponse correcte attendue est[56] : $\begin{cases} f^{-1}(x) = -\sqrt[3]{x},\ si\ x \geq 0 \\ \quad et \\ f^{-1}(x) = \sqrt[3]{-x},\ si\ x \leq 0 \end{cases}$

Tableau 19 : Réponses relatives à la deuxième tâche

	Exemples de réponses	Commentaire	Type de réponses et Fréquence
Réponses correctes	$\boldsymbol{R_1}$: $\begin{cases} f^{-1}(x) = -\sqrt[3]{x},\ \forall x \geq 0 \\ f^{-1}(x) = \sqrt[3]{-x},\ \forall x < 0 \end{cases}$	Tous les étudiants qui ont donné une réponse correcte ont effectué la résolution de l'équation correspondante sur leurs copies.	C+ (14 %)
	$\boldsymbol{R_2}$: $f^{-1}(x) = \begin{cases} -\sqrt[3]{x},\ si\ x \geq 0 \\ \sqrt[3]{\lvert x \rvert},\ si\ x \leq 0 \end{cases}$		
	$\boldsymbol{R_3}$: $f^{-1} : IR \to IR$ $x \mapsto \begin{cases} -\sqrt[3]{x},\ si\ x \in IR_- \\ \sqrt[3]{\lvert x \rvert},\ si\ x \in IR_+ \end{cases}$		
Réponses fausses	$\boldsymbol{R_4}$: $\begin{cases} f^{-1}(x) = -\sqrt[3]{x},\ si\ x \in IR_+ \\ f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x},\ si\ x \in IR_- \end{cases}$	La plupart des réponses fausses (26/35, soit 74 %) sont de types **R$_7$** à **R$_{10}$**. Nous trouvons 4 réponses de types **R$_4$** à **R$_6$** et 5 réponses où l'ostensif variable et l'ostensif image ne se correspondent pas, comme les réponses **R$_{11}$** à **R$_{13}$**.	F (69 %)
	$\boldsymbol{R_5}$: $\begin{cases} f^{-1}(x) = -\sqrt[3]{-x},\ \ \forall x \in IR_- \\ f^{-1}(x) = -\sqrt[3]{x},\ \forall\ x \in IR_+ \end{cases}$		
	$\boldsymbol{R_6}$: $\begin{cases} si\ x \in IR_-,\ y = \sqrt[3]{-x} \\ si\ x \in IR_+,\ y = \sqrt[3]{\lvert -x \rvert} \end{cases}$		
	$\boldsymbol{R_7}$: $\forall\ x \in IR,\ f^{-1}(x) = -\sqrt[3]{x}$		
	$\boldsymbol{R_8}$: $\forall\ x \in IR,\ f^{-1}(x) = \sqrt[3]{-x}$		
	$\boldsymbol{R_9}$: $y = -\sqrt[3]{\lvert x \rvert}$		
	$\boldsymbol{R_{10}}$: $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\lvert -x \rvert}$		
	$\boldsymbol{R_{11}}$: $\begin{cases} f^{-1}(x) = -\sqrt[3]{y},\ si\ x \in IR_- \\ f^{-1}(x) = \sqrt[3]{-y},\ si\ x \in IR_+ \end{cases}$		
	$\boldsymbol{R_{12}}$: $f^{-1}(x) = -\sqrt[3]{y}, \quad y \in IR$		
	$\boldsymbol{R_{13}}$: $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{-y}, \quad y \in IR$		

[56] Au lycée, il est explicitement indiqué (dans les programmes officiels et dans le manuel de la classe terminale) que la notation $\sqrt[n]{x}$ est exclusivement réservée aux réels positifs *x*.

Commentaire

Pour cette tâche, il y a eu 86 % entre réponses fausses et copies sans réponse, ce qui explique la difficulté qu'ont trouvé les étudiants dans la détermination de la bijection réciproque de f. La plupart de ces étudiants (31/44, soit environ 70 %) sont pourtant arrivés à poser convenablement le problème de la détermination de f^{-1}, en posant l'équation $y = f^{-1}(x)$, puis en passant à l'équation $f(y) = x \Leftrightarrow y^3 = -x$. Bien que la résolution de l'équation $x^n = a$ soit supposée une tâche routinière en classe terminale, comme nous l'avons remarqué dans l'analyse a priori, il semble ici que le signe « − » dans l'équation a perturbé les étudiants, qui se sont trouvés incapables de gérer convenablement les différents cas d'écriture de la solution. Par ailleurs, les réponses de type $\mathbf{R_{11}}$ à $\mathbf{R_{13}}$, où l'ostensif variable et l'ostensif image ne se correspondent pas, reflètent une insuffisance dans la gestion du symbolisme mathématique chez certains étudiants. Les deux types d'erreurs montrent comment les objets ostensifs conditionnent les possibilités des étudiants dans leur résolution du problème.

II. 2. 3. 3. Conclusion pour l'exercice 3

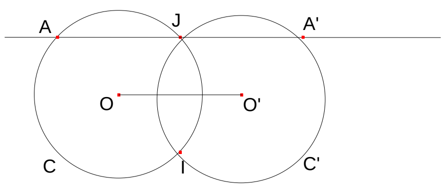
Pour cet exercice, l'absence de solution selon la stratégie 1, montre encore une fois la difficulté des étudiants à pouvoir relier leurs connaissances théoriques à leurs connaissances pratiques et à pouvoir se détacher, de façon personnelle, des habitudes de travail institutionnelles. Par ailleurs, l'exercice met en évidence des insuffisances chez la plupart des étudiants dans la gestion du symbolisme mathématique et des difficultés pour pouvoir adapter leurs connaissances à des situations non familières.

II. 2. 4. Le quatrième exercice

II. 2. 4. 1. Analyse a priori

Exercice 4

Soient deux cercles C et C' de même rayon, de centres distincts O et O' respectivement, se coupant en deux points I et J.
On mène par J la droite D parallèle à (OO'). D recoupe le cercle C en A et le cercle C' en A'.
En utilisant la translation t qui transforme O en O', montrez que J est le milieu du segment [AA'].



Analyse a priori

L'exercice a pour objectif de regarder les possibilités des étudiants à mettre en œuvre les notions d'application et de bijection dans la résolution des problèmes et de voir la conformité, au niveau de la rédaction et de la justification, des raisonnements produits. La consigne donnée dans l'énoncé à propos de l'usage de la translation *t* vise à préciser aux étudiants que c'est la stratégie « fonctionnelle » qui est requise dans la résolution de l'exercice. Ceci car d'autres stratégies « géométriques » peuvent être adoptées dans cette résolution.

Une technique correspondante à la stratégie « fonctionnelle » consiste à montrer que la translation *t* envoie *A* sur *J* et *J* sur *A'*, en déduire que $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{JA'}$ et de là conclure que *J* est le milieu du segment *[AA']*.

Pour ce faire, on peut procéder ainsi :

On remarque d'abord que *t(C) = C'* et *t(D) = D*.

On a : $A \in C \cap D$, donc $t(A) \in C' \cap D$, c'est-à-dire *t(A) = J* ou *t(A) = A'*.

Aussi, $J \in C \cap D$, donc $t(J) \in C' \cap D$, c'est-à-dire *t(J) = J* ou *t(J) = A'*.

Puisque $t \neq id_P$ (car $O \neq O'$) alors $t(J) \neq J$ et par suite *t(J) = A'*

La translation *t* étant bijective, alors *J* est l'unique antécédent de *A'*, donc, $t(A) \neq A'$ et par suite *t(A) = J*.

Ainsi, *t(A) = J* et *t(J) = A'*, le résultat en découle.

Notons que la stratégie fonctionnelle est requise dans plusieurs exercices de géométrie donnés dans les manuels officiels du lycée, à propos de l'étude des transformations géométriques. Toutefois, comme l'a montré l'étude des rapports institutionnels, ces exercices sont souvent guidés et laissent peu de choix et d'initiatives aux étudiants. L'exercice proposé ici se trouve dans le manuel de deuxième année secondaire[57] avec une formulation différente de la question[58], proposant une ébauche au début de la résolution, et explicitant l'égalité vectorielle à laquelle il faut aboutir à la fin. Nous pouvons considérer qu'il s'agit d'une tâche assez familière pour les élèves en fin de leurs cursus Secondaire. Dans l'analyse des productions des étudiants nous nous intéressons particulièrement aux stratégies adoptées (fonctionnelle/géométrique), au mode d'usage (explicite/implicite) des propriétés fonctionnelles dans la justification de la solution produite et à la conformité du langage ensembliste utilisé dans les rédactions produites (conforme/non conforme).

II. 2. 4. 2. Analyse des productions des étudiants

Les productions des étudiants sont réparties comme l'indique le tableau suivant :

---

[57] Mongi Zouari et al. (?) : Mathématiques. 2ère année Secondaire. CNP. Code 222 501.

[58] Dans l'exercice du manuel, on demande de déterminer les images respectives du cercle *C* et de la droite *D* par la translation $t_{\overrightarrow{OO'}}$ et d'en déduire que : $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{JA'} = \overrightarrow{OO'}$. (Exercice 7, page 152)

Tableau 20 : Répartition des réponses des étudiants à l'exercice 4

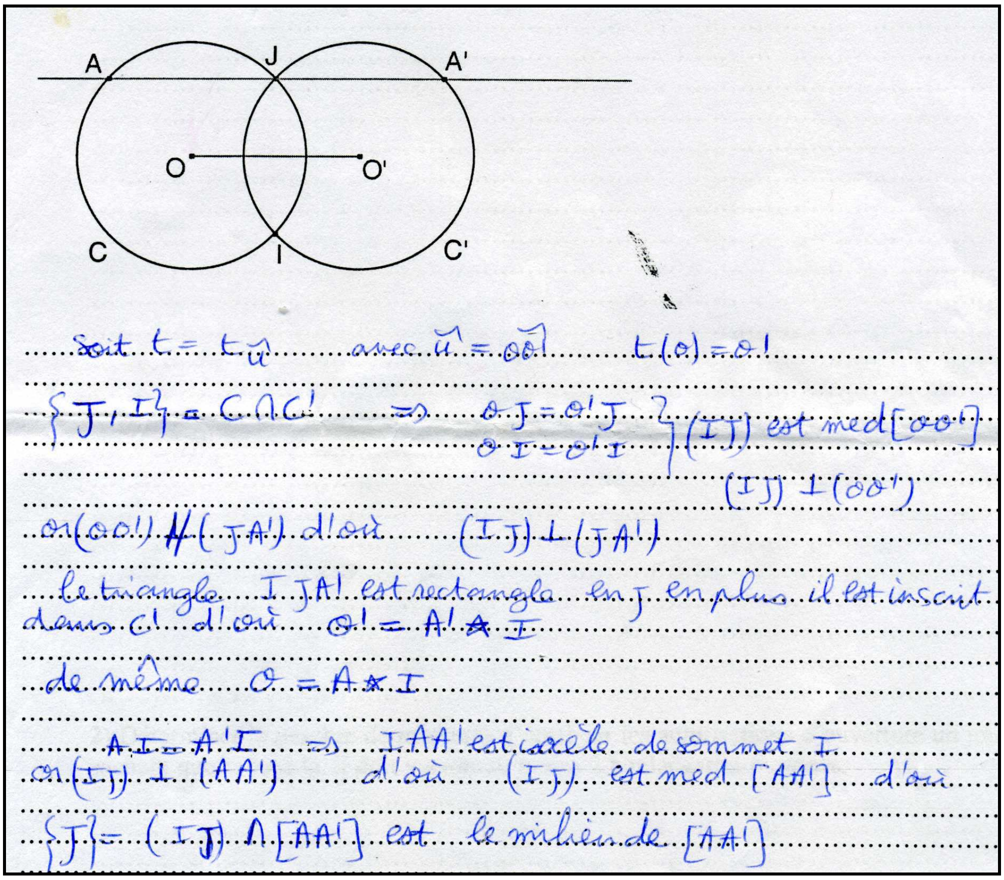
Correctes	Stratégie fonctionnelle	25	49 %
	Stratégie géométrique	6	12 %
Non correctes	Réponses fausses	16	31 %
	Copies sans réponse	4	8 %

Analyse des réponses correctes

a) Selon la stratégie géométrique

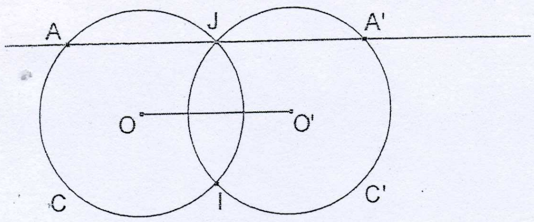
Pour les réponses selon la stratégie géométrique, différentes techniques sont employées par les étudiants. La rédaction est généralement conforme, nous rencontrons cependant un certain implicite dans 3 des 6 copies données. Nous rapportons ci-dessous, deux exemples de solutions de ce type produites par les étudiants.

Copie 1 (Solution géométrique)



Dans cette solution, les résultats sont bien explicités et convenablement justifiés. La rédaction est aussi conforme.

Copie 2 (Solution géométrique)



$(IJ) \perp (AA')$

(IJ) = méd $[OO']$ $(IJ) \perp (OO')$ $\Rightarrow$ $\cancel{(IJ) \perp (AA')}$

$\Rightarrow$ IJA' rectangle en J ; $A' \in \mathcal{C}'$, $I \in \mathcal{C}'$

d'où $[IA']$ diamètre de $\mathcal{C}'$

$\Rightarrow$ $O' = I * A'$

soit $\Omega = O * O'$; $\Omega \in [IJ]$ [9]

$\Rightarrow 2\overrightarrow{\Omega O'} = \overrightarrow{JA'} \Leftrightarrow \overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{JA'}$

$\Rightarrow$ $t_{\overrightarrow{OO'}}(J) = A'$ (1)

de même IJA rectangle en J, $A \in \mathcal{C}$ et $I \in \mathcal{C}$

d'où $[AI]$ diamètre de $\mathcal{C}$ $\Rightarrow$ $O = A * I$

dans IAJ $2\overrightarrow{O\Omega} = \overrightarrow{AJ}$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{AJ}$

$t_{\overrightarrow{OO'}}(A) = J$ (2)

(1) et (2) $\Rightarrow$ $J = A * A'$.

Pour cette solution la rédaction est conforme, cependant, nous rencontrons un certain implicite dans le raisonnement produit. En effet :

- l'étudiant ne justifie pas que *(IJ)* est médiatrice de *[OO']*,
- il obtient que $2.\overrightarrow{\Omega O'} = \overrightarrow{JA'}$ via le théorème des milieux, mais sans justifier que Ω est le milieu de *[IJ]*,

Par ailleurs, pour conclure que *J* est milieu de *[AA']*, on utilise les égalités vectorielles $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{JA'}$ et $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{AJ}$, et non les égalités fonctionnelles: $t_{\overrightarrow{OO'}}(J) = A'$ et $t_{\overrightarrow{OO'}}(A) = J$.

Ces égalités ne jouent aucun rôle dans la solution donnée, il semble que l'étudiant les a introduites seulement pour répondre à la demande de l'exercice concernant l'utilisation de la translation *t*.

b) Selon la stratégie fonctionnelle

Les solutions correctes réalisées selon la stratégie fonctionnelle se répartissent du point de vue conformité et précision de la rédaction comme suit :

Tableau 21 : Répartition des solutions correctes du point de vue conformité et précision

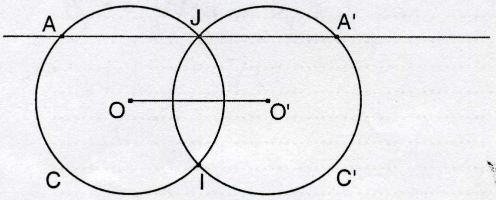
Rédaction	bien conforme	8	16 %
	moins conforme	17	33 %
Raisonnement	bien explicité	6	12 %
	présence d'implicites	19	37 %

Notons que les étudiants qui ont justifié leurs raisonnements de façon bien explicite ont tous fourni une rédaction bien conforme concernant l'usage du symbolisme mathématique. L'implicite que nous rencontrons dans les copies provient dans la plupart des cas de la non justification des images par la translation *t* des points *A* et *J*. Quant à la non-conformité de la rédaction, nous rencontrons à ce propos un usage erroné du langage ensembliste, du genre :

$$C'\cap(AA')\in\{A'\},\ J=\Delta\cap C',\ \{J\}\in(AA')\cap C,\ t_{\overline{OO'}}(J)=C'\cap D,\ t(J)=\{J,A'\},\ \ldots$$

Par ailleurs, les raisonnements adoptés dans les solutions correctes de type « fonctionnel » suivent globalement la même stratégie que celle présentée dans l'analyse a priori. Nous distinguons cependant deux techniques dans le calcul de l'image *t(A)* : la première est celle donnée dans l'analyse a priori, et la deuxième utilise la translation réciproque t^{-1}. Nous rapportons ci-dessous des exemples des différents types de solutions fournies dans cette catégorie :

Copie 3 (Solution fonctionnelle : C+)



$t_{\vec{OO'}}(O)=O'$, $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ ont m. rayon donc $t_{\vec{OO'}}(\mathscr{C})=\mathscr{C}'$

~~$t_{\vec{OO'}}((AA'))$ est une droite // à AA' passant~~

$t_{\vec{OO'}}((AA'))=(AA')$ car $(AA')//(OO')$.

• $J\in(AA')\cap\mathscr{C}$

$t_{\vec{OO'}}(J)\in t_{\vec{OO'}}((AA'))\cap t_{\vec{OO'}}(\mathscr{C})$

$t_{\vec{OO'}}(J)\in(AA')\cap\mathscr{C}' \Rightarrow t_{\vec{OO'}}(J)\in\{J,A'\}$ or J impossible car $t\neq Id_p$

$t_{\vec{OO'}}(J)=A' \Rightarrow \boxed{\vec{OO'}=\vec{JA'}}$ (1)

• $A\in(AA')\cap\mathscr{C} \Rightarrow t_{\vec{OO'}}(A)\in t_{\vec{OO'}}((AA'))\cap t_{\vec{OO'}}(\mathscr{C})$

$\Rightarrow t_{\vec{OO'}}(A)\in(AA')\cap\mathscr{C}'$

$\Rightarrow t_{\vec{OO'}}(A)\in\{A',J\}$ or $A'=t_{\vec{OO'}}(J)$ et $t_{\vec{OO'}}$ est bijective donc A' ne peut pas être l'image de A part

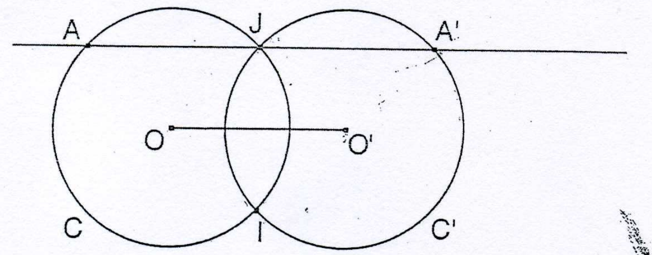
d'où $t_{\vec{OO'}}(A)=J \Rightarrow \boxed{\vec{OO'}=\vec{AJ}}$ (2)

(1) et (2) $\Rightarrow \vec{AJ}=\vec{JA'}$ d'où $J=A*A'$.

12

Pour cette copie, le raisonnement est bien justifié, et la rédaction est conforme.

Copie 4 (Solution fonctionnelle : C-)



$t(O) = O'$ de plus $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont de même rayon

donc $t(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$

$t((AA')) = (AA')$ $\Big\}$ $t(\cancel{\mathcal{C} \cap (AA')}) = \cancel{\mathcal{C}' \cap (AA')}$

$\Rightarrow \{J\} \in (AA') \cap \mathcal{C} \Rightarrow t\{J\} \in t(AA') \cap t(\mathcal{C}) \Leftrightarrow t\{J\} \in \{J, A'\}$

$t\{J\} = J$ donc $\vec{JJ} = \vec{OO'} = \vec{0}$ Absurd donc $t(J) = A'$ ①

$\Rightarrow \{J\} \in (AA') \cap \mathcal{C}' \Rightarrow t^{-1}\{J\} \in t^{-1}(AA') \cap t^{-1}(\mathcal{C}') \Leftrightarrow t^{-1}(J) \in \{J, A\}$

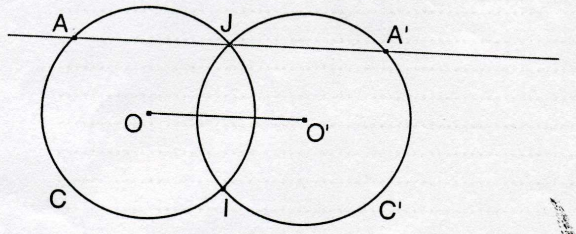
$t^{-1}(J) = J$ donc $\vec{JJ} = \vec{O'O} = \vec{0}$ Asurd donc $t^{-1}(J) = A$ ②

① $\Rightarrow \vec{JA'} = \vec{OO'}$ $\Big\}$ $\vec{JA'} = \vec{AJ}$ par suite $J = A * A'$

② $\Rightarrow \vec{AJ} = \vec{OO'}$

L'étudiant ici utilise la translation t^{-1} pour obtenir $t^{-1}(J) = A$, il déduit ensuite que $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{OO'}$. Il y a une étape intermédiaire qui manque. Par ailleurs, il confond entre point et singleton, ou entre les signes $\in$ et $\subset$.

Copie 5 (Solution fonctionnelle : C-)



$t(O) = O'$

C et C' sont de même rayon $\Big\} \Rightarrow t(C) = C'$

$J \in C \cap D \Rightarrow t(J) \in t(C) \cap t(D)$

or $D \parallel (OO')$ donc $t(D) = D$ $\Big\} \Rightarrow t(J) \in C' \cap D$

$C' \cap D = \{J, A'\}$ d'où $t(J) = A'$

$A \in C \cap D \Rightarrow t(A) \in t(C) \cap t(D$

$\Rightarrow t(A) \in C' \cap D$

$\Rightarrow t(A) = J$

On a $t(A) = J$

$t(J) = A'$ $\Big\} \Rightarrow \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{JA'}$

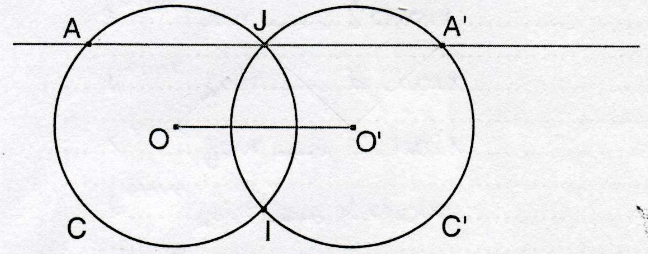
$\Rightarrow J$ est le milieu de $[AA']$

Pour cette copie, la rédaction est conforme, mais l'étudiant ne justifie pas les images des points J et A. Il prend chaque fois le bon point. Le passage des images des points J et A à l'égalité $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{JA'}$ n'est pas non plus justifié.

Analyse des réponses fausses

La plupart des réponses fausses adoptent la stratégie géométrique. Bien que nous rencontrions divers usages de la translation, ceux-ci généralement ne jouent aucun rôle dans les solutions produites. Les erreurs dans les réponses fausses sont dues à des justifications erronées des résultats établis ou à une absence de justification. Les exemples ci-dessous donnent les erreurs les plus fréquentes rencontrées dans les copies des étudiants.

Copie 6 (Solution fausse)



les 2 triangles $O'A'J$ et JOO' sont 2 triangles isocèles

enplus on $JO' = O'A' = r_{\mathcal{C}'} = r_{\mathcal{C}} = OJ$

$JO' = O'A' = OJ$

donc ces 2 triangles sont identiques

alors on a $OO' = JA'$ enplus on a $(JA') // (OO')$

d'ou $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{JA'}$

c.a.d $t_{\overrightarrow{OO'}}(J) = A'$

de même pour les 2 triangles OJA et $OO'J$ on a $AJ = OO'$

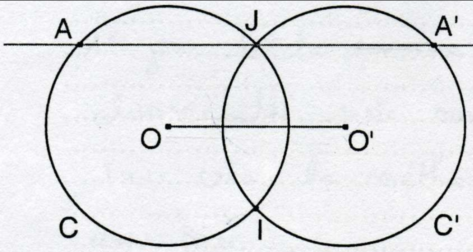
et $(AJ) // (OO')$ alors $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{AJ}$ c.a.d $t_{\overrightarrow{OO'}}(A) = J$

conclusion

$\overrightarrow{JA'} = \overrightarrow{AJ}$ alors J est le milieu de $[AA']$

Ici, la justification de l'isométrie entre les triangles *O'A'J* et *JOO'* est erronée. L'étudiant ne montre pas que les angles $O\hat{J}O'$ et $J\hat{O'}A'$ sont égaux. Notons aussi que l'usage de la translation $t_{\overrightarrow{OO'}}$ est inutile.

Copie 7 (Solution fausse)



$t(O) = O'$

C et C' sont de m. rayon $\Big\}$ $t(C) = C'$

$A^* \in C^* \Rightarrow t(A^*) \in t(C^*)$

$\Rightarrow t(A^*) \in C' \Rightarrow \overrightarrow{A^*t(A^*)} = \overrightarrow{O^*O'}$

or $(OO')//D$, $O^*A^* = JO^*$ $\Big\}$ $\overrightarrow{A^*J} = \overrightarrow{O^*O'}$ (1)

d'où $t(A^*) = J$

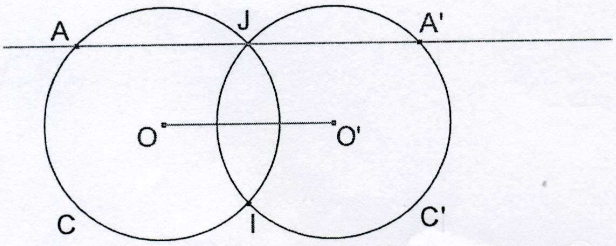
$J \in C^* \Rightarrow t(J) \in t(C^*) \Rightarrow t(J) \in C'$

or $(OO')//D$, $O'A' = JO$ $\Big\}$ $\overrightarrow{JA'} = \overrightarrow{OO'}$ (2)

d'après (1) et (2) on a $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{JA'}$ d'où $J = A * A'$

Dans cette copie, l'étudiant déduit de $A \in C$ et $t(A) \in t(C)$ que $\overrightarrow{At(A)} = \overrightarrow{OO'}$, ce qui est en fait la conséquence directe de la définition de *t*. De plus, *(OO')//D* et *OA=JO'* ne permettent pas d'obtenir que $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{OO'}$. De même pour l'égalité (2).

Copie 8 (Solution fausse)



Soit la translation $t_{\vec{u}}$ tq $t_{\vec{u}}(O) = O'$

On sait que C et C' ont le même rayon

Donc on peut en déduire que $t_{\vec{u}}(C) = C'$ tq $t_{\vec{u}}(O) = O'$

$\{J\} = C \cap C' \Leftrightarrow OJ = O'J$ or $A \in C$ et $A' \in C'$

$\Leftrightarrow OJ = OA = O'A' = O'J$ (C et C' m. rayon)

On a donc $t_{\vec{u}}(A) = J$ et $t_{\vec{u}}(J) = A'$ or $J \in (AA')$

$\overrightarrow{AJ} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{JA'} = \vec{u}$

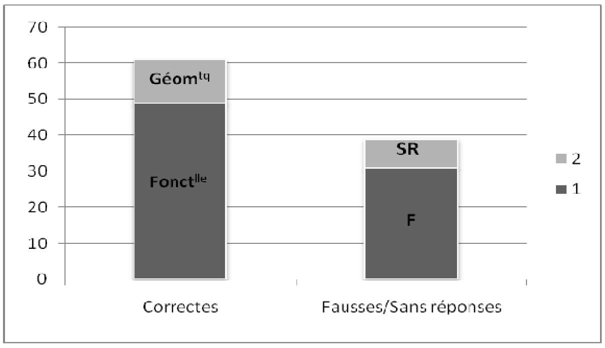
$\Rightarrow J = A * A'$

Dans cette copie, on ne voit pas l'intérêt de l'égalité : $t_{\vec{u}}(C) = C'$. D'un autre côté, aucune relation n'apparaît entre les égalités : *OJ=OA=O'A'=O'J* d'une part et $t_{\vec{u}}(A) = J$, $t_{\vec{u}}(J) = A'$, d'autre part. Ces dernières restent non justifiées.

II. 2. 4. 3. Conclusion pour l'exercice 4

Nous interprétons les productions des étudiants à cet exercice à travers deux points : la possibilité de construire une stratégie de résolution correcte, et la possibilité de produire une rédaction conforme de la solution.

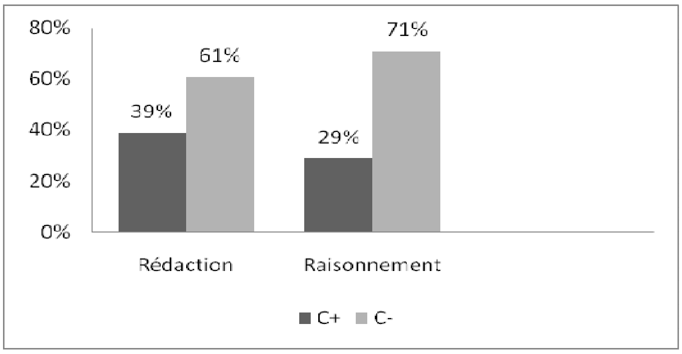
Pour le premier point, le graphique ci-dessous illustre les résultats obtenus :



Graphique 10 : Répartition des réponses à l'exercice 4 (en %)

Nous remarquons que plus que la moitié (61 %) des étudiants interrogés sont arrivés à construire une stratégie de travail pertinente pour résoudre l'exercice, dont la plupart (80 %, soit 49 % du nombre total des étudiants) ont adopté la stratégie fonctionnelle demandée. Ceci reflète des capacités d'analyse de la situation, des possibilités de mobiliser les outils adéquats pour la résolution de l'exercice et une certaine familiarité dans la mise en œuvre d'une transformation géométrique dans les questions de géométrie. Cette familiarité reste toutefois encore difficile pour environ la moitié des étudiants interrogés. Ceci étant, le nombre des étudiants qui ne sont pas arrivés à résoudre correctement l'exercice (39 %, réponses fausses + copies sans réponses) reste important. L'analyse des solutions erronées produites met en évidence deux difficultés essentielles rencontrées par les étudiants : la première concerne une insuffisance dans l'utilisation de théorèmes de géométrie étudiés au collège, et la deuxième concerne la possibilité de produire un raisonnement cohérent dont les composants soient bien articulés. Pour de bon sujets de l'institution du Secondaire, comme ceux qui sont concernés par l'expérimentation, ceci pourrait s'expliquer, d'une part par la contextualisation des connaissances apprises, qui apparait à travers une focalisation en classe terminale sur le travail de la géométrie des transformations et une relative négligence de la géométrie synthétique du collège, et d'autre part par le manque d'occasions pour le travail des exercices de synthèse, demandant initiative et disponibilité des connaissances. Ce constat s'appuie sur l'analyse des rapports institutionnels dans l'institution du Secondaire qui a mis en évidence une tendance, en géométrie, à privilégier le travail sur les transformations géométriques, avec des exercices guidés, où les techniques mises en œuvre sont routinières et stéréotypées.

Pour le deuxième point, qui concerne la possibilité de produire une rédaction conforme de la solution, nous illustrons les résultats obtenus dans le graphique suivant :



Graphique 11 : Conformité de la rédaction des solutions correctes dans l'exercice 4

Nous remarquons ici que parmi les étudiants qui ont produit un raisonnement correct, peu sont arrivés à bien justifier leur raisonnement et à fournir une rédaction conforme de la solution produite. La plupart d'entre eux font des confusions dans l'usage du langage ensembliste et éprouvent des difficultés à mettre en évidence les propriétés mobilisées dans la résolution de l'exercice. Ceci, à notre avis, est une conséquence des insuffisances constatées dans le travail des notions ensemblistes dans l'enseignement secondaire et du rôle sous-estimé des outils technologiques dans les praxéologies mathématiques mobilisées par les étudiants dans leur travail.

II. 3. Conclusion générale concernant les rapports personnels aux notions ensemblistes fonctionnelles dans l'institution ES

Nous résumons les conclusions obtenues dans ce test diagnostique dans les points suivants :

- Les connaissances dont disposent la plupart des étudiants à propos des notions ensemblistes fonctionnelles sont essentiellement d'ordre technique.

- Les étudiants sont capables de reproduire convenablement des techniques de travail apprises sans avoir besoin de se rapporter aux justifications technologiques associées ou de se soucier de la cohérence de la technique utilisée avec la technologie connue.

- Une insuffisance et une fragilité dans les connaissances technologiques relatives aux notions ensemblistes fonctionnelles et dans l'usage et la gestion du langage ensembliste et plus généralement du symbolisme mathématique.

- Des difficultés d'action dans des contextes non familiers, que ce soit du point de vue des représentations sémiotiques mises à disposition ou des connaissances à mobiliser.

- Une influence de la rigidité des techniques et de l'isolement des tâches mises en œuvre sur la formation des connaissances des étudiants.

Ces conclusions se trouvent en corrélation avec les caractéristiques de l'environnement praxéologique relatif à l'enseignement des notions ensemblistes fonctionnelles dans l'enseignement secondaire, marquées par un travail axé sur le bloc pratico-technique, avec des tâches guidés et des techniques routinières et stéréotypées, une sous-estimation du discours technologique dans le topos des élèves et une déconnexion des blocs pratico-technique $[T, \tau]$ et technologico-théorique $[\theta, \Theta]$ des praxéologiques mathématiques mises en place. Ceci montre l'effet des choix institutionnels sur les possibilités d'action des étudiants devant les tâches mathématiques, sur l'orientation de leurs modalités de travail ainsi que sur la forme de leurs connaissances.

Nous concluons que, pour les étudiants entrant aux classes CPS1, à l'issue de leur enseignement Secondaire, *le niveau personnel de fonctionnement des connaissances*, relatif aux notions ensemblistes fonctionnelles est essentiellement de niveau technique et se trouve ainsi conforme au *niveau institutionnel de fonctionnement des connaissances* dans l'institution ES relatif au topos des élèves, mis en évidence lors de l'étude des rapports institutionnels. L'écart constaté dans cette étude entre le fonctionnement des connaissances dans le topos de l'élève et celui de l'enseignant dans l'institution ES, n'a pu être franchi que par une minorité d'étudiants. Peut être, ceux-ci ont-ils bénéficié d'un intérêt particulier accordé par leurs enseignants du Secondaire au travail d'ordre technologique et/ou des conditions socio-culturelles qui leur ont permis de s'offrir une formation spécifique supplémentaire en mathématiques[59], mais il s'agit ici simplement d'hypothèses.

III. Rapports personnels aux notions ensemblistes fonctionnelles dans l'institution CPS1

Comme indiqué dans l'introduction du chapitre, après deux trimestres d'enseignement nous avons fait passer aux étudiants des deux classes concernées par le test diagnostique un test pour évaluer l'évolution de leur rapport personnel aux notions ensemblistes fonctionnelles et leurs aptitudes de résolution des problèmes. Dans cette partie, nous présentons d'abord l'organisation générale de cette évaluation, puis analysons les tâches proposées aux étudiants et présentons les résultats obtenus.

III.1. Organisation générale de l'évaluation

III. 1. 1. Conception du test d'évaluation et contexte de passation

Après deux trimestres d'étude en CPS1, nous avons donc organisé avec les deux classes concernées par le test diagnostique un test d'évaluation. Pendant ces deux trimestres, les étudiants ont suivi un enseignement ordinaire, en ce sens qu'aucune action didactique spécifique n'a été mise en place pour agir sur le cours normal des enseignements. Ceci dans l'objectif d'évaluer plus précisément les potentialités et limites d'un enseignement ordinaire

[59] Comme par exemple s'offrir des cours personnalisés ou avoir un encadrement spécifique de la part de parents matheux.

pour permettre aux étudiants de surmonter les ruptures existant entre l'enseignement secondaire et l'enseignement supérieur dans le domaine des notions ensemblistes fonctionnelles et de l'usage du symbolisme mathématique, pour s'adapter aux attentes de l'enseignement supérieur.

Ceci étant, la faible marge de manœuvre que permettent les contraintes d'enseignement dans les classes CPS1 nous a obligés à organiser le test dans le cadre du contrôle continu ordinaire des étudiants. Cette contrainte nous a forcés à concevoir un test où les notions ensemblistes fonctionnelles intervenaient dans le contexte d'étude de la période du test. Nous avons pu cependant nous arranger pour organiser le test en dehors des heures de cours, ce qui nous a donné plus de liberté dans la conception du sujet du test et nous a permis de fournir aux étudiants de meilleures conditions de travail, en agissant sur la durée du test.

Dans la période où s'est déroulé le test, les étudiants finissaient l'étude des chapitres sur les espaces vectoriels de dimensions finies et les matrices. Les chapitres étudiés antérieurement en Algèbre, depuis le début de l'année universitaire étaient :

Chap. 1. Ensembles et applications
Chap. 2. Ensembles finis et dénombrement
Chap. 3. Arithmétique dans **Z**
Chap. 4. Structures algébriques (Groupe, Anneau et Corps)
Chap. 5. Espaces vectoriels et applications linéaires
Chap. 6. Polynômes et fractions rationnelles

Le test porte de ce fait sur les notions d'injection, de surjection et d'isomorphisme de groupes dans le contexte des espaces vectoriels de matrices. La variété des notions intervenant dans les exercices proposés requiert la mise en œuvre de diverses propriétés et théorèmes étudiés au cours de l'année, la plupart relatifs aux chapitres 1, 4 et 5. Nous reviendrons avec plus de détail sur ce point lors de l'analyse a priori du test.

Notre objectif à travers ce test est de répondre aux questions de recherche suivantes :

- Comment évoluent les rapports des étudiants de CPS1 aux notions ensemblistes fonctionnelles et au symbolisme mathématique associé ?
- **Q**uelles sont les difficultés éventuelles qu'éprouvent ces étudiants dans l'activité de résolution de problème, dues à l'usage des notions ensemblistes fonctionnelles et du formalisme mathématique ? A quel niveau se situent ces difficultés, et peut-on les relier aux ruptures mises en évidence par l'analyse institutionnelle ?

III. 1. 2. Contexte de l’expérimentation

Sur les 51 étudiants qui ont passé le test diagnostique, 43 étaient présents pour le test d’évaluation[60]. Tous les étudiants ont passé le test ensemble et au même moment. Deux heures ont été accordées aux étudiants pour répondre aux questions du test. La plupart d’entre eux ont rendu leurs copies avant la fin du temps accordé. D’habitude, dans les évaluations ordinaires, cette durée est consacrée aux examens de fin de trimestre, où le sujet est beaucoup plus long et plus consistant[61]. Par ailleurs, les étudiants étaient informés deux semaines à l’avance de la date du déroulement du test et savaient que l’épreuve porterait essentiellement sur les deux derniers chapitres étudiés.

III. 1. 3. Méthodologie d’analyse

Pour l’analyse des productions des étudiants, nous suivons la même méthodologie que celle adoptée dans le cas du test diagnostique. Nous classons ainsi les réponses des étudiants suivant les catégories C+ (pour réponse correcte convenablement rédigée et bien justifiée), C- (pour réponse correcte avec manque de précision), F (pour réponse fausse) et SR (pour copie sans réponse).

Néanmoins, contrairement au test diagnostique, où les questions posées étaient bien circonscrites, et n’engagent pas des raisonnements compliqués ou la gestion de nombre important de données, les exercices du test d’évaluation font intervenir une variété de données et de notions, et la plupart des questions demandent d’élaborer une stratégie de travail et d’effectuer un choix de techniques pour la réalisation des tâches et des sous-tâches composant la stratégie fixée. Ceci nous amène à distinguer dans les productions des étudiants entre *raisonnement correct* et *raisonnement heuristiquement correct* (Arsac, 1996)[62].

Pour une question donnée, une réponse correcte de type C+, correspond à un raisonnement correct dans son double aspect, heuristique et produit final (rédaction). Quant à une réponse correcte de type C-, elle correspond à une solution où la stratégie de résolution fixée par l’étudiant est pertinente et/ou la (les) technique(s) de travail choisie(s) est (sont) convenable(s), mais où la rédaction de la solution n’est pas conforme (manque de précision(s), manque de rigueur, présence d’implicite(s)…).

---

[60] Quatre étudiants ont changé de section et les quatre autres étaient absents.

[61] Voir exemple de sujet d’examen en Annexe.

[62] Selon Gilbert Arsac, le mot raisonnement désigne aussi bien le produit final de l’activité (raisonnement exprimé qui établit la solution d’un problème) que l’activité elle-même. Pour distinguer ces deux aspects, Arsac désigne l’activité par : raisonnement heuristique et le produit exprimé par raisonnement final. (Arsac, 1996). Si l’analyse des productions écrites des étudiants ne constitue pas le moyen idéal pour accéder au raisonnement heuristique, il nous semble néanmoins qu’elle pourrait nous déceler dans le raisonnement final des traces du raisonnement heuristique.

Par ailleurs, pour faciliter le dépouillement et le traitement statistique des réponses des étudiants, nous regroupons ensemble, comme dans le test diagnostique, les réponses considérées comme similaires.

III. 2. Le test d'évaluation

Le test est composé de deux exercices et, pour chacun des deux, nous précisons au préalable l'objectif général visé par la donnée de l'exercice. Nous effectuons ensuite, pour chaque question, une analyse a priori que nous faisons suivre de l'analyse des productions des étudiants correspondant à cette question[63].

III. 2. 1. Le premier exercice

III. 2. 1. 1. Objectif général

Exercice 1

*On désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ l'espace vectoriel sur **C** des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes.*
Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ et considérons l'application

$$f_A : \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$$
$$M \mapsto AM - MA$$

1) a- Montrer que f_A est une application linéaire.
b- En déduire que l'ensemble F des matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ vérifiant MA = AM est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.
2) a- Calculer $f_A(I_n)$ où I_n désigne la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.
b- Existe-t-il des matrices A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telles que f_A soit injective ?
c- Existe-t-il des matrices A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telles que f_A soit surjective ?

L'exercice vise l'étude de certaines propriétés, ensemblistes et linéaires, d'une application f_A, paramétrée à l'aide d'une matrice A. La distinction entre les statuts du paramètre A et de la variable M est essentielle pour pouvoir s'approprier les questions de l'exercice et savoir y répondre. La désignation des matrices peut se faire dans différents registres sémiotiques (lettre générique M, suite de coefficients (m_{ij}), tableau de coefficients à n lignes et n colonnes). Le traitement de chaque question et les difficultés qu'il pose sont étroitement liés à la représentation sémiotique choisie pour désigner les matrices ainsi qu'aux formulations adoptées des notions en jeu. Les questions 1-a, 1-b et 2-a sont fermées et ne posent a priori pas de difficultés, en revanche, les questions 2-b et 2-c sont ouvertes et susceptibles de diverses formulations dont dépendent le choix de techniques de travail. Outre la connaissance des notions et propriétés intervenant dans l'exercice, la réponse aux questions demande une bonne gestion du symbolisme mathématique à mettre en œuvre. Notre objectif est de voir la disponibilité des notions en jeu chez les étudiants ainsi que leur possibilité d'adapter leurs connaissances au contexte sémiotique de l'exercice et de gérer le symbolisme qui en résulte.

[63] Le texte complet du test d'évaluation est donné en Annexe.

Pour les analyses qui suivent, nous adoptons les notations suivantes concernant les tâches proposées dans l'exercice :

T_1	Montrer qu'une application est linéaire
T_2	Montrer qu'une partie est un sous espace vectoriel d'un espace vectoriel donné
T_3	Calculer l'image d'un élément par une application
T_4	Vérifier si une application est injective
T_5	Vérifier si une application est surjective

III. 2. 1. 2. Analyse a priori des questions et analyse des productions des étudiants

Question 1-a. (Tâche T_1)

$$f_A : \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$$
$$M \mapsto AM - MA$$

1) a- Montrer que f_A est une application linéaire.

a) Analyse a priori

Cette tâche T_1 se réalise via une application directe de la définition d'une application linéaire. Il s'agit d'une tâche d'ordre technique. Des difficultés peuvent apparaitre suite à une gestion non appropriée (du point de vue du statut et/ou des représentations sémiotiques) des matrices mises en jeu.

Une technique possible pour répondre à la question consiste à montrer que pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$, et pour toutes matrices *M* et *N* de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, on a :

$$f_A(\lambda.M + N) = \lambda.f_A(M) + f_A(N)$$

Il n'est pas demandé de justifier les différentes étapes de calcul.

b) Analyse des productions des étudiants

Sur 43 réponses données, nous dénombrons 31 réponses correctes de type C+ et 12 réponses correctes de type C-.

Réponses correctes de type C+

Dans ce type de réponses, tous les étudiants ont utilisé la définition d'une application linéaire. Diverses formulations ont été cependant employées : calcul de $f_A(\lambda.M + N)$, calcul de $f_A(\lambda.M + \mu.N)$, calculs séparés selon les deux lois : $f_A(M+N) = f_A(M) + f_A(N)$, et $f_A(\lambda.M) = \lambda.f_A(M)$. Les hypothèses concernant les matrices et les scalaires sont bien précisées et le calcul est plus ou moins justifié. Dans toutes les copies, les matrices sont désignées par des lettres génériques comme dans l'énoncé. Nous donnons ci-dessous un exemple de telles réponses.

Production 1 (Copie 13)[64]

1) a/ Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et soient M, N dans $M_n(\mathbb{C})$.
Comme $A \in M_n(\mathbb{C})$, on peut effectuer la multiplication de A par M et de A par N.

$f_A(\lambda M + N) = A(\lambda M + N) - (\lambda M + N)A$

$= A(\lambda M) + A.N - [(\lambda M)A + NA]$ (la multiplication des matrices est distributive à "+")

$= \lambda AM + AN - \lambda MA - NA$

$= \lambda(AM - MA) + (AN - NA)$

$= \lambda f_A(M) + f_A(N)$

Donc f_A est une application linéaire

Réponses correctes de type C-

Dans les 12 réponses de ce type, les étudiants ont convenablement effectué le calcul permettant d'établir la linéarité de f_A (avec diverses formulations, comme dans le cas des réponses C+). Nous rencontrons cependant un manque de précision au niveau de la justification des calculs, de l'écriture des hypothèses ou de la conformité des notations symboliques. Les matrices sont désignées, soit par des lettres soit par des suites de coefficients (m_{ij}). Les productions ci-dessous montrent des exemples de telles réponses :

Production 2 (Copie 32)

1°/ a] D'après la bilinéarité des matrices on a :

$f_1 : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$
$\quad M \longmapsto AM$ est linéaire

d $f_2 : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$
$\quad M \longmapsto MA$ est linéaire

ainsi $f_A : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$
$\quad M \longmapsto AM - MA$ est linéaire

L'étudiant ici utilise le fait que f_A est la somme de deux applications linéaires mais sa justification est erronée. Attribuer la « bilinéarité » aux matrices n'a pas de sens. Ce type d'erreur est fréquent chez les étudiants, comme le montrent les productions suivantes :

[64] Les copies sont numérotées pour permettre, si besoin est, de relier les réponses à différentes questions d'une même copie.

Production 3 (Copie 37)

Soit $(M_1, M_2) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$ $\in ?$

M.q : $f_A(M_1+\lambda M_2) = f_A(M_1) + \lambda f_A(M_2)$

en effet :

$f_A(M_1+\lambda M_2) = A(M_1+\lambda M_2) - (M_1+\lambda M_2)A.$

$= AM_1 + \lambda AM_2 - M_1A - \lambda M_2A$ (car la bilinéarité dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$)

$= AM_1 - M_1A + \lambda AM_2 - \lambda M_2A$

$= f_A(M_1) + \lambda(AM_2 - M_2A)$

$= f_A(M_1) + \lambda f_A(M_2)$

d'où : f_A est linéaire.

Nous retrouvons dans cette production la même erreur que précédemment, l'étudiant écrit : « *car la bilinéarité dans* $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ », de plus il oublie de quantifier le scalaire λ.

Production 4 (Copie 41)

1) a. Montrons que f_A est linéaire

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

$f_A(\lambda M+N) = A(\lambda M+N) - (\lambda M+N)A$

on sait que des matrices carrées sont distributive par rapport à l'addition à gauche et à droite donc ?

$f_A(\lambda M+N) = A\lambda M + AN - \lambda MA - NA$

de plus la loi (•) est associative dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ d'où ?

$f_A(\lambda M+N) = \lambda AM + AN - \lambda MA - NA$

de plus la loi "+" est commutative on aura

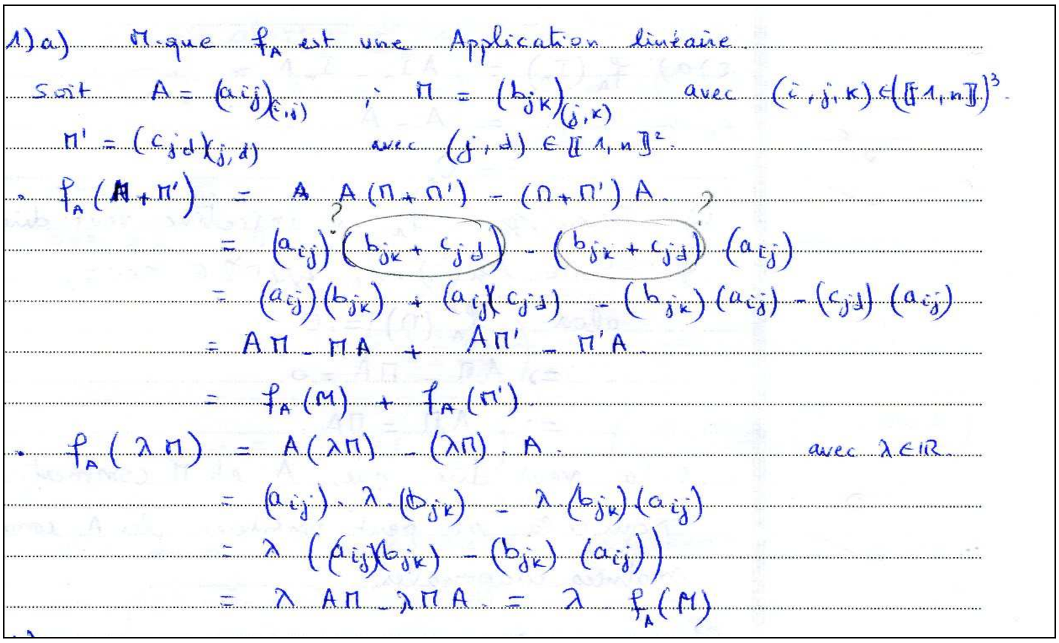
$f_A(\lambda M+N) = \lambda AM - \lambda MA + AN - NA$

$= \lambda(AM - MA) + AN - NA$

$= \lambda f_A(M) + f_A(N).$

Bien que le calcul soit soigneusement effectué, l'étudiant donne des formulations erronées pour le justifier.

Production 5 (Copie 17)


1) a) Mq que f_A est une Application linéaire

Soit $A = (a_{ij})_{(i,j)}$; $M = (b_{jk})_{(j,k)}$ avec $(i,j,k) \in ([\![1,n]\!])^3$.

$M' = (c_{jd})_{(j,d)}$ avec $(j,d) \in [\![1,n]\!]^2$.

. $f_A(M+M') = A\ A(M+M') - (M+M')A$?

$= (a_{ij})(b_{jk}+c_{jd}) - (b_{jk}+c_{jd})(a_{ij})$

$= (a_{ij})(b_{jk}) + (a_{ij})(c_{jd}) - (b_{jk})(a_{ij}) - (c_{jd})(a_{ij})$

$= AM - MA + AM' - M'A$

$= f_A(M) + f_A(M')$

. $f_A(\lambda M) = A(\lambda M) - (\lambda M).A$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

$= (a_{ij}).\lambda.(b_{jk}) - \lambda(b_{jk})(a_{ij})$

$= \lambda\left((a_{ij})(b_{jk}) - (b_{jk})(a_{ij})\right)$

$= \lambda AM - \lambda MA = \lambda f_A(M)$

Dans cette production, les matrices sont désignées par des suites de coefficients. Dans la suite, l'étudiant n'utilise pas cette écriture symbolique pour effectuer les opérations sur les matrices (par exemple, pour effectuer la somme M+M', les coefficients de M et de M' doivent être indexés de façon identique : $b_{ij}+c_{ij}$). La gestion des coefficients n'est donc pas opératoire dans le calcul effectué, elle a juste valeur de notation. Ceci pourrait traduire des difficultés de travail dans le registre symbolique non-intrinsèque.

Soulignons par ailleurs une erreur dans la quantification du scalaire λ. (λ appartient à **C** et non à **R**)

Commentaire pour la question 1-a

Le tableau suivant récapitule la répartition des réponses des étudiants à la question 1-a :

Tableau 22 : Répartition des réponses des étudiants à la question 1-a

Réponses C+	Réponses C-	Réponses F	Copies SR
72 %	28 %	0 %	0 %

Cette question, d'ordre technique, est bien réussie par les étudiants. Leurs réponses montrent qu'ils connaissent bien la définition d'une application linéaire et savent l'appliquer dans une situation particulière. Néanmoins, plus du quart des étudiants éprouve des difficultés pour justifier convenablement le calcul effectué. La formulation de propriétés liées aux structures algébriques et l'usage des écritures indicielles des matrices ne sont pas encore bien maitrisés par certains étudiants.

Question 1-b. (Tâche T_2)

b- En déduire que l'ensemble F des matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ vérifiant MA = AM est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

a) Analyse a priori

Deux techniques sont possibles pour réaliser cette tâche :

Technique 1 : c'est celle qui est suggérée par la question. Elle consiste à reformuler l'ensemble *F* comme le noyau de l'application linéaire f_A puis d'appliquer le théorème de cours selon lequel le noyau d'un morphisme d'espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel (sev) de l'espace de départ.

Technique 2 : elle consiste à vérifier les propriétés d'un sous-espace vectoriel (*F* non vide et stable pour les lois de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$). L'emploi de cette technique ne tient pas compte de la demande de la question à propos de la déduction et indique des difficultés dans la mise en relation des deux parties de la question.

Dans les deux cas, la réalisation de la technique ne présente pas de difficultés particulières, elle est de plus supposée facilitée par la première question et suffisamment routinisée en CPS1. Néanmoins, pour répondre à la question, l'étudiant est amené à effectuer un choix de technique non indiquée, à mobiliser le théorème ou la définition correspondant(e) et à connaitre et réaliser les étapes constitutives de la technique choisie. Nous considérons pour ces raisons que la tâche T_2 est de niveau mobilisable.

b) Analyse des productions des étudiants

Sur 43 réponses données, nous dénombrons 31 réponses correctes de type C+, 2 solutions correctes de type C- et 10 réponses fausses.

Réponses correctes de type C+

Parmi les 31 réponses de ce type, 25 étudiants ont donné une solution selon la technique 1 et les 6 autres ont utilisé la technique 2.

A de légères variations prés dans les rédactions, ces solutions sont soigneusement présentées comme l'illustrent les deux productions suivantes :

Production 6 (Copie 22)

b. Soit $F=\{M\in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) / MA=AM\}$

$M\in F \Leftrightarrow MA=AM \Leftrightarrow MA-AM=0_n \Leftrightarrow f_A(M)=0_n$

$\Leftrightarrow M\in Ker(f_A)$

d'où $F=Ker(f_A)$ or $Ker(f_A)$ est un sous-espace vectorielle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

donc F est un sous-espace vectorielle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Production 7 (Copie 28)

b) $F=\{M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) / MA=AM\}$

$F=\{M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) / f_A(M)=O_n\}$

$F=Ker(f_A(M))$

or $f_A \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$

donc $F=Ker(f_A(M))$ est sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Dans ces deux productions, nous lisons les deux moyens utilisés par les étudiants pour établir l'égalité entre les ensembles *F* et *Ker* f_A .

- Démonstration par équivalence, traduisant la double inclusion.
- Différentes écritures de l'ensemble F.

Ceci reflète une certaine aisance dans la manipulation de l'égalité ensembliste.

D'un autre côté, nous remarquons dans la production 7 la confusion que fait l'étudiant entre f_A et $f_A(M)$ dans l'écriture du noyau. Cette confusion ne diminue en rien, nous semble t-il, la rigueur de la solution donnée, car cette erreur d'écriture n'altère pas le raisonnement établi. D'ailleurs, dans sa réponse à la question 2-b, l'étudiant revient à l'écriture correcte du noyau. Ainsi, il écrit :

Production 8 (Copie 28)

b pour que f_A soit injective il faut que

$Ker(f_A)=O_M$

Mais, en même temps, nous remarquons l'oubli des accolades dans l'écriture de l'ensemble $\{O_n\}$. Ce genre d'erreurs (fréquents chez les étudiants) pourrait indiquer que les étudiants ne sont pas encore bien familiarisés avec l'usage du symbolisme mathématique ensembliste.

Ceci étant, nous rapportons ci-dessous deux exemples de réponses C+, où les étudiants utilisent la technique 2 :

Production 9 (Copie 40)

$F = \{ M \in M_n(\mathbb{C}) \ / \ MA = AM \}$

on a $F \neq \emptyset$ en effet $O_n \in F$ car $O_n \cdot A = A \cdot O_n$

en plus soit $(M_1, M_2) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{C}$

on a $M_1 A = A M_1$ et $M_2 A = A M_2$

mq $\lambda M_1 + M_2 \in F$ c.à.d $\cancel{A}(\lambda M_1 + M_2) A = A(\lambda M_1 + M_2)$

$(\lambda M_1 + M_2) A = \lambda M_1 A + M_2 A = \lambda A M_1 + A M_2 = \cancel{\lambda} A(\lambda M_1 + M_2)$

conclusion F est un sous espace vectorielle de $M_n(\mathbb{C})$

Production 10 (Copie 27)

b) $F = \{ M \in M_n(\mathbb{C}) \ | \ MA = AM \}$
$= \{ M \in M_n(\mathbb{C}) \ | \ f_A(M) = 0 \}$

i) on a bien $F \neq \emptyset$ puisque $f_A(O_n) = 0$ ~~donc~~ $\Leftrightarrow O_n \in F$

ii) $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \ \forall (M_1, M_2) \in F^2$.

~~$\lambda . M_1 + M_2 = \lambda . f$~~ on a bien $(M_1, M_2) \in M_n^2(\mathbb{C})$

$* \ f_A(\lambda M_1 + M_2) = \lambda A M_1 + A M_2 - (\lambda M_1 + M_2) A$
$= \lambda A M_1 + A M_2 - \lambda M_1 A - M_2 A$

or $\begin{cases} M_1 \in F \Leftrightarrow f_A(M_1) = 0 \Leftrightarrow M_1 A = A M_1 \\ M_2 \in F \Leftrightarrow f_A(M_2) = 0 \Leftrightarrow M_2 A = A M_2 \end{cases}$

Ainsi $f_A(\lambda . M_1 + M_2) = \lambda . (A M_1 - M_1 A) + A M_2 - M_2 A$
$= 0$

$\Leftrightarrow (\lambda . M_1 + M_2) \in F$

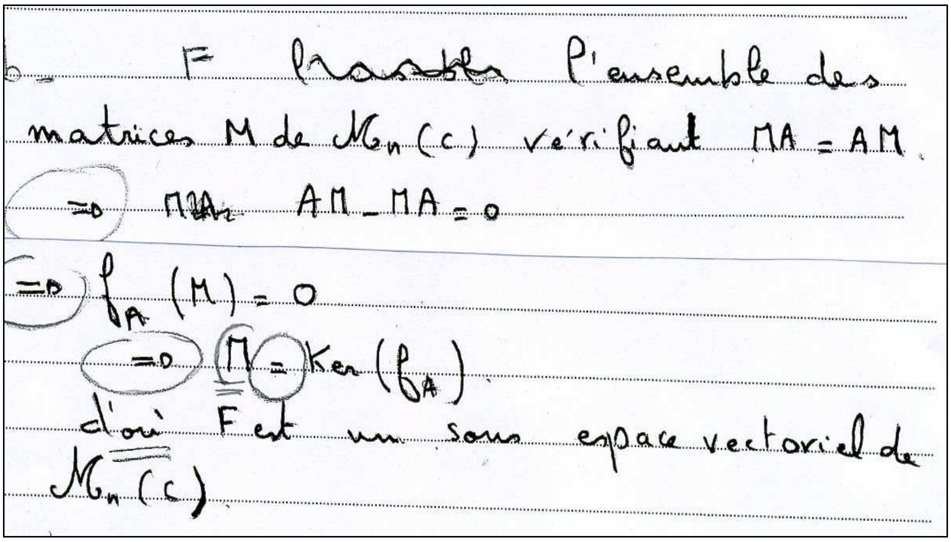
Conclusion : D'après i) et ii) F est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{C})$

Dans la production 9, l'étudiant vérifie les propriétés d'un sous-espace vectoriel pour l'ensemble *F*, tel qu'il est défini dans l'énoncé. Le deuxième étudiant, bien qu'il suive la même stratégie, essaye d'utiliser l'application f_A pour répondre à la consigne de la question. Sa façon d'opérer à nécessité plus de calculs pour aboutir au résultat. Nous soulignons par ailleurs le soin avec lequel les deux réponses sont rédigées.

Réponses correctes de type C-

Dans ce type de réponses, nous rencontrons aussi les deux techniques de travail dans les productions des étudiants. Ces réponses se caractérisent par des « glissements » entre diverses notions et des imprécisions de rédaction entrainant un changement dans le sens mathématique des propriétés démontrées. Nous donnons ci-dessous un exemple de production pour chacune des techniques employées :

Production 11 (Copie 11)


b_ F l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_n(C)$ vérifiant MA = AM.

$\Rightarrow$ AM _ MA = 0

$\Rightarrow$ $f_A(M) = 0$

$\Rightarrow$ M = Ker(f_A)

d'où F est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(C)$

Pour établir l'égalité F=Ker f_A, l'étudiant utilise le symbole d'implication à la place de celui d'équivalence et finit par conclure que M est un point de Ker f_A, ce qui démontre seulement que $F \subset Kerf_A$. Nous rencontrons ce type d'erreurs dans 4 autres copies. Remarquons qu'au lycée ces deux symboles sont souvent employés par les élèves dans le sens de "donc" et non dans leur sens logique. Ce genre d'erreurs est généralement toléré par l'institution du secondaire, dans la mesure où les notions de logique n'y figurent pas comme objectif d'enseignement.

Soulignons aussi le glissement entre les symboles $\in / =$ dans la désignation de M comme élément de Ker f_A.

Production 12 (Copie 4)

b) Soit $F = \{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tq $MA = AM$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \}$

$O_{\mathcal{M}_n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ on a $O_{\mathcal{M}_n} A = A O_{\mathcal{M}_n} = O$

donc $F \neq \emptyset$ (i)

Soit $(M, M') \in F^2$

$MA = AM$ et $M'A = AM'$

$A(M+M') = AM + AM' = MA + M'A = (M+M')A$

donc $(M+M') \in F$ (ii)

$A(M \times M') = (AM) \times M' = (MA) \times M' = M \times (AM') = M \times (M'A) = (MM')A$

donc $(M \times M') \in F$ (car $(\times)$ est associative

$A(\alpha M) = (A\alpha)M = (\alpha A)M = \alpha(AM) = \alpha(MA) = (\alpha M)A$ (iii)

conclusion F est un s-ev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Pour montrer que F est sev, l'étudiant ajoute une propriété concernant la multiplication interne des matrices. Il y a là une confusion entre les caractéristiques des structures algébriques. La stabilité de la multiplication interne est spécifique aux structures de sous-anneau et de sous-algèbre.

Réponses fausses

Dans la plupart des réponses fausses, les étudiants, voulant utiliser l'application f_A pour effectuer une déduction, se sont heurtés à des difficultés de calcul et/ou d'interprétation. Les productions suivantes illustrent les difficultés les plus fréquentes :

Production 13 (Copie 31)

b/ $F = \{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid MA = AM \}$ SeV de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

i/ $F \neq \emptyset$ car $A \in F$ $(A^2 = A^2)$.

?? ii/ on a $F = \{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid f_A(M) = O_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})} \}$.

or comme f_A est une application linéaire de la

$f_A(\lambda M + N) = \lambda f_A(M) + f(N) = O_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})} + f(N) \in F$.

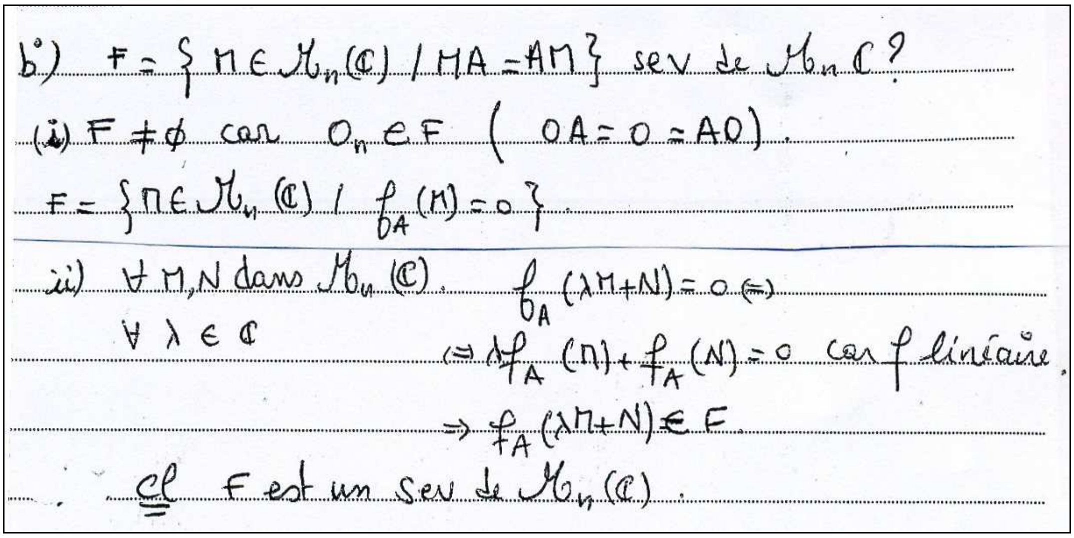
Alors F est un SeV.

Dans cette production, l'étudiant commence convenablement à implémenter la technique 2. Ensuite, il se heurte à une difficulté de calcul qui l'empêche de clore son raisonnement.

En effet, dans (ii), après avoir remplacé $f_A(M)$ par $O_{\mathcal{M}n(\mathbf{C})}$ (ce qui indique implicitement que M est choisi dans F) l'étudiant semble ignorer quoi faire de $f_A(N)$. Cette difficulté pourrait résulter de la non caractérisation de N, comme élément de F, et/ou d'un problème de compréhension concernant le statut de M dans l'écriture de l'ensemble F.

Pour terminer, l'étudiant conclut que « $f_A(\lambda M+N) \in F$ », au lieu de $(\lambda M+N) \in F$. Il y a là un glissement entre la désignation des éléments de F et la condition caractérisant ces éléments. Cette erreur, nous la rencontrons dans d'autres copies, comme dans la suivante :

Production 14 (Copie 18)



b°) $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \,/\, MA = AM\}$ sev de $\mathcal{M}_n \mathbb{C}$?

(i) $F \neq \emptyset$ car $O_n \in F$ $(OA = O = AO)$.

$F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \,/\, f_A(M) = 0\}$.

ii) $\forall M, N$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. $f_A(\lambda M+N) = 0 \Leftrightarrow$

$\forall \lambda \in \mathbb{C}$

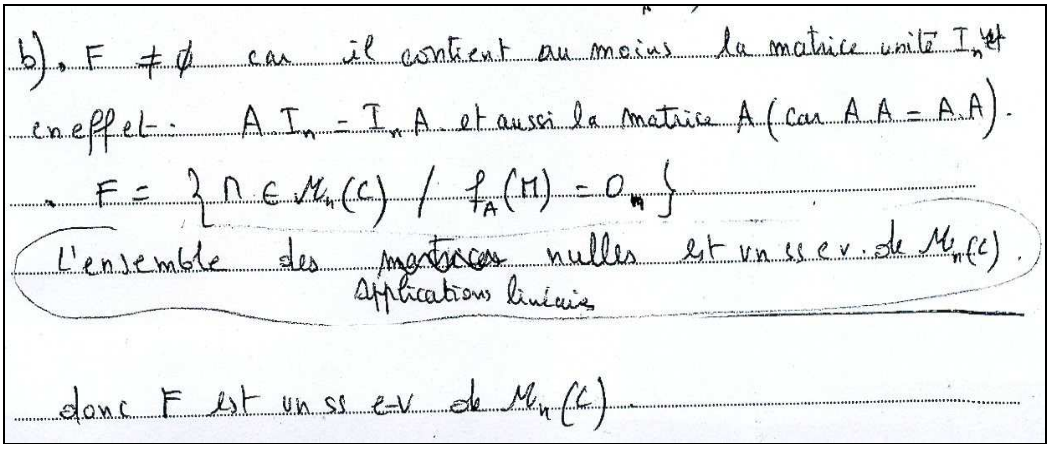
$\Leftrightarrow \lambda f_A(M) + f_A(N) = 0$ car f linéaire.

$\Rightarrow f_A(\lambda M+N) \in F$.

cl F est un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Nous remarquons tout d'abord une erreur dans la quantification de M et N dans (ii), l'étudiant considère des matrices M et N de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ et non de F. Par ailleurs, l'étudiant semble ne pas comprendre exactement ce qu'il doit montrer pour établir la propriété de stabilité. L'introduction de f_A dans l'écriture de F a, semble-t-il, entraîné des difficultés pour vérifier cette propriété.

Production 15 (Copie 17)



b). $F \neq \emptyset$ car il contient au moins la matrice unité I_n et

en effet : $A I_n = I_n A$ et aussi la matrice A (car $A.A = A.A$).

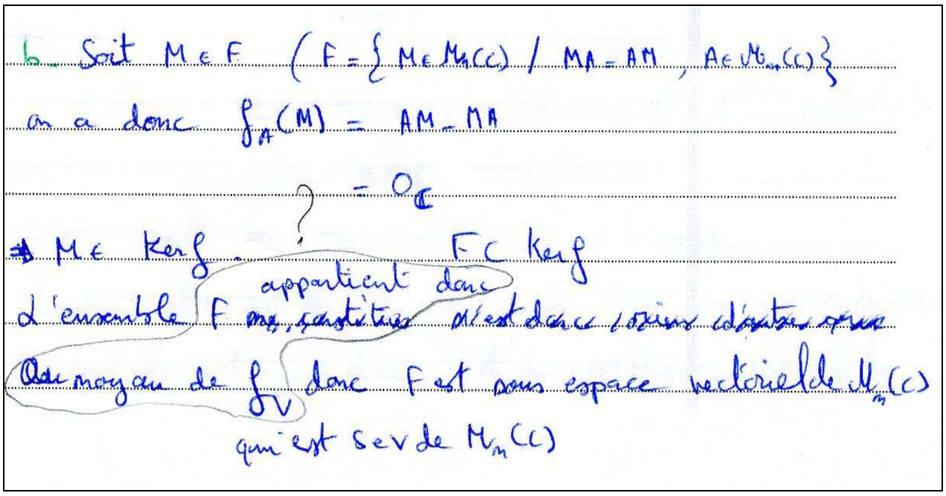
. $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \,/\, f_A(M) = O_n\}$

L'ensemble des ~~matrices~~ applications linéaires nulles est un ss e.v. de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

donc F est un ss e-v de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Cet étudiant semble être perturbé par l'introduction de l'application f_A dans l'écriture de F. Après avoir écrit que F est un ensemble de matrices, il remplace « matrices » par « applications linéaire ». Il considère ensuite que ces applications linéaires sont nulles, ce qui indique qu'il a compris l'égalité $f_A(M) = O_n$ comme une égalité fonctionnelle et non matricielle. A notre avis, c'est le manque de maitrise du langage ensembliste qui est en cause ici. Nous retrouvons ce type d'erreurs dans d'autre productions et sous d'autres aspects, comme dans la production suivante :

Production 16 (Copie 3)


b. Soit $M \in F$ $(F = \{ M \in M_n(C) / MA = AM , A \in M_n(C) \}$

on a donc $f_A(M) = AM - MA$

$= 0_C$

$M \in \ker f$. ? $F \subset \ker f$

appartient donc

d'ensemble F [illegible] n'est donc [illegible]

au noyau de f donc F est sous espace vectoriel de $M_n(C)$

qui est sev de $M_n(C)$

Dans cette production, outre le « glissement » entre les notions « appartient » et « inclus », la formulation de la réponse laisse croire qu'une partie du noyau $Ker\ f_A$ est un sous-espace vectoriel. Ce qui entraîne une erreur de raisonnement.

Commentaire pour la question 1-b

Le tableau suivant récapitule la répartition des réponses des étudiants à la question 1-b :

Tableau 23 : Répartition des réponses des étudiants à la question 1-b

Réponses C+	Réponses C-	Réponses F	Copies SR
72 %	5 %	23 %	0 %

Cette question, de niveau mobilisable, est réussie par plus des trois quarts des étudiants. Néanmoins, la rédaction des réponses n'est pas toujours conforme. Nous soulignons notamment des « glissements » entre symboles ensemblistes : $\in/\subset$ et $\in/=$, des « contagions » entre propriétés spécifiques à des structures algébriques, l'affectation de propriétés d'opérations aux objets, l'absence de quantification pour les éléments en jeu ainsi que le non-respect du statut logique des connecteurs d'implication et d'équivalence.

Par ailleurs, les différentes méthodes de résolution données ainsi que les erreurs de rédaction et de raisonnement rencontrées nous suggèrent deux remarques :

1) Sur les 43 réponses (toutes catégories confondues), 16 étudiants (soit 37 %) ne sont pas arrivés à mobiliser la notion de « noyau » (Ker f_A) pour répondre à la question. La deuxième technique de travail était plus accessible pour ces étudiants. Ceci pourrait traduire un manque de disponibilité de cette notion, ou encore témoigner d'une certaine difficulté chez les étudiants pour mettre en relation plusieurs informations lors de la résolution d'un problème.

2) Contrairement à la question précédente (de niveau technique), ici, l'insuffisance dans l'appropriation du langage symbolique et la non conformité des productions du point de vue écriture ont entraîné, dans certains cas, des difficultés de raisonnement et des formulations erronées dans les réponses.

Question 2-a. (Tâche T_3)

2) a- Calculer f_A (I_n) où I_n désigne la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

a) Analyse a priori

Il s'agit d'un calcul immédiat, on trouve $f_A(I_n) = O_n$. Toutefois, si on désigne les matrices par leurs coefficients, le calcul demandera plus d'attention au niveau de la gestion des écritures indicielles, ce qui pourrait poser des difficultés pour certains étudiants. La tâche nous semble de niveau technique.

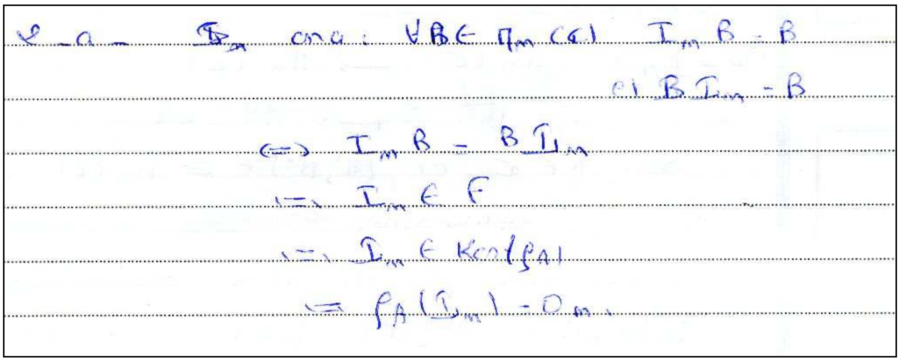
b) Analyse des productions des étudiants

Sur 43 réponses, 42 sont correctes de type C+, et une est fausse.

Réponses correctes de type C+

Parmi les 42 réponses de ce type, 40 étudiants ont écrit que $f_A(I_n) = AI_n - I_nA = A - A = O_n$. Certains ont précisé que I_n est neutre pour la multiplication matricielle et d'autres l'ont utilisé implicitement. Les deux autres solutions sont les suivantes :

Production 17 (Copie 10)


2-a- On a : $\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ $I_n B = B$

et $B I_n = B$

$\Leftrightarrow I_n B = B I_n$

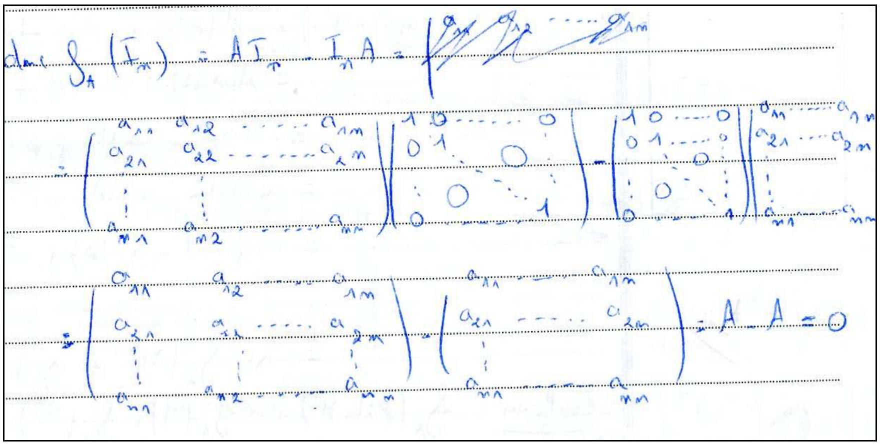
$\Rightarrow I_n \in F$

$\Rightarrow I_n \in Ker(f_A)$

$\Rightarrow f_A(I_n) = O_n$.

Dans cette solution, l'étudiant commence par montrer que $I_n \in F$, utilise que $F = Ker\ f_A$, pour finalement conclure que f_A (I_n) = O_n. Notons l'emploi au départ du signe "$\Leftrightarrow$" comme synonyme de « donc », et non avec son statut logique.

Production 18 (Copie 4)



donc $f_A(I_n) = AI_n - I_nA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

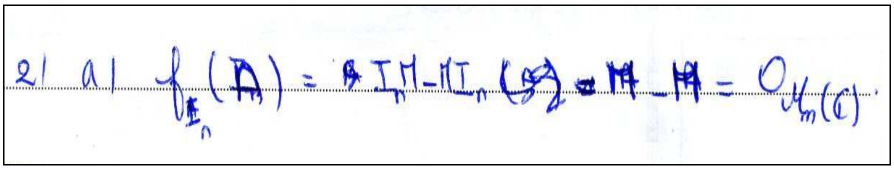
$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = A - A = 0$

Ici, l’étudiant effectue le calcul dans le registre symbolique non-intrinsèque. Il fait alors le calcul de AI_n - I_nA en utilisant les coefficients des matrices A et I_n. Il semble qu’il n’utilise pas que I_n est neutre pour la multiplication des matrices.

Réponse fausse

Dans cette réponse, l’étudiant inverse les rôles de A et I_n dans $f_A\,(I_n)$. Il confond entre paramètre et variable. Ainsi, nous lisons :

Production 19 (Copie 31)



2/ a/ $f_{I_n}(A) = AI_n - MI_n(A) = M - M = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$.

Notons aussi l’erreur de notation qu’il fait lorsqu’il met M à la place de A. En examinant sa réponse à la question 2-b, il semble que l’étudiant, après avoir effectué correctement le calcul de $f_A\,(I_n)$ (voir ce qui est barré), a modifié sa réponse de façon à ce qu’elle soit cohérente avec celle de la question 2-b (voir ci-dessous).

Cet état d’hésitation témoigne d’une certaine fragilité dans la maîtrise de la situation du problème.

Commentaire pour la question 2-a

Le tableau suivant récapitule la répartition des réponses des étudiants à la question 2-a :

Tableau 24 : Répartition des réponses des étudiants à la question 2-a

Réponses C+	Réponses C-	Réponses F	Copies SR
98 %	0 %	2 %	0 %

Cette question, d’ordre technique, est très bien réussie par les étudiants. Nous remarquons toutefois une tendance chez certains étudiants à éviter le calcul standard pour donner une solution mettant en œuvre plus de données (mise en relation de plusieurs informations fournies par l'énoncé, calcul dans le registre symbolique non-intrinsèque). Ceci pourrait s'expliquer au niveau du « contrat didactique» : plus on détaille la réponse, mieux elle sera évaluée.

Question 2-b. (Tâche T_4)

b- Existe-t-il des matrices A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telles que f_A soit injective ?

a) Analyse a priori

Il s'agit d'une question ouverte. Deux stratégies sont possibles pour réaliser la tâche :

Stratégie 1 : elle consiste à reformuler la question en terme de noyau (f_A étant linéaire alors, f_A est injective équivaut à $Ker\ f_A = \{O_n\}$), interpréter ensuite le résultat de la question 2-a, puis conclure. Une façon de rédiger la solution est par exemple :

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, on a : $f_A(I_n) = O_n$. Donc, pour tout A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, $Ker\ f_A \neq \{O_n\}$. f_A est donc non injective, quelle que soit la matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

Stratégie 2 : elle utilise la définition générale d'une injection. Plusieurs techniques sont possibles pour cette stratégie, suivant la formulation de la définition d'injection qui sera retenue. On peut par exemple procéder comme suit :

f_A est injective $\Leftrightarrow$ (Pour tous M et N dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, $f_A(M) = f_A(N) \Rightarrow M = N$) *(i)*

Or : $f_A(M) = f_A(N) \Leftrightarrow AM - MA = AN - NA \Leftrightarrow AM - AN = MA - NA$

$$\Leftrightarrow A(M-N) = (M-N)A \qquad (ii)$$

On remarque ensuite que *(i)* peut se réaliser sans que l'on ait nécessairement $M = N$. Il suffit par exemple de considérer deux matrices distinctes M et N de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telles que $N = M - I_n$.

On conclut alors que f_A n'est pas injective, quelle que soit la matrice A.

Cette technique demande d'abord de bien distinguer entre le statut de A d'une part et celui de M et N d'autre part. Ensuite, il faut bien gérer les connecteurs et les quantificateurs logiques en jeu, et il faut savoir comment résoudre le problème d'existence de M et N vérifiant l'égalité *(ii)*. Ces points pourraient poser problèmes pour les étudiants qui adoptent cette technique de travail. De plus, adopter cette technique, témoigne de difficultés dans la mise en relation des données de l'exercice.

Ceci étant, d'autres techniques sont aussi possibles, comme : utiliser la contraposée de *(i)*, ou chercher pour quelle matrice A, il existe une matrice Y de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telle que l'équation en M : $f_A(M) = Y$, admette plus d'une solution.

La réalisation de cette tâche demande d'élaborer une stratégie de travail, de choisir une technique appropriée pour exécuter cette stratégie, de mobiliser les connaissances que requiert la technique choisie et de savoir gérer les savoirs et le symbolisme à mettre en jeu. Pour ces raisons, nous considérons que la tâche est de niveau disponible.

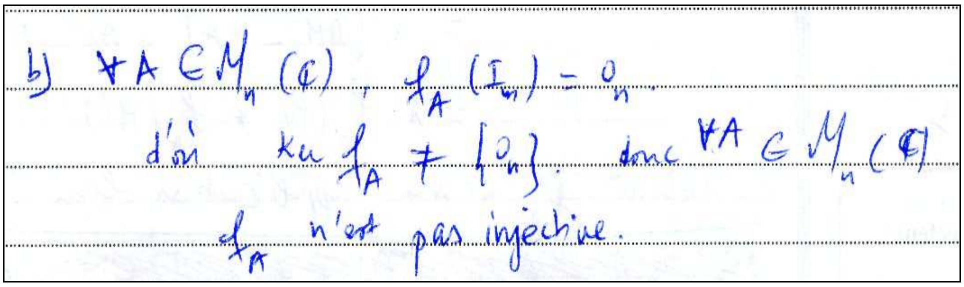
Analyse des productions des étudiants

Sur 43 réponses, nous dénombrons 23 réponses correctes, dont 16 sont de type C+, 17 réponses fausses et 3 copies sans réponses.

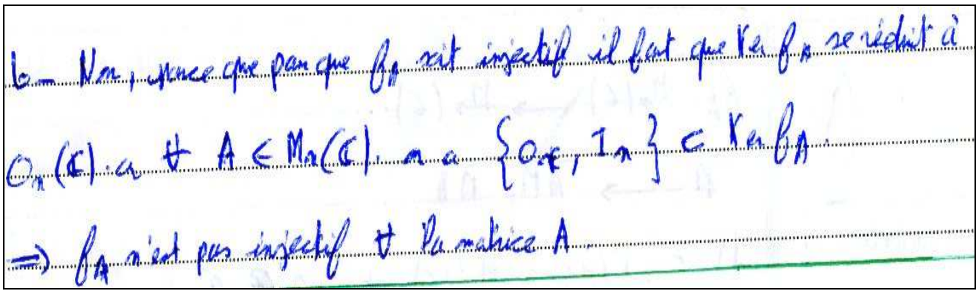
Réponses correctes de type C+

Dans les 16 réponses de ce type, les étudiants utilisent la première stratégie dans leur travail. Les solutions correspondantes sont précises et soignées comme l'illustrent les productions suivantes :

Production 20 (Copie 35)


b) $\forall A \in M_n(\mathbb{C})$, $f_A(I_n) = 0_n$.
d'où $Ker\, f_A \neq \{0_n\}$. donc $\forall A \in M_n(\mathbb{C})$
f_A n'est pas injective.

Production 21 (Copie 39)


b- Non, parce que pour que f_A soit injectif il faut que $Ker\, f_A$ se réduit à
$O_n(\mathbb{C})$ or $\forall\, A \in M_n(\mathbb{C})$ on a $\{O_n, I_n\} \subset Ker\, f_A$.
$\Rightarrow f_A$ n'est pas injectif $\forall$ la matrice A

Notons dans ces deux productions, la brièveté et la précision des réponses. Nous rencontrons dans les réponses C+, d'autres formes de rédaction, comme le montre l'exemple suivant :

Production 22 (Copie 33)

b/ f_A est inj $\Leftrightarrow$ $Ker\, f_A = \{O_n\}$

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$

$Ker\, f_A = \{O_n\} \Leftrightarrow \forall M \in M_n(\mathbb{C}) \setminus \{O_n\} \quad AM - MA \neq O_n$

$\Leftrightarrow \forall M \in M_n(\mathbb{C}) \setminus \{O_n\} \quad AM \neq MA$

$\Leftrightarrow$ A et M ne commutent pas $\forall M \in M_n(\mathbb{C}) \setminus \{O_n$

or pour $M = I_n$ on a

$AM - MA = AI_n - I_nA = A - A = O_n$

donc $\forall A \in M_n(\mathbb{C})$ A et I_n commutent donc

il n'existe pas des matrice A de $M_n(\mathbb{C})$

tq f_A soit injective

L'étudiant ici n'exploite pas directement le résultat de la question précédente. Il donne une interprétation de l'injectivité spécifique à la situation de l'exercice, et effectue une nouvelle recherche qui le ramène finalement à utiliser $f_A(I_n)$.

Réponses correctes de type C-

Dans ce type de réponses, les productions manquent de précision au niveau de l'usage des quantificateurs logiques, comme dans les exemples suivants :

Production 23 (Copie 22)

b) f_A est injective $\Leftrightarrow$ $Ker(f_A) = \{O_n\}$ absurde

car $f_A(I_n) = O_n$ donc $I_n \in Ker(f_A)$

donc il n'existe pas des matrices A de $M_n(\mathbb{C})$ telle que f_A soit injective

Ici, la quantification, qui constitue un élément clé du raisonnement par l'absurde, est implicite.

Production 24 (Copie 25)

cherchons l'ensemble des matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ pour les quelles f_A est injective :

. d'après 2(a), on bien $I_n \in Ker(f_A)$, et pour que f_A soit injective, il faut que le Ker, soit réduit à O_n, donc il faut chercher l'ensemble

$G = \{A \in \mathcal{M}_n \,/\, f_A(I_n) \neq O_n\}$

autrement dit cherchons A qui vérifie :

$A \cdot I_n \neq I_n \cdot A \Rightarrow A \neq A$ absurde, donc il n'existe pas de A telle que f_A soit injective.

Il semble que l'absence de quantification dans la troisième ligne, a amené l'étudiant à faire une nouvelle recherche qui s'avère inutile. En effet, la propriété : $I_n \in Ker\ f_A,\ \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, suffit pour constater que l'ensemble G est vide et conclure.

Réponses fausses

Sur 17 réponses fausses, 13 étudiants sont arrivés à reformuler la question en terme de noyau ou en utilisant la définition générale de l'injectivité. C'est dans la gestion de la situation entrainée par la formulation donnée ou au moment de conclure que les étudiants ont échoué. La plupart d'entre eux se sont heurtés à des difficultés pour distinguer les statuts des matrices A et M dans l'équation : $AM - MA = O_n$, ou des matrices A, M et N dans l'égalité $A(M - N) = (M - N)A$.

Pour les 4 autres réponses fausses, les étudiants ne sont pas arrivés à traduire correctement l'injectivité de f_A.

Nous donnons ci-après des exemples de chacun de ces deux types de réponses :

Production 25 (Copie 12)

b) f_A injective $\Leftrightarrow Ker\ f_A = \{O_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}\}$ et on a $f_A(O_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}) = A\,O_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})} - O_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}\,A = O_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$

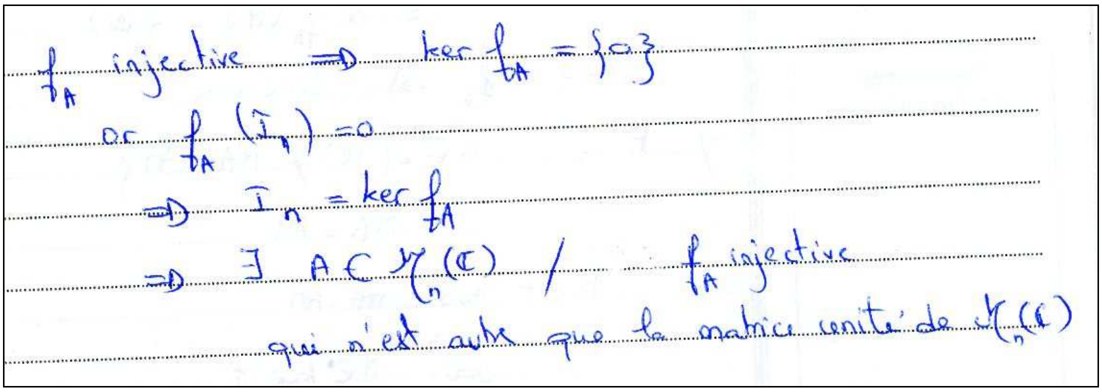
donc pour $A = O_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$ f_A serait injective.

1

Ici, l'étudiant reformule l'injectivité en termes de noyau. Voulant déterminer les matrices A pour lesquelles $Ker\ f_A$ est égal à $\{O_n\}$, l'étudiant attribut à O_n, élément évident du noyau, le statut de A. Il y a là confusion entre paramètre et variable. Ceci pourrait être dû au fait que le problème n'est pas convenablement explicité au départ, ce qui aurai permis de préciser ce qui est donné et ce que l'on doit chercher, comme par exemple : pour quelle(s) matrice(s) A (valeur du paramètre à déterminer), l'équation d'inconnue M : $f_A (M)=O_n$, admet-elle pour unique solution O_n ?

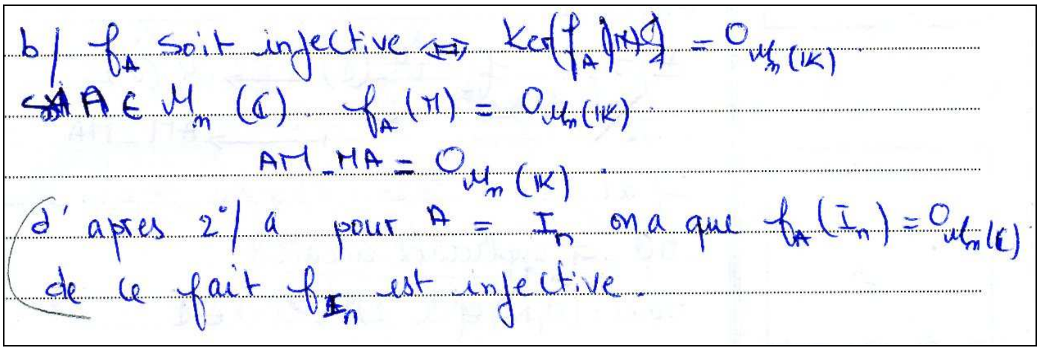
L'absence d'une telle formulation pourrait être à l'origine de la confusion effectuée par l'étudiant. Ce type d'erreur est fréquent dans les productions fausses, comme le montrent les réponses suivantes :

Production 26 (Copie 41)


f_A injective $\Rightarrow$ $\ker f_A = \{0\}$
or $f_A(I_n) = 0$
$\Rightarrow$ $I_n = \ker f_A$
$\Rightarrow$ $\exists\ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ / f_A injective
qui n'est autre que la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Dans cette production, la conclusion donnée à la fin n'est pas cohérente avec la formulation de départ. Il ne semble pas que l'étudiant ait compris ce qu'il doit exactement prouver. A la fin, l'étudiant prend I_n, élément particulier de $Ker\ f_A$, pour la matrice A, ce qui indique des confusions entre le statut de A et celui de I_n. Remarquons par ailleurs le glissement dans la notation : $\in$ / $=$, et l'emploi de « $\Rightarrow$ » à la place de « $\Leftrightarrow$ » dans la formulation de l'injectivité de f_A .

Production 27 (Copie 31)


b/ f_A soit injective $\Leftrightarrow$ $Ker(f_A)(M) = O_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$
$\Leftrightarrow A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ $f_A(M) = O_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$
$AM - MA = O_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.
d'apres 2°/ a pour $A = I_n$ on a que $f_A(I_n) = O_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$
de ce fait f_{I_n} est injective.

Comme dans la production précédente, l'étudiant ici n'arrive pas à interpréter convenablement que $f_A(I_n)=O_n$, et il finit par prendre I_n pour la matrice A. Notons que dans sa réponse à la question 2-a (voir ci-dessus), nous avons remarqué la confusion que fait cet étudiant entre paramètre et variable. Cette confusion, l'entraîne encore ici dans des erreurs de raisonnement. Remarquons par ailleurs l'oubli des accolades dans l'écriture de Ker f_A (ligne 1).

Production 28 (Copie 36)

f_A injective donc $f_A(M) = f_A(N) \Rightarrow M = N$

donc $AM - MA = AN - NA$

$AM - AN = MA - NA$

$A(M - N) = (M - N)A$

donc $A = I_n$

Dans cette réponse, l'étudiant utilise la définition générale d'injection, il n'exploite pas la linéarité de f_A. Dans ce cas, le problème se ramène à chercher la (ou les) matrice(s) A pour lesquelles l'égalité (i) $A(M - N) = (M - N)A$ est vérifiée dans le seul cas où $M=N$, et ceci quelles que soient les matrices M et N de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. N'ayant pas précisé les rôles que jouent les matrices A, M et N dans l'égalité (i), l'étudiant n'est pas arrivé à une conclusion correcte. Il s'est contenté de donner un cas pour lequel l'égalité (i) est vérifiée indépendamment de la propriété de bijectivité qu'il étudie.

Production 29 (Copie 11)

b. Soient M et B deux matrices ~~deux~~ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tq $M \neq B$.

pour que f_A soit injective ~~il~~ il faut que $AB - BA \neq AM - MA$.

supp ~~MB~~ supp $AB - BA = AM - MA$

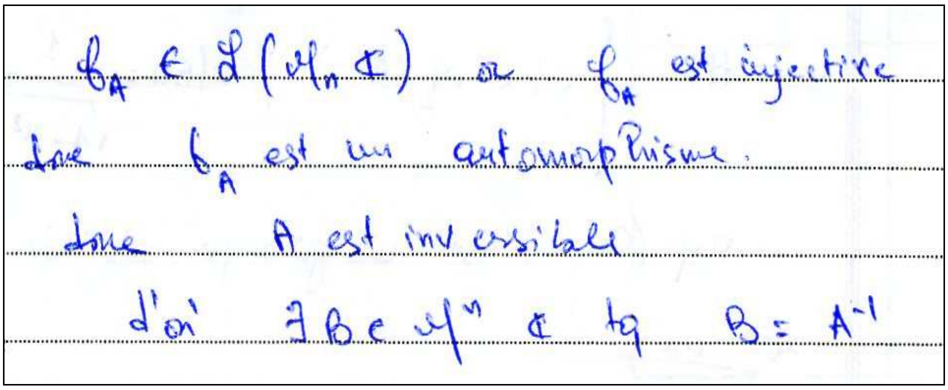
$A(B - M) = (B - M)A$

$A\overline{C} = CA$

$\Rightarrow$ il faut que ~~A ne soit pas inversible~~

Cet étudiant utilise la contraposée de la propriété utilisée dans la copie 36 précédente, et il se heurte à la fin à la même difficulté qui l'entraîne dans un blocage. Il ne donne à la fin aucune conclusion.

Production 30 (Copie 19)



$f_A \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n \mathbb{C})$ or f_A est injective

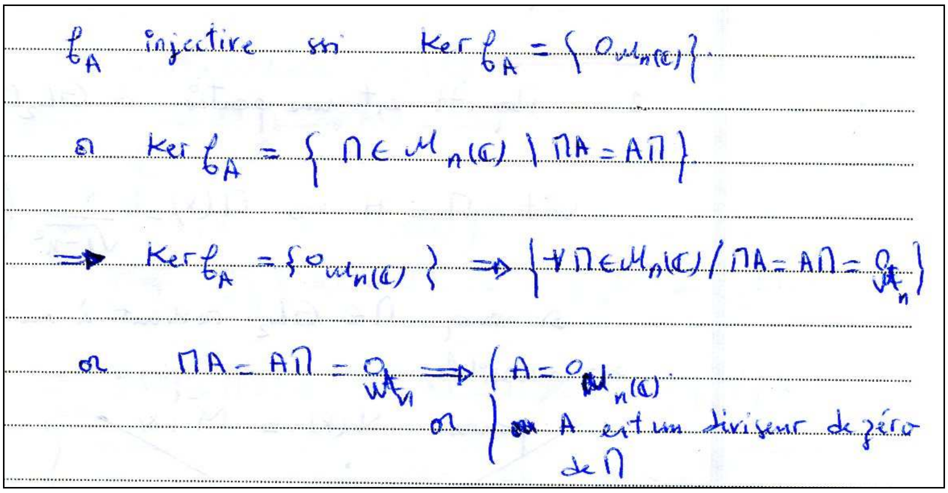
donc f_A est un automorphisme.

donc A est inversible

d'où $\exists B \in \mathcal{M}^n \mathbb{C}$ tq $B = A^{-1}$

Dans cette réponse, l'étudiant considère que *A* est la matrice de f_A. Ce glissement d'objets A/ f_A pourrait indiquer des difficultés au niveau de l'appropriation de l'énoncé. Ce phénomène apparaît dans d'autres réponses, comme dans la copie suivante :

Production 31 (Copie 5)



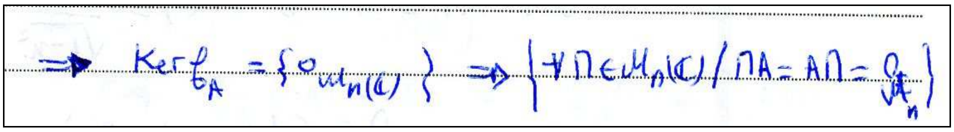
f_A injective ssi $Ker\, f_A = \{O_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}\}$.

or $Ker\, f_A = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \setminus MA = AM\}$

$\Rightarrow Ker\, f_A = \{O_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}\} \Rightarrow \{\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) / MA = AM = O_{\mathcal{M}_n}\}$

or $MA = AM = O_{\mathcal{M}_n} \Rightarrow \begin{cases} A = O_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})} \\ \text{ou } A \text{ est un diviseur de zéro de } M \end{cases}$

Dans cette réponse, après avoir reformulée l'injectivité en termes de noyau, et rappelé la définition de $Ker\, f_A$, l'étudiant écrit :



$\Rightarrow Ker\, f_A = \{O_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}\} \Rightarrow \{\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) / MA = AM = O_{\mathcal{M}_n}\}$

Remarquons tout d'abord que dans cette écriture, la première implication prend le sens de "donc" et la deuxième prend la place du signe "=".

D'un autre côté, dans l'écriture de l'ensemble $Ker\, f_A$, l'étudiant effectue un glissement entre la propriété caractéristique du noyau : $MA=AM$ et la matrice nulle O_n, élément évident du noyau. Par ailleurs, le quantificateur $\forall$ écrit dans le dernier ensemble n'a pas lieu d'être. A la fin, l'étudiant interprète la propriété : $MA=AM=O_n$, en termes de divisibilité, ce qui est erroné dans le cas de la tâche concernée.

Commentaire pour la question 2-b

Le tableau suivant récapitule la répartition des réponses des étudiants à la question 2-b :

Tableau 25 : Répartition des réponses des étudiants à la question 2-b

Réponses C+	Réponses C-	Réponses F	Copies SR
37 %	**16 %**	**40 %**	**7 %**

Pour cette question, plus que la moitié des étudiants (53 %) sont arrivés à répondre correctement à la question. Le nombre d'étudiants qui ont manqué la question est aussi remarquable (47 % entre réponses fausses et copies sans réponse). Ceci, bien que la plupart d'entre eux aient donné une formulation correcte à la notion d'injection et que la résolution soit supposée facilitée par la réponse à la question précédente. Les difficultés les plus fréquentes et les plus délicates rencontrées se situent au niveau de la gestion des ostensifs intervenant dans la formulation de la propriété d'injection. L'insuffisance dans l'appropriation des données de l'exercice, la confusion des statuts des matrices mises en jeu et la négligence de la quantification ont entrainé un flou chez les étudiants à propos de ce qu'ils doivent chercher et de la manière avec laquelle ils doivent gérer la situation. Ceci a conduit à des glissements, chez certains étudiants, entre différents objets (application f_A/matrice A, propriété caractéristique d'un ensemble/élément de cet ensemble…). D'un autre côté, nous dénombrons 22 étudiants sur 43 (soit plus que 51%, y compris ceux qui ont donné des réponses correctes) qui ne sont pas arrivés à tirer profit de la question 2-a et effectuer une déduction, bien que celle-ci soit suggérée par l'énoncé. Ceci montre des difficultés dans la mise en relation des données de l'exercice. La forme ouverte de la question semble aussi avoir perturbé certains étudiants qui ne sont pas arrivés à bien identifier ce qu'ils doivent faire pour répondre à la question. Par ailleurs, au niveau de la rédaction, nous remarquons une insuffisance dans l'usage du langage ensembliste et symbolique (glissements de notations : $\in/=$, $\Rightarrow$/donc, $\Rightarrow/=$, écriture erronée de quantificateurs et d'ensembles ...), ce qui, dans certains cas, a influé sur les possibilités de réflexion des étudiants et sur leur manière de gérer la situation.

Question 2-c. (Tâche T_5)

b- Existe-t-il des matrices A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telles que f_A soit surjective ?

a) Analyse a priori

Comme la tâche précédente, il s'agit là d'une question ouverte. Trois stratégies de résolution sont possibles :

Stratégie 1 : elle consiste à remarquer que f_A est une application linéaire entre deux espaces vectoriels de même dimension finie. Dans ce cas, les notions d'injection et de surjection sont équivalentes, et la réponse à cette question découle immédiatement de la réponse à la question précédente. En l'occurrence, quelle que soit la matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, f_A n'est pas surjective.

Stratégie 2 : elle consiste à montrer que $Im\, f_A \neq \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Pour ce faire, on peut utiliser le théorème du rang : $dim\, Im\, f_A + dim\, Kerf_A = dim\, \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Comme $Kerf_A \neq \{O_n\}$, *alors* $dim\, Kerf_A \neq 0$ *et* $dim(Im\, f_A) \neq dim \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Par suite $Im\, f_A \neq \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

Stratégie 3 : elle utilise la définition générale d'une surjection. Plusieurs techniques sont possibles pour cette stratégie.

tech1 : elle consiste à chercher pour quelle matrice A, l'équation d'inconnue M : $f_A(M) = Y$, possède au moins une solution, et ceci pour toute matrice Y de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

Pour ce faire, deux méthodes peuvent être essayées :

1) Résoudre l'équation $AM - MA = Y$ dans toute sa généralité, c'est à dire pour toutes matrices A et Y de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Chose qui, semble-t-il, pose beaucoup de problèmes au niveau de la gestion des matrices.

2) Montrer (par anticipation) que f_A n'est pas surjective. Ce qui revient :

- Soit à trouver une matrice Y_o pour laquelle l'équation $AM - MA = Y_o$ n'a pas de solution, quelle que soit A.
- Soit à montrer que pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, il existe une matrice Y_A pour la quelle l'équation $AM - MA = Y_A$ n'a pas de solution.

tech2 : chercher s'il existe des matrices A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, telles que $Im\, f_A = \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, ce qui, après reformulation de l'égalité $Im\, f_A = \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, nous ramène à la première technique. (Ceci, bien sûr pour une résolution ensembliste sans tenir compte de la structure de sev des ensembles en question, si non, on pourrait utiliser la stratégie 2)

Pour cette stratégie, toutes les techniques mettent en jeu des matrices où les statuts sont en quelque sorte, nuancés. Car dans l'équation $f_A(M) = Y$, il faut étudier l'existence éventuelle de matrices A répondant à la question, considérer la matrice M comme inconnue de l'équation et éventuellement chercher des valeurs particulières Y_0 ou Y_A *à* Y, si on adopte la méthode 2. Les trois matrices (ou deux du moins) de l'équation $f_A(M) = Y$, sont ainsi des inconnues (dans le sens d'objets à déterminer ou à considérer ainsi dans l'équation) mais jouant des rôles différents. Ceci place une certaine nuance dans les statuts des matrices, difficile à gérer par les étudiants. C'est la stratégie 1 qui est en fait visée par l'exercice.

Pour réaliser cette tâche, l'étudiant est autonome, il doit fixer une stratégie de travail, choisir une technique pour exécuter la stratégie fixée et mobiliser les connaissances nécessaires à la réalisation de cette technique. Ceci en plus éventuellement de la gestion du symbolisme que pourrait requérir la technique choisie. Pour ces raisons, nous considérons que la tâche est de niveau disponible.

La réalisation de cette tâche, requiert une disponibilité de connaissances, une aptitude à mettre en relation plusieurs données et éventuellement à gérer des

b) Analyse des productions des étudiants

Sur 43 réponses, nous dénombrons 9 réponses correctes de type C+, 21 réponses fausses et 13 copies sans réponses.

Notons que dans les réponses correctes, est aussi considérée ainsi toute solution qui soit cohérente avec la réponse à la question 2-b précédente, même si cette dernière est fausse. Par exemple, si un étudiant trouve dans 2-b que f_A est injective pour certaines matrices A et, en utilisant l'équivalence entre injection et bijection en dimensions finies, répond que f_A est surjective pour ces mêmes matrices A, sa réponse est considérée comme correcte. Deux étudiants ont répondu de la sorte.

Réponses correctes de type C+

Notons que parmi les 23 étudiants qui ont répondu correctement à la question 2-b, 14 ne sont pas arrivés à donner une réponse correcte à cette question, et nous ne rencontrons aucune réponse correcte qui ne soit pas cohérente avec la réponse à la question 2-b.

Sur les 9 réponses correctes, 7 étudiants ont donné une solution selon la stratégie 1 et les deux autres ont utilisé la stratégie 2. Nous rapportons ci-dessous des exemples de chacun de ces deux types de réponses.

Production 32 (Copie 35)

Comme f_A est une application linéaire entre deux espaces vectoriels de même dimension et f_A ne peut pas être injective $\forall A \in M_n(\mathbb{C})$ alors f_A ne peut pas être ~~bije~~ surjective

Production 33 (Copie 34)

d'après 2-b. $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, f_A n'est pas injective
$\Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\ker f_A \neq \{0_n\} \Leftrightarrow \dim \ker f_A \neq 0$
d'après le théorème du Rang : $\dim \ker f_A + \dim \mathrm{Im} f_A = n^2$
comme $\dim \ker f_A \neq 0$ alors $\dim \mathrm{Im} f_A \neq n^2$.
donc : $\mathrm{Im} f_A \neq \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par suite f_A n'est pas surjective

Pour ces deux productions, nous notons le soin avec lequel sont rédigées et justifiées les solutions. La deuxième production témoigne d'une bonne familiarité avec les notions d'algèbre linéaire mises en œuvre dans la réponse.

Production 34 (Copie 31)

c) f_A Surjective ?

On a montré déja que f_A est injective si $A = I_n$.

Or $f_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et dim $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est finie

d'où f_A est bijective $\Rightarrow f_{I_n}$ surjective.

Bien que cette solution ne réponde pas à l'attente de l'énoncé, elle est cependant cohérente avec la réponse de l'étudiant à la question précédente (voir ci-dessus). Le raisonnement donné est donc correct.

Réponses fausses

Parmi les 21 réponses fausses, 12 étudiants ont choisi à résoudre le problème en utilisant une caractéristique générale de la notion de surjection. Après avoir formulé correctement « f_A surjective » dans le contexte de l'exercice, ces étudiants ne sont pas arrivés à terminer leur travail. Dans les 9 autres réponses fausses, les étudiants n'ont pas donné une formulation correcte de la notion de surjection. Nous commentons ci-dessous les erreurs les plus fréquentes dans ce type de réponses.

Production 35 (Copie 15)

c- f_A surjective $\Leftrightarrow \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \exists N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tq $f_A(N) = M$

c.a.d $AN - NA = M$

donc pour les matrices A vérifiant $AN - NA = M$

f_A sera surjective.

Production 36 (Copie 10)

c- f_A est surjective ssi $\text{Im} f_A = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

$\Leftrightarrow \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \exists M' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tq $AM' - M'A = M$

impossible.

Production 37 (Copie 38)

• f_A est surjective $\Leftrightarrow \forall M' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
$\exists M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \;/\; f_A(M) = M'$

$M' = AM - MA.$
$\Rightarrow M' + MA = AM$
soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$.
$\Rightarrow A^{-1}(M' + MA) = M.$
$\Rightarrow A^{-1}M' + A^{-1}MA = M.$
$\Rightarrow A^{-1}M' = M - A^{-1}MA.$

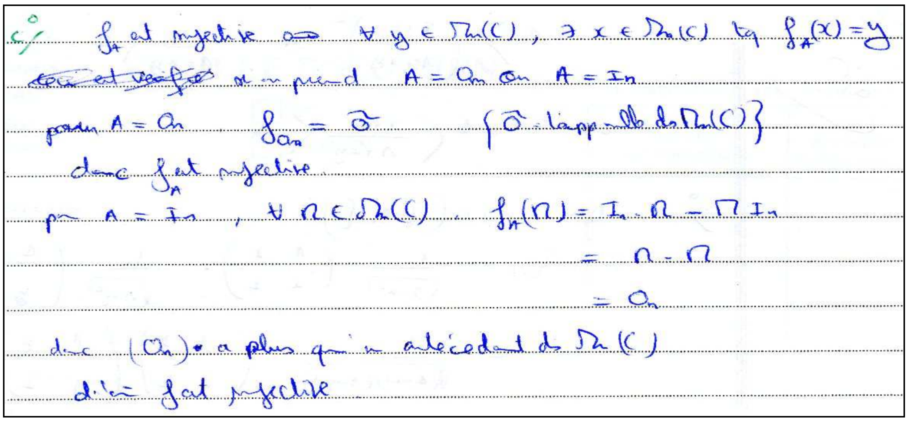
Dans ces 3 réponses, les étudiants ont reformulé correctement « f_A surjective ». Les deux premiers ne sont pas arrivés à résoudre l'équation matricielle résultante de la formulation donnée. Il semble que la variété des matrices présentes dans l'équation leur a fait obstacle pour pouvoir interpréter de façon pertinente cette équation. Le troisième étudiant, semble avoir saisi la situation, il choisit alors une matrice inversible *A* et effectue un calcul qui vise à isoler la matrice inconnue *M* en vue de la déterminer. Mais il se trouve bloquer à la fin.

Production 38 (Copie 25)

cherchons $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ / f_A est surjective
autrement dit cherchons A / $\forall T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\exists M$ /
$AM - MA = T$
soit $T = A$ donc $AM - MA = A$
$\Rightarrow AM = A + MA$
$\Rightarrow AM = A(1+M)$
absurde donc il n'existe pas de A
pour lesquelles f_A est surjective

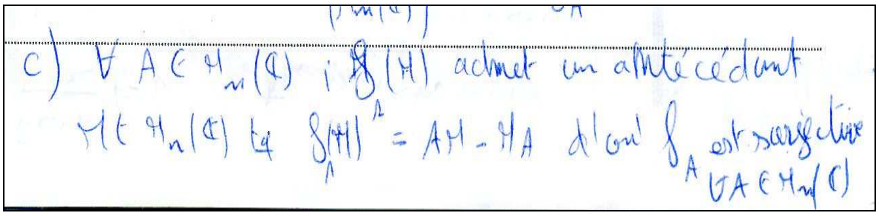
Ici, après avoir posé correctement le problème en utilisant la définition générale de la surjection, l'étudiant cherche une solution par contre exemple. Le raisonnement effectué est correct, seulement il n'a pas permis d'aboutir. Remarquons que dans la factorisation de *A+AM*, l'étudiant met *A* à gauche au lieu de la placer à droite. A la fin, il écrit, sans expliquer pourquoi, que l'égalité *AM=A(1+M)* est absurde, alors qu'elle est vérifiée par exemple pour $A=O_n$.

Production 39 (Copie 29)



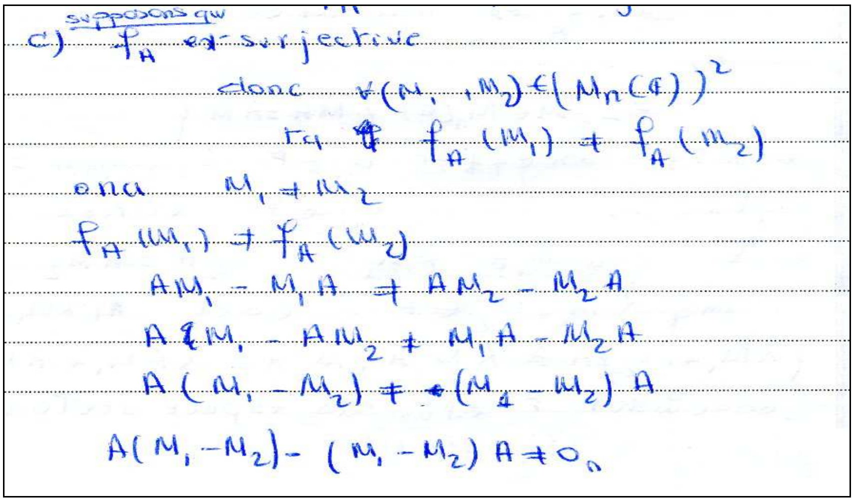
Pour cet étudiant, les conclusions qu'il fait pour $A=O_n$ et $A=I_n$, sont incohérentes avec la formulation qu'il donne pour « f_A surjective ». Pour l'application nulle qu'il prend, il ne vérifie la propriété de surjectivité que pour le seul élément de Im f_A . Cette réponse témoigne d'une conception erronée de la notion de surjection, ou d'une confusion entre ensemble d'arrivée et ensemble image. Nous rencontrons de telles erreurs chez d'autres étudiants :

Production 40 (Copie 40)



Ici aussi, l'étudiant ne considère dans l'ensemble d'arrivée que les éléments de Im f_A .

Production 41 (Copie 4)



Dans cette réponse, il y a confusion entre surjection et application. La propriété donnée découle du fait que f_A est une application et non de « f_A surjective ».

Commentaire pour la question 2-c

Le tableau suivant récapitule la répartition des réponses des étudiants à la question 2-c :

Tableau 26 : Répartition des réponses des étudiants à la question 2-c

Réponses C+	Réponses C-	Réponses F	Copies SR
21 %	**0 %**	**49 %**	**30 %**

Notons tout d'abord que cette question est la moins réussie dans l'exercice (79 % d'échec, entre réponses fausses et copies sans réponse). Les étudiants qui ont donnée une réponse correcte ont utilisé la stratégie 1 ou 2, ce qui témoigne d'une aptitude à s'adapter au contexte de l'exercice et à mobiliser les connaissances adéquates à la résolution de la question. Les autres étudiants, bien que la plupart d'entre eux ait donné une formulation correcte de la surjection, ne sont pas arrivés à reformuler cette propriété de façon appropriée. Ceci était pour une grande part à l'origine de l'échec de ces étudiants. Ces derniers, voulant utiliser la définition générale d'une surjection se sont heurtés à la difficulté d'interpréter et de résoudre l'équation : $f_A(M)=M'$. La nuance entre les statuts des matrices *A*, *M* et *M'* (soulignée dans l'analyse a priori) semble avoir empêché les étudiants à gérer la complexité de la tâche. Des erreurs sur le plan technique, liées au calcul matriciel et à l'usage des quantificateurs logiques, étaient aussi remarquées. Par ailleurs, pour certains étudiants, l'appropriation de la notion de surjection semble encore problématique.

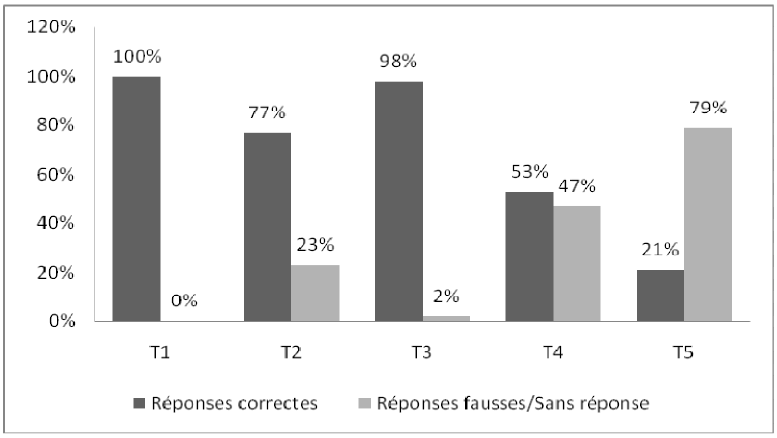
III. 2. 1. 3. Conclusion pour l'exercice 1

Nous récapitulons dans le tableau et le graphique ci-dessous la répartition des réponses des étudiants aux différentes questions de l'exercice.

Tableau 27 : Répartition des réponses des étudiants aux questions de l'exercice 1

Tâches	Niveaux de fonctionnement	Réponses C+	Réponses C-	Réponses F	Sans réponse
T_1	Technique	72 %	28 %	0 %	0 %
T_2	Mobilisable	72 %	5 %	23 %	0 %
T_3	Technique	98 %	0 %	2 %	0 %
T_4	Disponible	37 %	16 %	40 %	7 %
T_5	Disponible	21 %	0 %	49 %	30 %

Graphique 12 : Répartition des réponses des étudiants aux questions de l'exercice 1



Nous notons tout d'abord que les tâches d'ordre technique sont bien réussie par les étudiants. Aussi, les savoirs en jeu dans l'exercice sont, de façon générale, convenablement appris par la plupat des étudiants. L'inventaire des formulations données par les étudiants dans leurs réponses (y compris les réponses fausses) concernant les définitions et théorèmes mis en œuvre montre que ces formulations sont généralement conformes. Le tableau suivant donne, pour chacune des principales notions utilisées dans l'exercice, le pourcentage de formulations (définition et/ou théorème) données par les étudiants dans leurs réponses, selon qu'elles soient conformes ou erronées.

Tableau 28 : conformité des formulations

Notion	Formulation conforme	Formulation erronée
Application linéaire	100 %	0 %
Sous-espace vectoriel	91 %	9 %
Injection	86 %	14 %
Surjection	64 %	36 %

Néanmoins, la mise en œuvre des dites formulations n'était pas toujours évidente. Si pour certains étudiants l'usage de ces formulations témoigne d'une certaine familiarité avec les notions ensemblistes et d'algèbre linéaire mises en œuvre et reflète une bonne disponibilité des connaissances en jeu, il n'en est pas de même pour d'autres étudiants, pour qui, la mise en œuvre des formulations fournies s'est avérée problématique pour des tâches de niveau mobilisable et encore plus pour celles de niveau disponible. Les insuffisances que nos analyses ont pu mettre en évidence sont de deux ordres : heuristiques et sémiotique. Pour les insuffisances d'ordre heuristique, les productions des étudiants montrent des difficultés dans l'appropriation des données de l'exercice, dans l'adaptation des connaissances au contexte de travail ainsi que dans la mise en relation des informations disponibles. Plusieurs étudiants, même parfois pour ceux qui ont donné des réponses correctes, ont tendance à réfléchir à chaque question de façon séparée et d'utiliser des formulations non appropriées au contexte de l'exercice. Les stratégies de re-démonstration de propriétés (tâche T_2) et d'application de définitions (tâches T_4 et T_5) étaient toujours plus accessibles pour la plupart des étudiants. Pour les insuffisances d'ordre sémiotique, les réponses des étudiants font état de difficultés dans l'usage des expressions paramétrées (égalité entre ensembles $Ker\ f_A = \{O_n\}$, équation : $AM - MA = Y$), d'oubli, ou de négligence, de quantificateurs et de glissements de notations ($\in/\subset$, $\in/=$, $\Rightarrow$/donc, $\Rightarrow/=$). Les retombées de ces insuffisances ne se sont pas limitées à la non-conformité des textes produits, mais ont eu des incidences sur les possibilités de raisonnement et ont souvent conduits à des blocages. Par ailleurs, nous rencontrons chez certains étudiants des confusions de notions (surjection/application, ensemble image/ensemble d'arrivée, application f_A /matrice A), contagions entre structures algébriques, tendance de travail dans le registre symbolique non-intrinsèque et non-conformité dans l'usage des connecteurs de logique.

III. 2. 2. Le deuxième exercice

Enoncé

On désigne par ($GL_2(\mathbf{R})$, $\times$) le groupe multiplicatif des matrices inversibles de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.
Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ définies pour $x \in]-1,1[$ par :

$$M(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix}$$

On se propose de montrer par trois méthodes que ($\mathcal{H}$,$\times$) est un groupe abélien.

A. 1ére méthode

1) Montrer que $\mathcal{H}$ est une partie de $GL_2(\mathbf{R})$

2) Soient x et y deux réels tels que $xy \neq -1$.

En utilisant l'égalité : $1 - \left(\frac{x+y}{1+xy}\right)^2 = \frac{(1-x^2)(1-y^2)}{(1+xy)^2}$ (on ne demande pas de la démontrer), montrer que si $(x,y) \in]-1,1[^2$, alors $\frac{x+y}{1+xy} \in]-1,1[$

3) Montrer que $M(x)M(y) = M(\frac{x+y}{1+xy})$

4) Déduire des questions précédentes que $\mathcal{H}$ est un sous-groupe commutatif de ($GL_2(\mathbf{R})$, $\times$).

B. 2éme méthode

On munit l'intervalle $]-1,1[$ de la loi de composition interne $*$ définie par :

$$\forall (x,y) \in]-1,1[^2,\ x * y = \frac{x+y}{1+xy}$$

Et on admet que ($]-1,1[$, $*$) est un groupe abélien.

1) Montrer que l'application : $\begin{array}{ccc}]-1,1[& \to & \mathcal{H} \\ x & \mapsto & M(x) \end{array}$
est bijective.

2) En déduire que ($\mathcal{H}$,$\times$) est un groupe isomorphe au groupe ($]-1,1[$, $*$).

C. 3éme méthode

1) En utilisant l'application tangente hyperbolique $\begin{array}{cccc} th : & \mathbf{R} & \to &]-1,1[\\ & \theta & \to & x = th\,\theta \end{array}$

montrer que l'ensemble $\mathcal{H}$ est égal à l'ensemble des matrices définies pour $\theta \in \mathbf{R}$ par :

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} ch\,\theta & sh\,\theta \\ sh\,\theta & ch\,\theta \end{pmatrix}.$$

2) Montrer que pour θ et φ dans $\mathbf{R}$, on a : $A(\theta + \varphi) = A(\theta)A(\varphi)$.

3) Déduire des questions précédentes que ($\mathcal{H}$,$\times$) est un groupe isomorphe au groupe ($\mathbf{R}$, +).

Pour cet exercice, nous nous limitons à l'analyse des réponses des étudiants aux parties B et C où interviennent des notions ensemblistes fonctionnelles. Les tâches de la partie A engagent essentiellement un travail d'ordre algébrique qui n'intéresse pas notre recherche.

III. 2. 2. 1. Exercice 2, partie B. Objectif général

<table><tr><td>

Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ définies pour $x \in \ ]-1,1[$ par :

$$M(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix}$$

<u>B. 2^{éme} méthode</u>

On munit l'intervalle $]-1,1[$ de la loi de composition interne $*$ définie par :

$\forall\ (x,y) \in\ ]-1,1[^2,\ x * y = \dfrac{x+y}{1+xy}$

Et on admet que $(\,]-1,1[\,, *)$ est un groupe abélien.

1) Montrer que l'application : $\begin{array}{ccc}]-1,1[& \to & \mathcal{H} \\ x & \mapsto & M(x) \end{array}$

est bijective.

2) En déduire que $(\mathcal{H}, \times)$ est un groupe isomorphe au groupe $(\,]-1,1[\,, *)$.

</td></tr></table>

Cette partie de l'exercice vise à montrer que $(\mathcal{H}, \times)$ est groupe et à établir un isomorphisme entre $(\mathcal{H}, \times)$ et le groupe $(\,]-1,1[\,,\ *)$. La donnée de l'application $x \mapsto M(x)$ suggère, implicitement, une application répondant à la question. L'usage du théorème sur le transfert de la structure de groupe permet de répondre aux deux parties de la question simultanément. Notre objectif à travers cette partie de l'exercice est double :

✓ regarder comment procèdent les étudiants pour établir la bijectivité de l'application : $x \mapsto M(x)$,

✓ regarder les possibilités des étudiants à mettre en œuvre la notion d'isomorphisme pour transporter la structure de groupe de $(\,]-1,1[\,, *)$ à $(\mathcal{H}, \times)$.

Nous notons que le théorème de transfert a été étudié dans le cours d'Algèbre avec les structures algébriques usuelles (groupe, anneau, corps et espace vectoriel) et a été utilisé à plusieurs reprises dans le cours et en travaux dirigés (cf. Chap. II, V.2).

Pour les analyses qui suivent, nous adoptons les notations suivantes concernant les tâches proposées dans cette partie de l'exercice :

T_6	Montrer qu'une application est bijective
T_7	Montrer qu'un ensemble muni d'une loi de composition interne est un groupe
T_8	Montrer que deux groupes sont isomorphes

III. 2. 2. 2. Analyse a priori des questions et analyse des productions des étudiants

Question 1. (Tâche T_6)

<table><tr><td>

Montrer que l'application : $\begin{array}{ccc}]-1,1[& \to & \mathcal{H} \\ x & \mapsto & M(x) \end{array}$

est bijective.

</td></tr></table>

a) Analyse a priori

A cette étape de la question, l'intervalle]-1,1[n'est supposé muni d'aucune structure algébrique. Il s'agit donc d'utiliser l'une des caractéristiques générales de bijection pour montrer que l'application en question (qu'on note g dans la suite) est bijective. Tenant compte du contexte de l'exercice, deux techniques sont possibles :

Technique 1 : Montrer que g est injective et surjective

Technique 2 : Montrer que pour toute matrice $M(x)$ de $\mathcal{H}$, l'équation en t : $g(t)=M(x)$ admet une solution unique dans l'intervalle]-1,1[

Pour la technique 1, un calcul algébrique simple permet d'établir que pour x et y dans $]-1,+1[$, on a : (i) ($M(x) = M(y) \Rightarrow x = y$), ce qui prouve que g est injective (on peut aussi utiliser la contraposée de (i)). La surjectivité de g découle de la construction de l'ensemble $\mathcal{H}$.

La technique 2, conduit à un travail analogue. Elle pourrait cependant poser des difficultés au niveau de la justification de l'existence et de l'unicité de t, surtout si l'étudiant désigne t et x par le même ostensif. D'un autre côté, la variété de notions intervenant dans l'exercice pourraient donner illusion de la possibilité d'utiliser les propriétés de bijectivité relatives aux morphismes de groupes (en utilisant le noyau de g) ou d'espaces vectoriels (en montrant que la matrice $M(x)$ est inversible).

Bien qu'au niveau technique, le travail requis pour montrer que g est bijective est relativement simple, la réalisation de la tâche demande de bien s'approprier des données de l'exercice, de choisir une technique de travail adaptée au contexte de la tâche, de mobiliser les connaissances correspondant à la technique choisie et de bien gérer les ostensifs à mettre en jeu dans la réalisation de la tâche. Nous considérons, pour ces raisons, que la tâche est de niveau disponible.

b) Analyse des productions des étudiants

Sur 43 réponses, nous dénombrons 12 réponses correctes de type C+, 27 réponses fausses et 4 copies sans réponses.

Réponses correctes

Les 12 réponses correctes sont de type C+. Parmi ces réponses, 11 étudiants ont montré que g est injective et surjective, et le douzième a montré que tout élément de $\mathcal{H}$ possède un antécédent unique dans $]-1,+1[$. Nous rapportons ci-dessous des exemples de ces réponses.

Production 42 (Copie 24)

2ème méthode :

Soit $\varphi :]-1, 1[\longrightarrow \mathcal{H}$

$x \longmapsto M(x)$.

Montrons que φ est bijective.

φ est surjective par construction et par définition de l'ensemble $\mathcal{H}$.

Montrons que φ est injective.

Soit $(x, y) \in]-1, 1[^2$ tq $\varphi(x) = \varphi(y)$

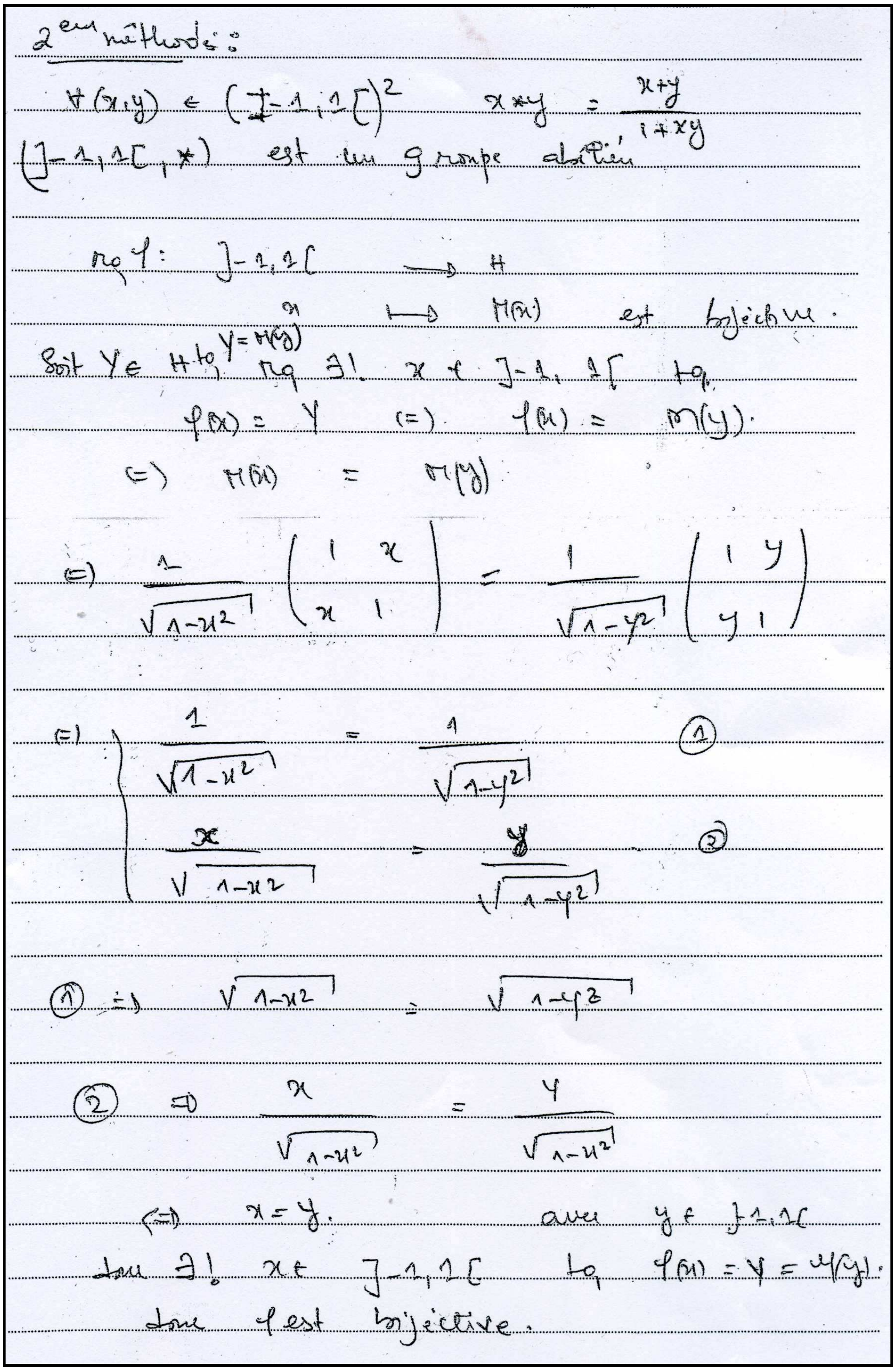
$\Rightarrow M(x) = M(y) \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \\ \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \end{cases}$

$\Rightarrow x = y$.

D'où φ est injective.

Cl : φ est bijective.

Production 43 (Copie 19)


2^{em} méthode :

$\forall (x,y) \in (]-1,1[)^2 \quad x*y = \frac{x+y}{1+xy}$

$(]-1,1[,*)$ est un groupe abélien

mq $f :]-1,1[\longrightarrow H$
$x \longmapsto M(x)$ est bijective.

Soit $Y \in H$ tq $Y=M(y)$ mq $\exists!\, x \in]-1,1[$ tq

$f(x) = Y \iff f(x) = M(y)$

$\iff M(x) = M(y)$

$\iff \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\begin{pmatrix}1 & x\\ x & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\begin{pmatrix}1 & y\\ y & 1\end{pmatrix}$

$\iff \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} & (1) \\ \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} & (2) \end{cases}$

(1) $\Rightarrow \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-y^2}$

(2) $\Rightarrow \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{y}{\sqrt{1-x^2}}$

$\iff x = y.$ avec $y \in]1,1[$

donc $\exists!\, x \in]-1,1[$ tq $f(x) = Y = M(y)$.

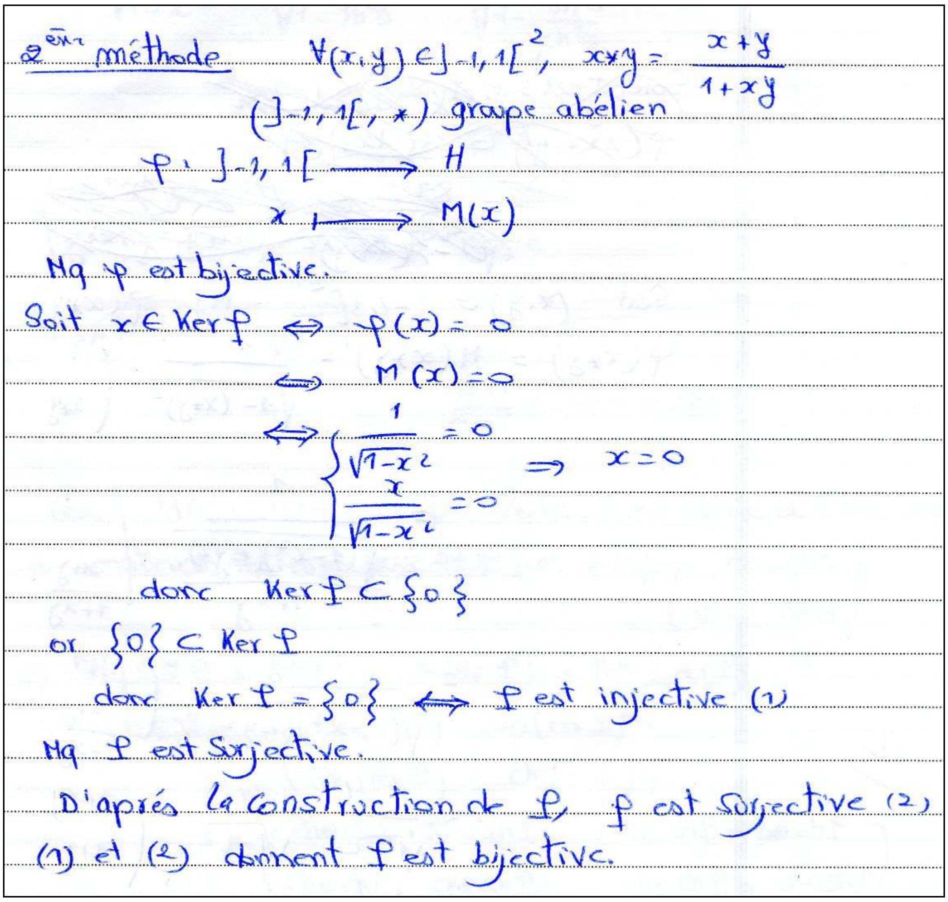
donc f est bijective.

Nous notons le soin avec lequel sont justifiées et rédigées les réponses dans les deux copies. Notamment en ce qui concerne l'adaptation des formulations des propriétés démontrées au contexte de la tâche et la gestion des ostensifs mis en œuvre. Remarquons que pour la propriété d'injectivité, il y a 2 étudiants qui ont utilisé la contraposée de la propriété indiquée dans l'analyse a priori et pour la propriété de surjectivité, il y a un étudiant qui a montré que $g(\,]-1,1[) = \mathcal{H}$, par double inclusion.

Réponses fausses

Comme nous l'avons prévu dans l'analyse a priori, les 27 réponses fausses sont dues à des illusions quant au contexte dans lequel il faut traiter la question de bijection. En effet, 19 étudiants ont cherché à montrer que le noyau de g se réduit à l'élément neutre de $\mathcal{H}$ pour justifier que g est injective, la plupart de ces étudiants (12/19) ont néanmoins justifié correctement la propriété de surjection. Les 8 autres étudiants qui ont donné des réponses fausses ont considéré que *M(x)* est la matrice de l'application *g*, ils ont alors cherché à justifier que *M(x)* est inversible pour prouver que g est bijective. Nous donnons ci-dessous des exemples de ces réponses :

Production 44 (Copie 23)



2ème méthode $\forall (x,y) \in]-1,1[^2,\ x*y = \dfrac{x+y}{1+xy}$

$(]-1,1[, *)$ groupe abélien

$f :]-1,1[\longrightarrow H$

$x \longmapsto M(x)$

Mq φ est bijective.

Soit $x \in Ker f \Leftrightarrow \varphi(x) = 0$

$\Leftrightarrow M(x) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \\ \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0$

donc $Ker f \subset \{0\}$

or $\{0\} \subset Ker f$

donc $Ker f = \{0\} \Leftrightarrow f$ est injective (1)

Mq f est surjective.

D'aprés la construction de f, f est surjective (2)

(1) et (2) donnent f est bijective.

L'étudiant ici justifie convenablement que *f* est surjective. Le travail effectué pour montrer que $Ker\varphi = \{0\}$ est erroné. En plus du fait qu'il ne tient pas compte du contexte de la tâche, l'étudiant se trompe dans la considération des éléments de $Ker\varphi$, en prenant $\varphi(x) = 0$ au lieu de $\varphi(x) = I_2$. Néanmoins, mises à part les erreurs commises, l'égalité ensembliste est convenablement traitée.

Production 45 (Copie 7)

1) Soit $u :]-1,1[\longrightarrow H$

$x \longmapsto M(x)$.

Soit $x \in Ker\, u \iff u(x) = I_2$

$$\iff \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \\ \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\iff x = 0.$

donc $\Rightarrow$ $Ker\, u = \{0\}$.

Par suite u est injective.

Comme $]-1,1[$ est fini donc

f injective $\iff$ f surjective.

Dans cette copie, l'égalité ensembliste $Ker\varphi = \{0\}$ est convenablement justifiée. Pour la surjectivité, l'étudiant considère que l'intervalle]-1,1[est fini. Cette confusion, entre les notions « finies » et « bornées » était remarquée chez beaucoup d'étudiants dans le test diagnostique. D'autres étudiants ont justifié la surjectivité en remarquant que $\mathcal{H}$ est de dimension finie.

Production 46 (Copie 38)

1) Mq H est une partie de $GL_2(\mathbb{R})$, il suffit de montrer que $M(x)$ / $x \in]-1,1[$ est inversible.

soit $N = \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix}$

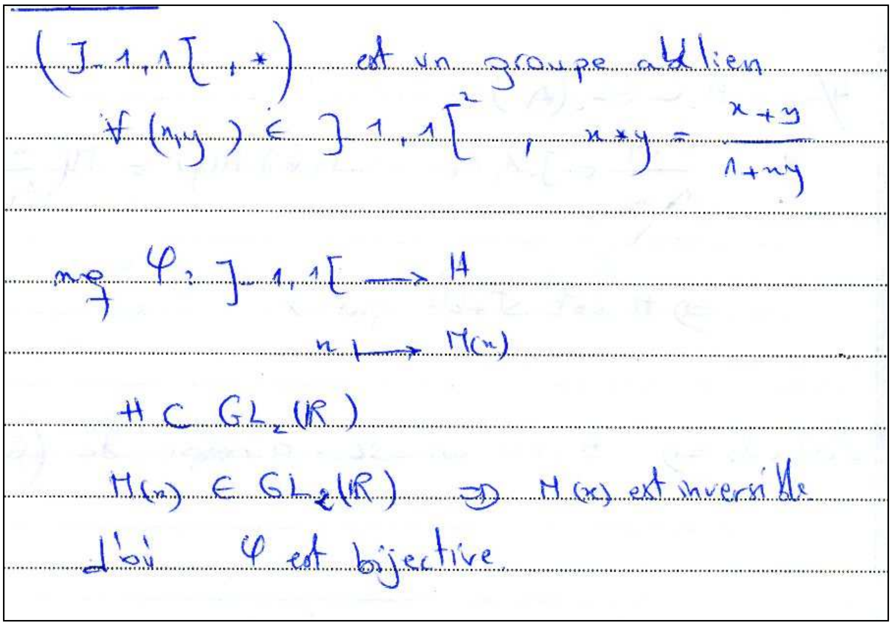
la méthode de Gauss transforme N en $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1-x^2 \end{pmatrix}$

on a $1-x^2 \neq 0$ $\forall x \in]-1,1[$ donc $rg\, N = 2$

par suite $rg\, M(x) = 2 = \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Donc $M(x)$ est inversible

Production 47 (Copie 41)



$(]-1,1[\,,*)$ est un groupe abélien

$\forall (x,y) \in]-1,1[^2 \;,\; x*y = \dfrac{x+y}{1+xy}$

mq $\varphi :]-1,1[\longrightarrow H$

$x \longmapsto M(x)$

$H \subset GL_2(\mathbb{R})$

$M(x) \in GL_2(\mathbb{R}) \Rightarrow M(x)$ est inversible

d'où φ est bijective

Dans les copies 38 et 41, les étudiants confondent entre l'application $x \mapsto M(x)$ et l'application linéaire associée à *M(x)*. Mise à part cette confusion, l'inversibilité de *M(x)* est convenablement justifiée.

Commentaire pour la question 1 (2ème méthode)

Le tableau suivant récapitule la répartition des réponses des étudiants à cette question :

Tableau 29 : Répartition des réponses des étudiants à la question 1 (2ème méthode)

Réponses C+	Réponses C-	Réponses F	Copies SR
28 %	**0 %**	**63 %**	**9 %**

Deux éléments caractérisent les réponses des étudiants à cette question :

- présence chez la plupart d'entre eux (ceux qui ont donnés des réponses C+ ou F) de connaissances mathématiques correctes (savoir et savoir-faire : caractérisation d'une injection, d'une surjection, d'une bijection dans un contexte donné, montrer qu'une matrice est inversible, montre l'égalité entre deux ensembles…) et possibilité de s'en servir, mais pas nécessairement en conformité avec le contexte de la tâche à résoudre,

- insuffisance, pour un bon nombre d'étudiants, dans l'appropriation des données de l'exercice et dans la prise en compte du contexte de la tâche à résoudre. En atteste les réponses fausses, où les étudiants utilisent les notions rapportées dans l'exercice mais dans des contextes différents de celui qui concerne la tâche.

Ceci soulève le problème de la pratique de résolution de problèmes mathématiques et nous incite à nous interroger quant aux facteurs qui sont à l'origine des insuffisances constatées.

Question 2. (Tâches T_7 et T_8)

2) En déduire que $(\mathcal{H},\times)$ est un groupe isomorphe au groupe $(\,]-1{,}1[\,,*)$.

a) Analyse a priori

L'objectif de cette question est de regarder les possibilités des étudiants à mobiliser l'application bijective : $x \mapsto M(x)$, pour répondre à la question. Deux techniques peuvent être adoptées pour répondre à la question :

Technique 1 : elle consiste à remarquer que l'application g : $x \mapsto M(x)$ est un isomorphisme pour les lois de $(\mathcal{H},\times)$ et $(\,]-1{,}1[\,,*)$ (elle est bijective d'après 1 et la question 3 de la partie A permet de déduire que c'est un morphisme). Le théorème sur le transfert de la structure de groupe permet alors de conclure.

Technique 2 : on montre séparément que $(\mathcal{H},\times)$ est un groupe (via les axiomes du groupe) puis que $(\mathcal{H},\times)$ et $(\,]-1{,}1[\,,*)$ sont isomorphes. Pour l'isomorphisme, la question 1 suggère, implicitement, de considérer l'application : $x \mapsto M(x)$.

La réponse selon la première technique fait preuve d'une bonne disponibilité de la notion d'isomorphisme, quant à la réponse selon la deuxième technique, elle reflète des difficultés dans la possibilité de rendre opérationnelle la notion d'isomorphisme.

Pour cette tâche, l'étudiant est appelé à choisir une technique de résolution, à mobiliser les savoirs correspondant, à mettre la question en relation avec des questions antérieures et doit savoir exploiter les résultats et les connaissances à mettre en œuvre. Pour ces raisons nous considérons que la tâche est de niveau disponible.

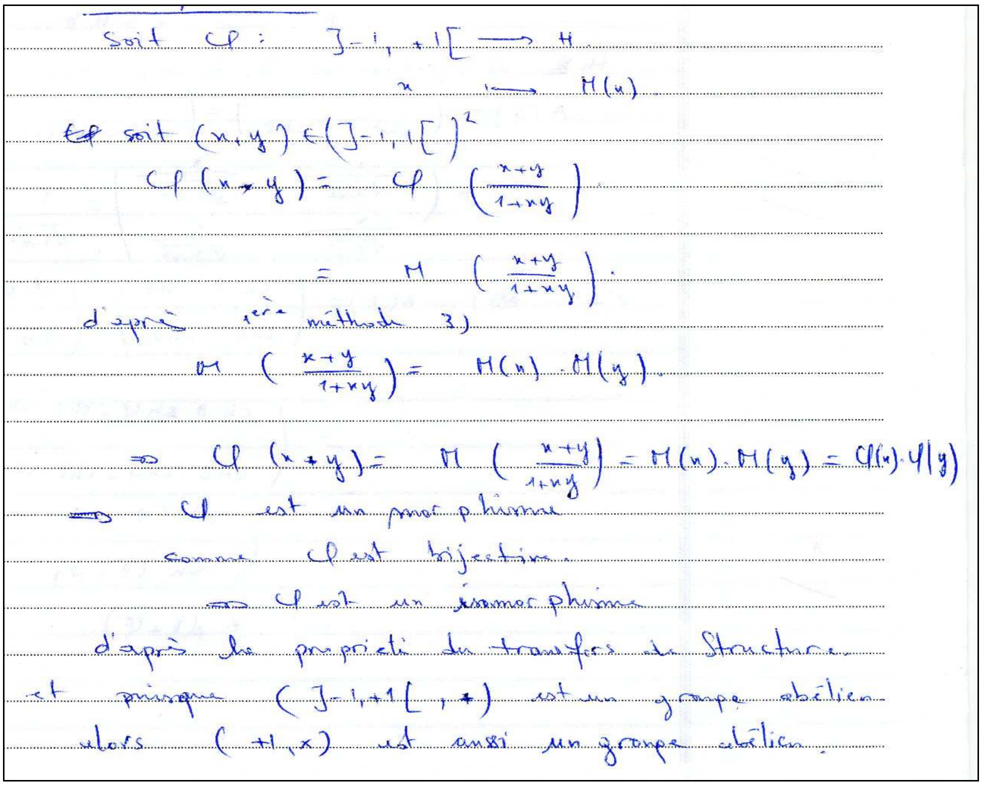
b) Analyse des productions des étudiants

Sur 43 copies, nous comptons 16 réponses correctes de types C+, 20 réponses correctes de types C-, 4 réponses fausses et 3 copies sans réponse.

Réponses correctes de type C+

Tous les étudiants qui ont donné des réponses de ce type ont répondu selon la technique 1. Ces réponses sont convenablement justifiées et bien rédigées comme le montre les deux exemples suivants :

Production 48 (Copie 20)



Soit $\varphi :]-1,+1[\longrightarrow H$

$x \longmapsto M(x)$

soit $(x,y) \in (]-1,1[)^2$

$\varphi(x*y) = \varphi\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$

$= M\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$.

d'après 1ère méthode 3)

$M\left(\frac{x+y}{1+xy}\right) = M(x).M(y)$.

$\Rightarrow \varphi(x*y) = M\left(\frac{x+y}{1+xy}\right) = M(x).M(y) = \varphi(x).\varphi(y)$

$\Rightarrow$ φ est un morphisme

comme φ est bijective.

$\Rightarrow$ φ est un isomorphisme

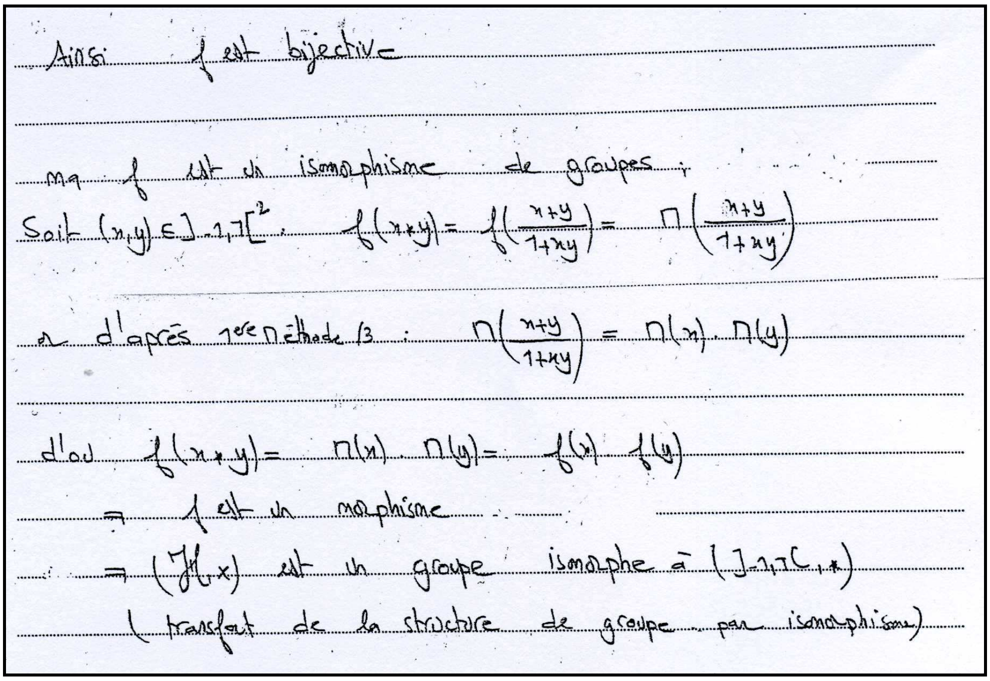
d'après la propriété du transfert de structure

et puisque $(]-1,+1[,*)$ est un groupe abélien

alors $(H,\times)$ est aussi un groupe abélien.

Dans d'autres solutions de ce type, nous rencontrons des rédactions plus succinctes (comme la production ci-dessous) ou encore plus longues, où les étudiants n'ont pas tenu compte de l'égalité donnée dans la partie A et ont refait un nouveau calcul.

Production 49 (Copie 24)



Ainsi f est bijective

m.q f est un isomorphisme de groupes ;

Soit $(x,y) \in]-1,1[^2$. $f(x*y) = f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right) = M\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$

or d'après 1ère méthode (3 : $M\left(\frac{x+y}{1+xy}\right) = M(x).M(y)$

d'où $f(x*y) = M(x).M(y) = f(x).f(y)$

$\Rightarrow$ f est un morphisme

$\Rightarrow$ $(H,\times)$ est un groupe isomorphe à $(]-1,1[,*)$

(transfert de la structure de groupe par isomorphisme)

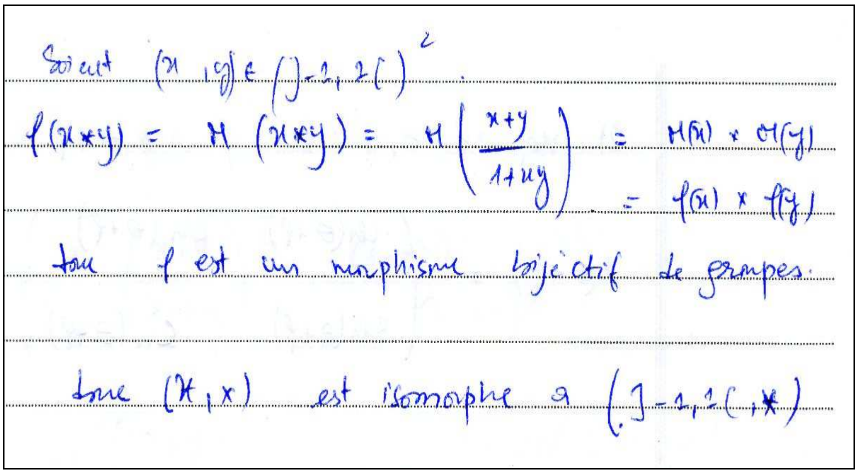
Dans cette production, l'étudiant ne rappelle pas à la fin que l'application *f* est bijective. Remarquons aussi l'usage du symbole d'implication dans le sens de donc.

Réponses correctes de type C-

Dans ce type de réponses, nous rencontrons deux types d'erreurs dans les productions des étudiants :

Pour le premier type (qui a concerné 16 étudiants sur 20), les étudiants s'intéressent seulement à établir l'isomorphisme entre les deux structures données. $(\mathcal{H},\times)$ est ainsi supposé implicitement comme ayant la structure de groupe, comme le montre les deux productions suivantes :

Production 50 (Copie 1)


Soit $(x,y) \in (]-1,1[)^2$

$f(x*y) = H(x*y) = H\left(\frac{x+y}{1+xy}\right) = H(x) \times H(y)$

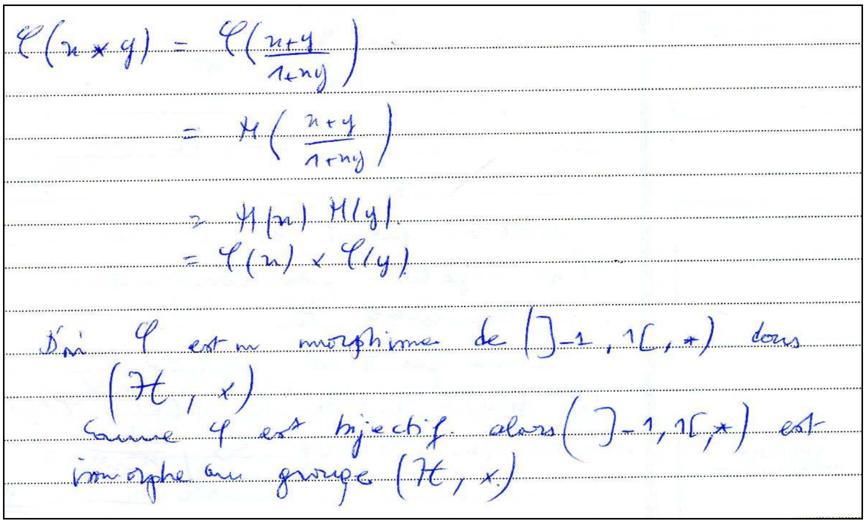
$= f(x) \times f(y)$

donc f est un morphisme bijectif de groupes.

donc $(\mathcal{H},\times)$ est isomorphe à $(]-1,1[,*)$

Dans cette production, l'étudiant écrit : « *f est un morphisme bijectif de groupes* », ce qui suppose qu'il considère que les deux structures sont déjà munies de la structure de groupe.

Production 51 (Copie 17)


$\varphi(x*y) = \varphi\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$

$= H\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$

$= H(x)\ H(y)$

$= \varphi(x) \times \varphi(y)$

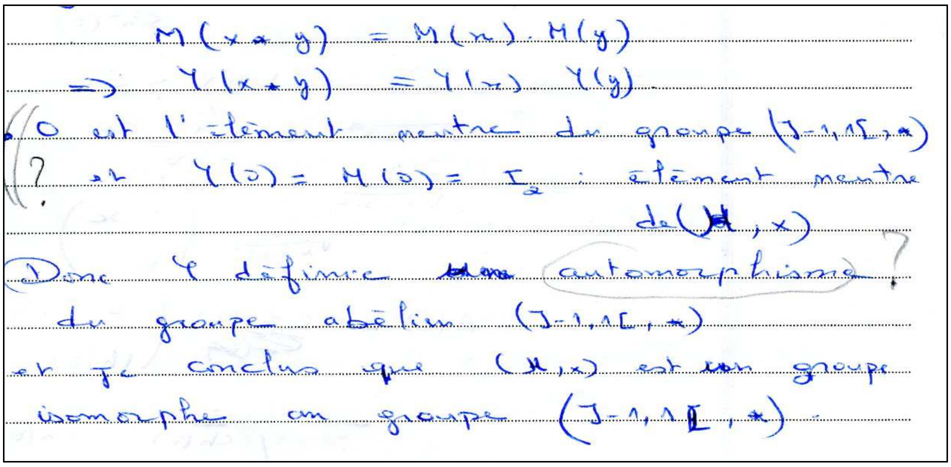
D'où φ est un morphisme de $(]-1,1[,*)$ dans $(\mathcal{H},\times)$

Comme φ est bijectif alors $(]-1,1[,*)$ est isomorphe au groupe $(\mathcal{H},\times)$

Ici, l'étudiant ne mentionne dans sa conclusion que l'isomorphie entre les deux structures, il ne fait aucune allusion à la structure de groupe pour $(\mathcal{H},\times)$.

Pour le deuxième type d'erreurs dans les réponses correctes C-, les 4 étudiants concernés ajoutent la condition $g(0) = I_2$ pour le morphisme de groupes (ces étudiants font la confusion entre un morphisme de groupes et un morphisme d'anneaux). Nous rencontrons aussi parfois d'autres imprécisions dans la rédaction, comme dans la production suivante :

Production 52 (Copie 6)


$M(x * y) = M(x) . M(y)$

$\Rightarrow \varphi(x * y) = \varphi(x)\ \varphi(y)$

0 est l'élément neutre du groupe $(]-1,1[, *)$

? et $\varphi(0) = M(0) = I_2$: élément neutre de $(M, \times)$

Donc φ définie ~~un~~ automorphisme ?

du groupe abélien $(]-1,1[, *)$

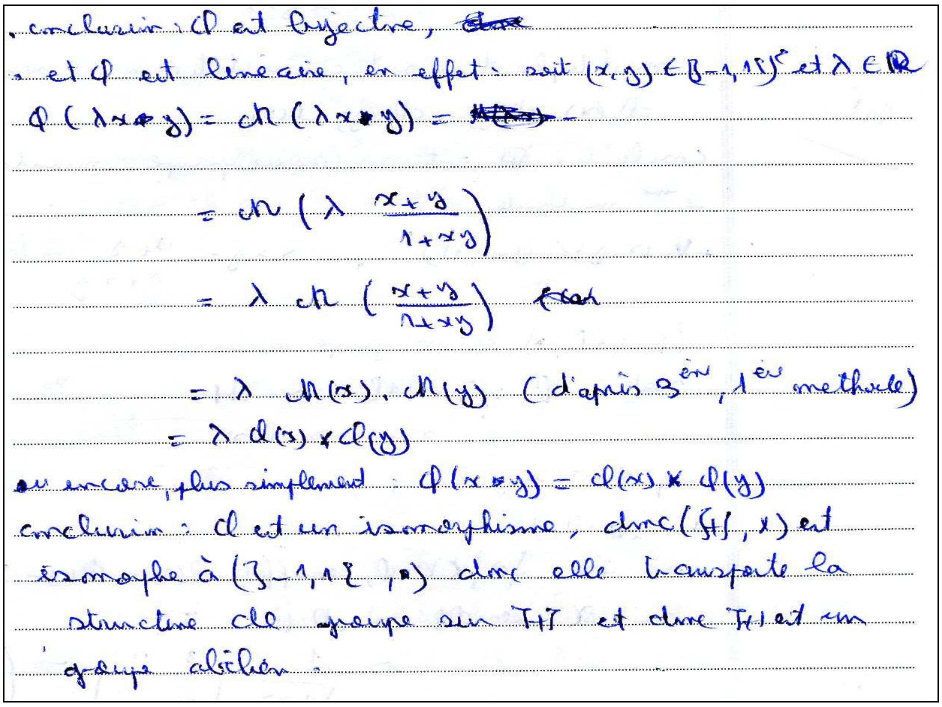
et je conclus que $(M, \times)$ est un groupe isomorphe au groupe $(]-1,1[, *)$.

Nous notons dans cette production des imprécisions et des confusions au niveau des connaissances et du langage d'algèbre linéaire.

Réponses fausses

Dans les 4 réponses fausses, nous rencontrons une variété d'erreurs dues aussi à des insuffisances dans les connaissances d'algèbre linéaire. Voici deux exemples de ces réponses :

Production 53 (Copie 26)


conclusion : φ est bijective,

et φ est linéaire, en effet : soit $(x,y) \in]-1,1[^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$\varphi(\lambda x * y) = ch(\lambda x * y) =$

$= ch\left(\lambda \frac{x+y}{1+xy}\right)$

$= \lambda\, ch\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$

$= \lambda\, ch(x) . ch(y)$ (d'après 3ème, 1ère méthode)

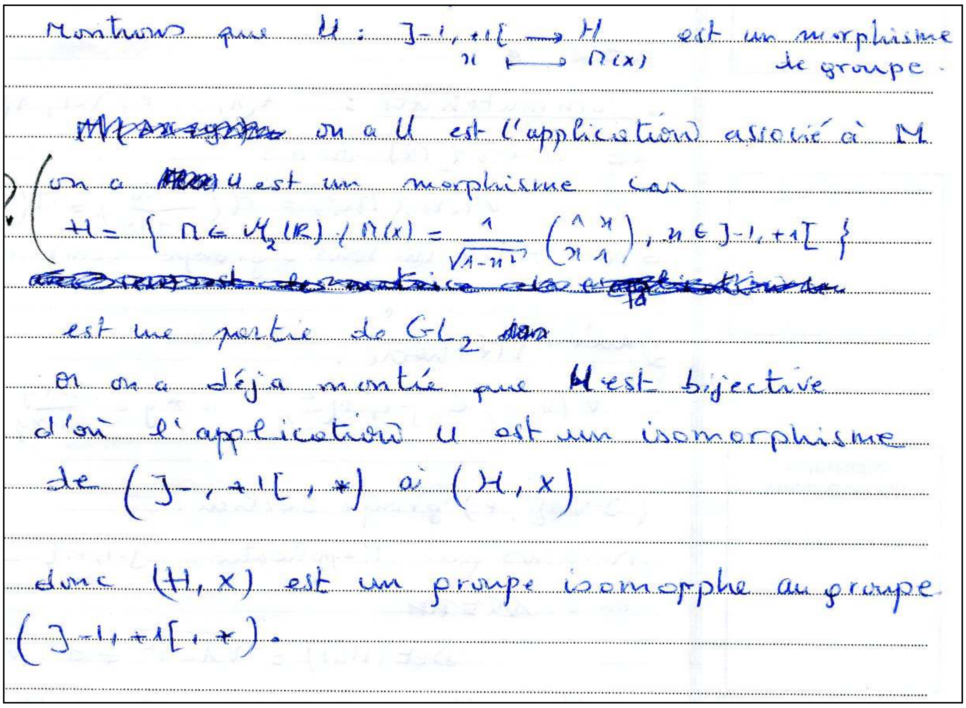
$= \lambda\, \varphi(x) \times \varphi(y)$

ou encore, plus simplement : $\varphi(x * y) = \varphi(x) \times \varphi(y)$

conclusion : φ est un isomorphisme, donc $(H, \times)$ est isomorphe à $(]-1,1[, *)$ donc elle transporte la structure de groupe sur H et donc H est un groupe abélien.

Dans cette réponse, l'étudiant fait des confusions entre morphisme de groupe et application linéaire. Néanmoins, il mobilise correctement le théorème sur le transfert de structures.

Production 54 (Copie 43)


Montrons que $U :]-1,+1[\to H$, $x \mapsto M(x)$ est un morphisme de groupe.

on a U est l'application associé à M

on a u est un morphisme car

$H = \{ M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \,/\, M(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix}, x \in]-1,+1[\}$

est une partie de GL_2

et on a déjà montré que U est bijective

d'où l'application U est un isomorphisme de $(]-1,+1[, *)$ à $(H, \times)$

donc $(H, \times)$ est un groupe isomorphe au groupe $(]-1,+1[, *)$.

Dans cette réponse, l'étudiant attribue la matrice *M(x)* à l'application U, qu'il considère dans ce cas linéaire et en déduit que U est un morphisme. Il utilise ensuite, implicitement, le théorème de transfert de structures et donne une conclusion correcte.

Commentaire pour la question 2 (2ème méthode)

Le tableau suivant donne la répartition des réponses des étudiants à cette question :

Tableau 29 : Répartition des réponses des étudiants à la question 1 (2ème méthode)

Réponses C+	Réponses C-	Réponses F	Copies SR
37 %	47 %	9 %	7 %

Nous remarquons tout d'abord que 10 des 12 étudiants qui ont donné des réponses C+ à la première question ont aussi donné des réponses de même type pour la deuxième question. Ceci fait preuve, pour ces étudiants, d'aptitudes dans la gestion des données de l'exercice, dans la mobilisation des connaissances et dans la rédaction des réponses. Dans les réponses de types C-, comme dans la plupart des réponses fausses, nous rencontrons des glissements et des confusions entre différentes notions d'algèbre linéaire et des insuffisances au niveau de la gestion des connaissances et de la rédaction des réponses. Ceci, bien que beaucoup de ces réponses montrent que les étudiants concernés connaissent leurs cours, seulement ils se trouvent incapables de gérer leurs connaissances de façon appropriée et conforme dans leur travail.

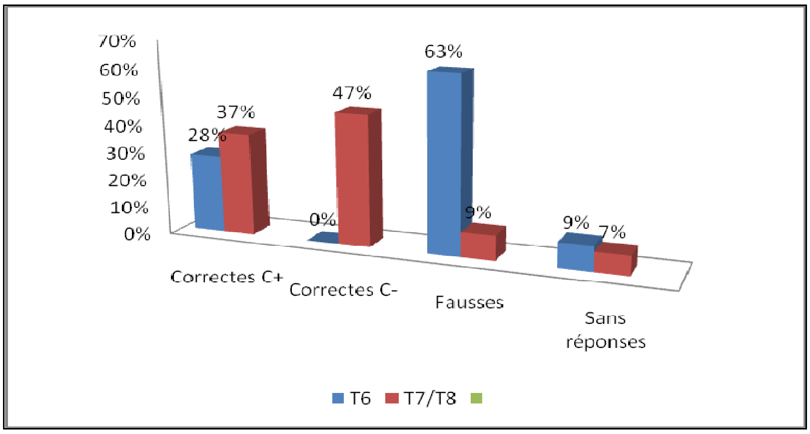
III. 2. 2. 3. Conclusion pour l'exercice 2 (Partie B)

Nous récapitulons dans le tableau et le graphique ci-dessous la répartition des réponses des étudiants aux deux questions de cette partie de l'exercice.

Tableau 30 : Répartition des réponses des étudiants aux questions de l'exercice 2 (2ème méthode)

Tâches	Niveaux de fonctionnement	Réponses C+	Réponses C-	Réponses F	Sans réponse
T_6	Disponible	28 %	0 %	63 %	9 %
T_7 et T_8	Disponible	37 %	47 %	9 %	7 %

Graphique 13 : Répartition des réponses des étudiants aux questions de l'exercice 2 (2ème méthode)



Dans cette partie B de l'exercice 2, nous constatons, à travers les réponses des étudiants, une présence de connaissances correctes chez la plupart des étudiants, relatives aux notions mises en jeu dans l'exercice, mais en revanche, nous remarquons des difficultés pour beaucoup d'entre eux à s'adapter au contexte de l'exercice et à gérer de façon conforme les connaissances apprises. Dans la première question, la plupart des étudiants étaient perturbés par la définition de l'application *g*, et particulièrement par la présence de la matrice *M(x)*, qui les a conduits à travailler dans un cadre linéaire et non ensembliste, dont se réfère la tâche. Dans la deuxième question, bien que les taux des réponses étaient presque inversés entre correctes et fausses par rapport à la première question (ce qui appui notre hypothèse à propos des connaissances des étudiants)[65], nous notons que plus que la moitié des réponses correctes ne sont pas conformes sur le plan des connaissances utilisées et au niveau de la rédaction. Nous rencontrons ainsi des glissements entre différentes notions et de l'implicite dans les réponses données. Les mêmes raisons étaient aussi à l'origine des erreurs rencontrées dans les réponses fausses. Ce constat montre une certaine fragilité dans les connaissances apprises par les étudiants et des difficultés liées à la pratique de résolution de problèmes, concernant notamment l'appropriation des donnés du problème et les possibilités de s'adapter au contexte de la tâche à réaliser.

III. 2. 2. 4. Exercice 2, partie C. Objectif général

Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ définies pour $x \in \,]-1,1[$ par :

$$M(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix}$$

<u>C. 3^éme^ méthode</u>

1) En utilisant l'application tangente hyperbolique $th : \mathbf{R} \to \,]-1,1[$, $\theta \mapsto x = th\,\theta$

montrer que l'ensemble $\mathcal{H}$ est égal à l'ensemble des matrices définies pour $\theta \in \mathbf{R}$ par :

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} ch\ \theta & sh\ \theta \\ sh\ \theta & ch\ \theta \end{pmatrix}.$$

2) Montrer que pour θ et φ dans $\mathbf{R}$, on a : $A(\theta+\varphi) = A(\theta)A(\varphi)$.

3) Déduire des questions précédentes que $(\mathcal{H},\times)$ est un groupe isomorphe au groupe $(\mathbf{R}, +)$.

Dans cette partie de l'exercice, tout en restant dans le cadre de l'algèbre des structures, nous introduisons l'application numérique *th*, étudiée dans le cours d'analyse, dans l'objectif de voir la possibilité des étudiants à mobiliser les caractéristiques de cette fonction (notamment sa propriété de bijectivité) et à mettre en relation des connaissances fonctionnelles du domaine de l'Analyse et du domaine d'Algèbre, pour réaliser les tâches demandées. Les trois questions posées visent, comme dans la partie B, à montrer que $(\mathcal{H},\times)$ est un groupe, et à établir un

[65] puisque, pour deux tâches supposées disponibles, les types de réponses se sont complètement inversés. Ceci, à notre avis, s'explique par l'influence du contexte de la tâche, plus que par manque de connaissances. Etant donné que dans la première question, le contexte n'est pas suffisamment explicitée par l'énoncé, alors que dans la deuxième, il est plus évident.

isomorphisme entre ($\mathcal{H}$,$\times$) et un groupe donné, en l'occurrence ici (**R**,+). Cependant, contrairement à la deuxième méthode, celle-ci n'indique pas explicitement l'application à considérer pour établir l'isomorphisme entre les deux structures. Bien que des indications sont données pour aider à construire cet isomorphisme. Nous nous intéressons particulièrement dans cette partie de l'exercice à :

- Regarder comment les étudiants vont procéder pour établir l'égalité entre les deux ensembles donnés dans la question 1. Et notamment s'ils vont se servir de la bijectivité de l'application *th* pour justifier cette égalité.
- Voir comment les étudiants vont procéder pour organiser les données disponibles et ajouter les éléments manquants pour répondre à la question 3.

Pour les analyses qui suivent, nous adoptons les notations suivantes concernant les tâches proposées dans cette partie de l'exercice :

$\mathbf{T_8}$	Montrer que deux groupes sont isomorphes
$\mathbf{T_9}$	Montrer que deux ensembles sont égaux
$\mathbf{T_{10}}$	Effectuer un produit matriciel

III. 2. 2. 5. Analyse a priori des questions et analyse des productions des étudiants

Question 1. (Tâche T_9)

1) En utilisant l'application tangente hyperbolique $th : \mathbf{R} \to\ ]-1,1[$, $\theta \mapsto x = th\,\theta$

montrer que l'ensemble $\mathcal{H}$ est égal à l'ensemble des matrices définies pour $\theta \in \mathbf{R}$ par :

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} ch\ \theta & sh\ \theta \\ sh\ \theta & ch\ \theta \end{pmatrix}.$$

a) Analyse a priori

La question vise à établir l'égalité entre l'ensemble $\mathcal{H}$ et l'ensemble $\mathcal{D}$ des matrices

définies pour $\theta \in \mathbf{R}$ par : $A(\theta) = \begin{pmatrix} ch\ \theta & sh\ \theta \\ sh\ \theta & ch\ \theta \end{pmatrix}$.

La formulation, sous forme rhétorique, des ensembles $\mathcal{H}$ et $\mathcal{D}$, pourrait constituer une première difficulté pour les étudiants pour pouvoir s'approprier les différents éléments entrant en jeu dans la tâche à réaliser. Particulièrement, nous prévoyons que certains étudiants ne vont pas accorder d'importance aux ensembles que décrivent les paramètres x et θ dont dépendent les écriture de $M(x)$ et de $A(\theta)$ et vont se limiter à établir l'identité entre les deux formes d'écriture matricielles. Ceci étant, une première manière de réaliser la tâche consiste à :

- utiliser les égalités : $ch\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1-th^2\theta}}$ et $sh\theta = th\theta.ch\theta$, pour obtenir que toute matrice $A(\theta)$ peut s'écrire sous la forme $M(th\theta)$.

- l'égalité entre les ensembles $\mathcal{H}$ et $\mathcal{D}$, peut alors être établie en utilisant l'égalité $A(\theta)=M(th\theta)$ et en remarquant (du fait de la bijectivité de la fonction *th*) que lorsque θ décrit **R,** $th\theta$ décrit l'intervalle]-1,1[.

Cette justification, requiert une bonne appropriation quant aux manières dont sont constitués les deux ensembles et la compréhension du rôle que joue la propriété de bijectivité comme moyen de mettre en correspondance, dans un sens précis, deux ensembles. Ceci demande une certaine familiarité avec les notions en jeu et la possibilité de dépasser le niveau technique dans leur usage. Nous considérons pour ces raisons que la tâche est de niveau disponible.

Cela dit, d'autres techniques pouvant être adoptées pour montrer que $\mathcal{H} = \mathcal{D}$. Comme par exemple, montrer la double inclusion, ou procéder par équivalence, en montrant qu'un élément appartient à l'un des deux ensembles est équivalent à son appartenance au deuxième ensemble. Mais, en fait, toutes les méthodes se réfèrent au même principe de démonstration et ne se distinguent que par leurs méthodes de rédaction.

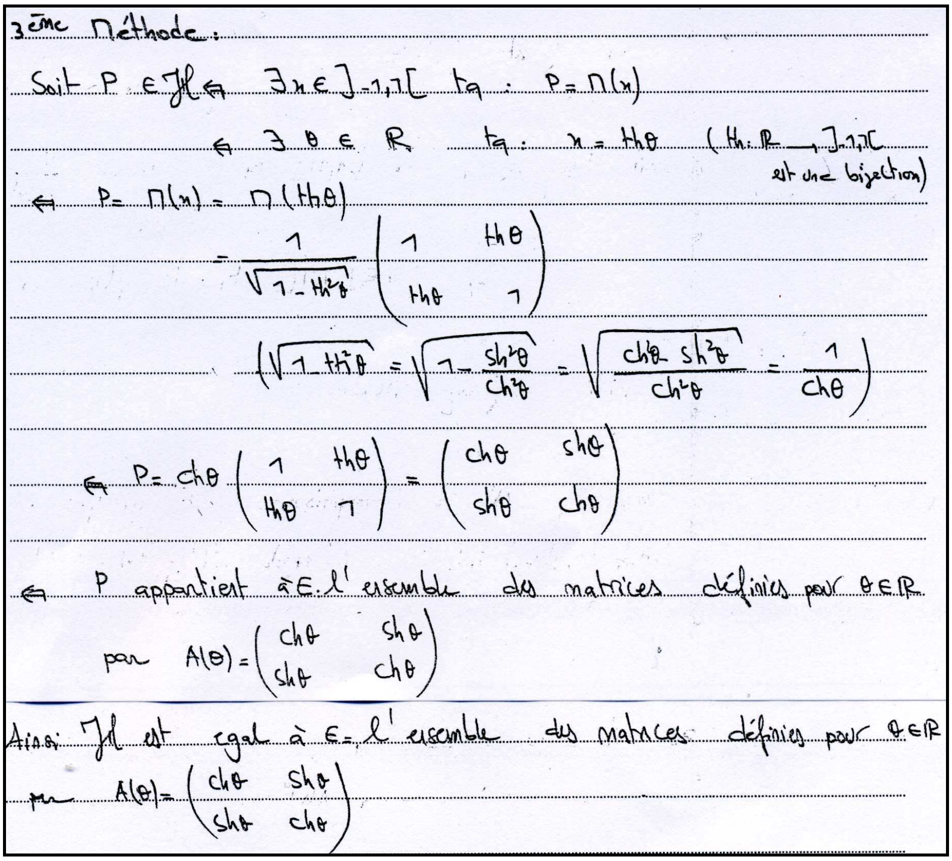
b) Analyse des productions des étudiants

Sur 43 copies, nous comptons 11 réponses correctes de types C+, 24 réponses correctes de types C-, 4 réponses fausses et 4 copies sans réponse.

Réponses correctes de type C+

Dans les 11 réponses de ce type, 4 étudiants ont procédé par équivalence et les 7 autres ont procédé par double inclusion. Nous donnons ci-dessous un exemple de chacune des ces deux techniques de résolution.

Production 55 (Copie 24)



3ème Méthode :

Soit $P \in \mathcal{H} \Leftrightarrow \exists x \in]-1,1[$ tq : $P = M(x)$

$\Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R}$ tq : $x = th\theta$ ($th : \mathbb{R} \to]-1,1[$ est une bijection)

$\Leftrightarrow P = M(x) = M(th\theta)$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-th^2\theta}} \begin{pmatrix} 1 & th\theta \\ th\theta & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\sqrt{1-th^2\theta} = \sqrt{1-\frac{sh^2\theta}{ch^2\theta}} = \sqrt{\frac{ch^2\theta - sh^2\theta}{ch^2\theta}} = \frac{1}{ch\theta}\right)$$

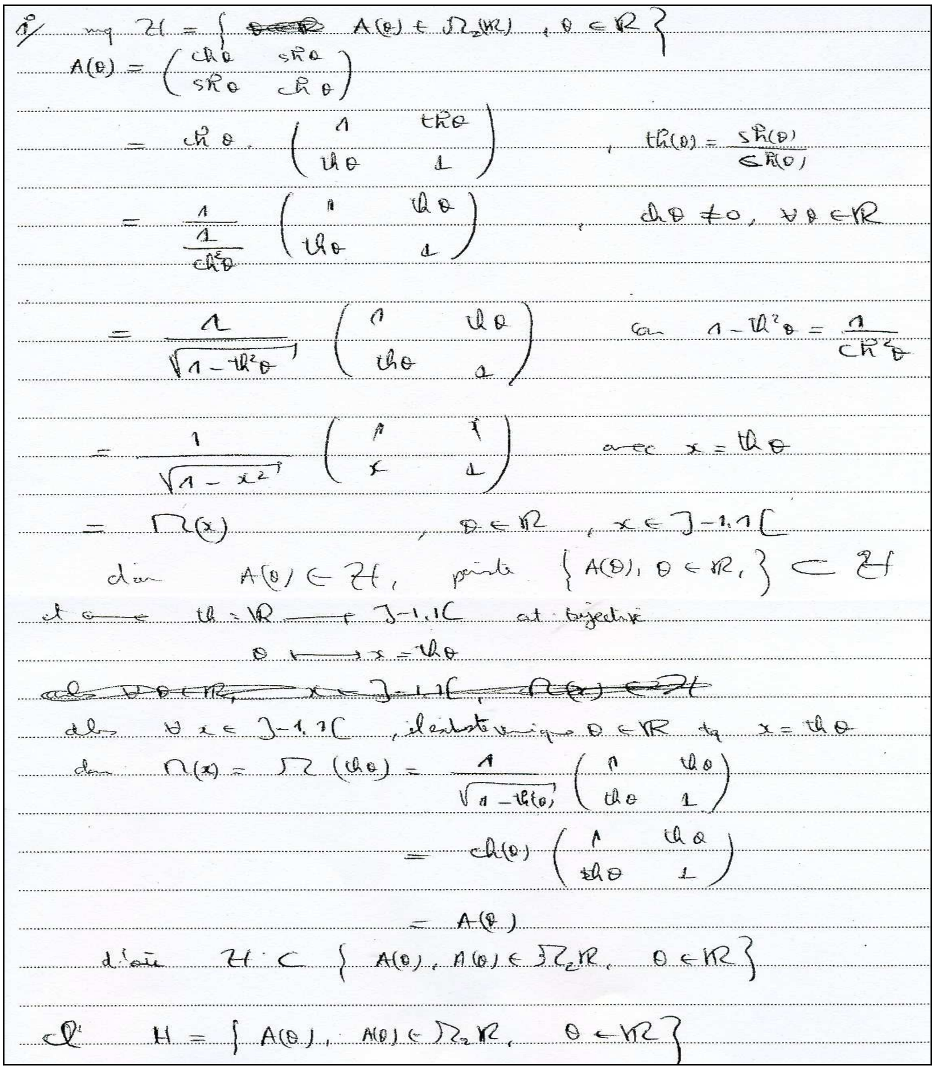
$$\Leftrightarrow P = ch\theta \begin{pmatrix} 1 & th\theta \\ th\theta & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch\theta & sh\theta \\ sh\theta & ch\theta \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow$ P appartient à E : l'ensemble des matrices définies pour $\theta \in \mathbb{R}$ par $A(\theta) = \begin{pmatrix} ch\theta & sh\theta \\ sh\theta & ch\theta \end{pmatrix}$

Ainsi : $\mathcal{H}$ est égal à E = l'ensemble des matrices définies pour $\theta \in \mathbb{R}$ par $A(\theta) = \begin{pmatrix} ch\theta & sh\theta \\ sh\theta & ch\theta \end{pmatrix}$

Ici, l'étudiant procède par équivalence, et utilise la bijectivité lors du passage des paramètres x aux paramètres θ. Nous remarquons toutefois des irrégularités dans l'usage du signe « $\Leftrightarrow$ » et la perte de quantification à la fin de la production.

Production 56 (Copie 29)



i/ mq $\mathcal{H} = \{ \cancel{\theta\in\mathbb{R}}\ A(\theta) \in \Omega_2(\mathbb{R}),\ \theta \in \mathbb{R} \}$

$A(\theta) = \begin{pmatrix} ch\theta & sh\theta \\ sh\theta & ch\theta \end{pmatrix}$

$= ch\theta . \begin{pmatrix} 1 & th\theta \\ th\theta & 1 \end{pmatrix}$, $th(\theta) = \frac{sh(\theta)}{ch(\theta)}$

$= \frac{1}{\frac{1}{ch^2\theta}} \begin{pmatrix} 1 & th\theta \\ th\theta & 1 \end{pmatrix}$, $ch\theta \neq 0,\ \forall\theta \in \mathbb{R}$

$= \frac{1}{\sqrt{1-th^2\theta}} \begin{pmatrix} 1 & th\theta \\ th\theta & 1 \end{pmatrix}$ car $1 - th^2\theta = \frac{1}{ch^2\theta}$

$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix}$ avec $x = th\theta$

$= \Omega(x)$, $\theta \in \mathbb{R}$, $x \in]-1,1[$

donc $A(\theta) \in \mathcal{H}$, par suite $\{A(\theta),\ \theta \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{H}$

et on a $th : \mathbb{R} \longrightarrow]-1,1[$ est bijective
$\theta \longmapsto x = th\theta$

~~d'où $\forall\theta \in \mathbb{R}$, $x \in]-1,1[$, $\Omega(x) \in \mathcal{H}$~~

d'où $\forall x \in]-1,1[$, il existe unique $\theta \in \mathbb{R}$ tq $x = th\theta$

donc $\Omega(x) = \Omega(th\theta) = \frac{1}{\sqrt{1-th(\theta)}} \begin{pmatrix} 1 & th\theta \\ th\theta & 1 \end{pmatrix}$

$= ch(\theta) \begin{pmatrix} 1 & th\theta \\ th\theta & 1 \end{pmatrix}$

$= A(\theta)$

d'où $\mathcal{H} \subset \{A(\theta),\ A(\theta) \in \Omega_2\mathbb{R},\ \theta \in \mathbb{R}\}$

cl: $H = \{A(\theta),\ A(\theta) \in \Omega_2\mathbb{R},\ \theta \in \mathbb{R}\}$

Nous notons dans cette production la précision des justifications et la finesse du raisonnement.

Réponses correctes de type C-

Dans les 24 réponses de ce type, pour montrer l'égalité entre les ensembles $\mathcal{H}$ et $\mathcal{D}$, les étudiants se limitent à prouver l'égalité : $M(x)=M(th\theta)=A(\theta)$. Ils utilisent l'application *th* seulement pour effectuer le changement de variable entre *x* et θ, sans mettre en œuvre la propriété de bijectivité (a part une copie). Dans certaines copies, nous ne rencontrons aucune allusion aux ensembles de variation de *x* et θ. Ci-dessous deux exemples de ces réponses :

Production 57 (Copie 17)

1) Montrons que $\forall M \in H$ et $\forall x \in]-1,1[$?

$M(x) = A(\theta)$ avec $\theta \in \mathbb{R}$.

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} ch\theta & sh\theta \\ sh\theta & ch\theta \end{pmatrix}.$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{sh\theta}{th\theta} & th\theta . ch\theta \\ th\theta . ch\theta & \frac{sh\theta}{th\theta} \end{pmatrix}.$$

$$= \frac{sh\theta}{th\theta} \begin{pmatrix} 1 & th\theta \\ th\theta & 1 \end{pmatrix}.$$

$$= ch\theta \begin{pmatrix} 1 & th\theta \\ th\theta & 1 \end{pmatrix}.$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-th^2\theta}} \begin{pmatrix} 1 & th\theta \\ th\theta & 1 \end{pmatrix} \quad \left(\text{car } \frac{1}{ch^2\theta} = 1 - th^2\theta\right)$$

si $th\theta = x$

donc $A(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix} = M(x)$

d'où le résultat.

Remarquons qu'au départ, l'étudiant ne lie pas la quantification universelle des x dans $]-1,1[$ par une quantification adéquate des θ dans $\mathbf{R}$. La formulation donnée ne traduit pas une correspondance biunivoque entre les éléments de $\mathcal{H}$ et ceux de $\mathcal{D}$. Dans la suite, l'étudiant s'intéresse au calcul algébrique permettant d'établir l'égalité $M(x)=A(\theta)$, de laquelle il déduit le résultat.

Production 58 (Copie 19)

3ème méthode :

$th : \mathbb{R} \longrightarrow]-1,1[$

$\theta \longmapsto x = th\,\theta$

$A = \left\{ A(\theta) \begin{pmatrix} ch\theta & sh\theta \\ sh\theta & ch\theta \end{pmatrix} ; \theta \in \mathbb{R} \right\}$

Mq $\mathcal{H} = A$

Autrement dit mq $M(x) = A(\theta)$.

or $M(x) = M(th(\theta)) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - th^2(\theta)}} \begin{pmatrix} 1 & th\theta \\ th\theta & 1 \end{pmatrix}$

or $1 - th^2\theta = 1 - \dfrac{sh^2\theta}{ch^2\theta} = \dfrac{ch^2\theta - sh^2\theta}{ch^2\theta}$

$\Rightarrow \sqrt{1 - th^2\theta} = \dfrac{1}{ch\,\theta}$ car $ch(\theta) > 0$

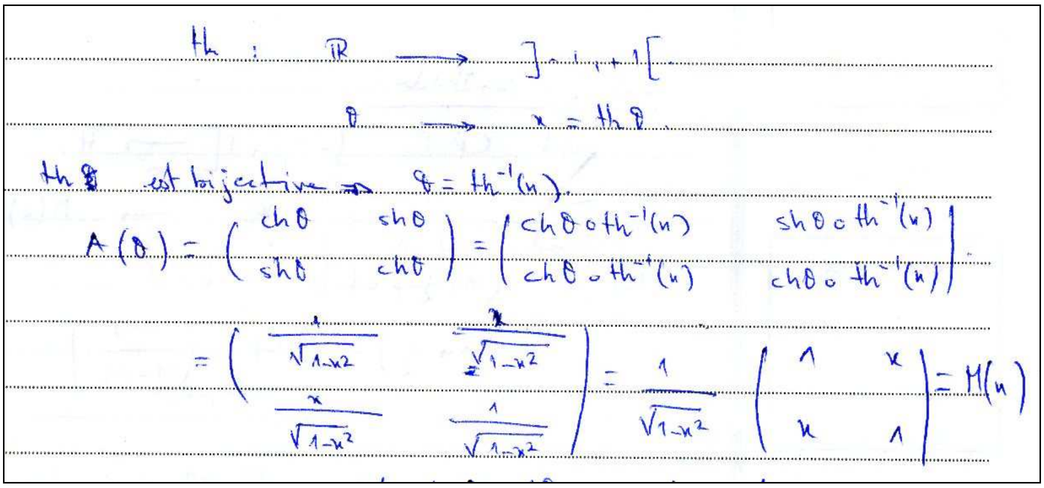
$\Rightarrow M(x) = ch\theta \begin{pmatrix} 1 & \frac{sh(\theta)}{ch(\theta)} \\ \frac{sh(\theta)}{ch(\theta)} & 1 \end{pmatrix}$

$M(x) = \begin{pmatrix} ch(\theta) & sh(\theta) \\ sh(\theta) & ch(\theta) \end{pmatrix} = A(\theta)$

$\Rightarrow A = \mathcal{H}$

Dans cette production, l'étudiant commence par donner une écriture en compréhension de l'ensemble $\mathcal{D}$, qu'il note par A. Il indique ensuite explicitement que montrer que $\mathcal{H}$ =A revient à montrer que *M(x)=A(θ)* et effectue le calcul algébrique le conduisant à établir l'égalité *M(x)=A(θ).* Dans ce calcul, l'étudiant ne fait aucune allusion aux ensembles de variation de *x* et *θ*.

Production 59 (Copie 9)



$th : \mathbb{R} \longrightarrow]-1,+1[$

$\theta \longrightarrow x = th\,\theta$

$th\,\theta$ est bijective $\Rightarrow$ $\theta = th^{-1}(x)$.

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} ch\theta & sh\theta \\ sh\theta & ch\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch\theta \circ th^{-1}(x) & sh\theta \circ th^{-1}(x) \\ ch\theta \circ th^{-1}(x) & ch\theta \circ th^{-1}(x) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \\ \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix} = M(x)$$

Dans cette réponse, l'étudiant passe du paramètre θ à *x*, au moyen de la bijection réciproque th^{-1}, il effectue une erreur dans l'écriture de la composée, en gardant la variable θ, et ne justifie pas le calcul le conduisant à la matrice *M(x)*.

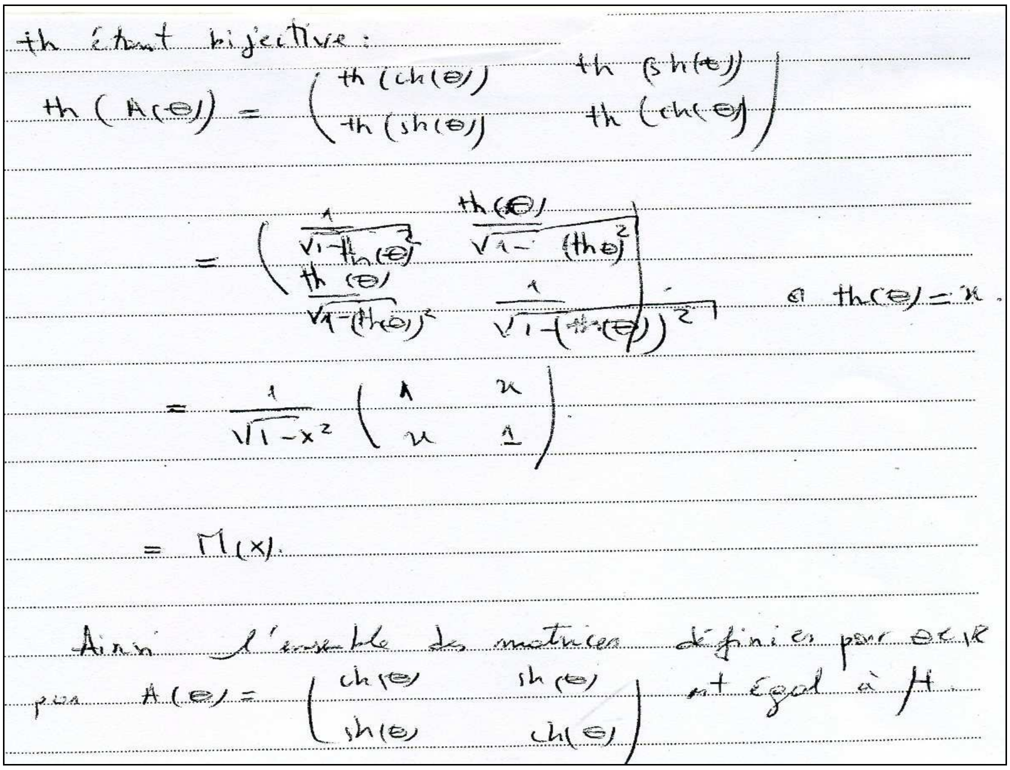
Les formules : $choth^{-1}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $shoth^{-1}(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$,

si elles sont correctes, elles ne sont pas considérées comme des formules usuelles, et méritent d'être justifiées. Il semble que l'étudiant a anticipé sur le résultat (qui est connu) sans faire le détail du calcul.

Réponses fausses

Pour les 4 réponses fausses, les erreurs sont dues à un usage erroné des données de l'exercice, à des formules non correctes sur les fonctions hyperboliques ou à des solutions incomplètes. Ci-dessous deux exemples de ces réponses :

Production 60 (Copie 5)



th étant bijective :

$$th(A(\theta)) = \begin{pmatrix} th(ch(\theta)) & th(sh(\theta)) \\ th(sh(\theta)) & th(ch(\theta)) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-th(\theta)^2}} & \frac{th(\theta)}{\sqrt{1-(th\theta)^2}} \\ \frac{th(\theta)}{\sqrt{1-(th(\theta))^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-(th(\theta))^2}} \end{pmatrix} \quad \theta \; th(\theta) = x.$$

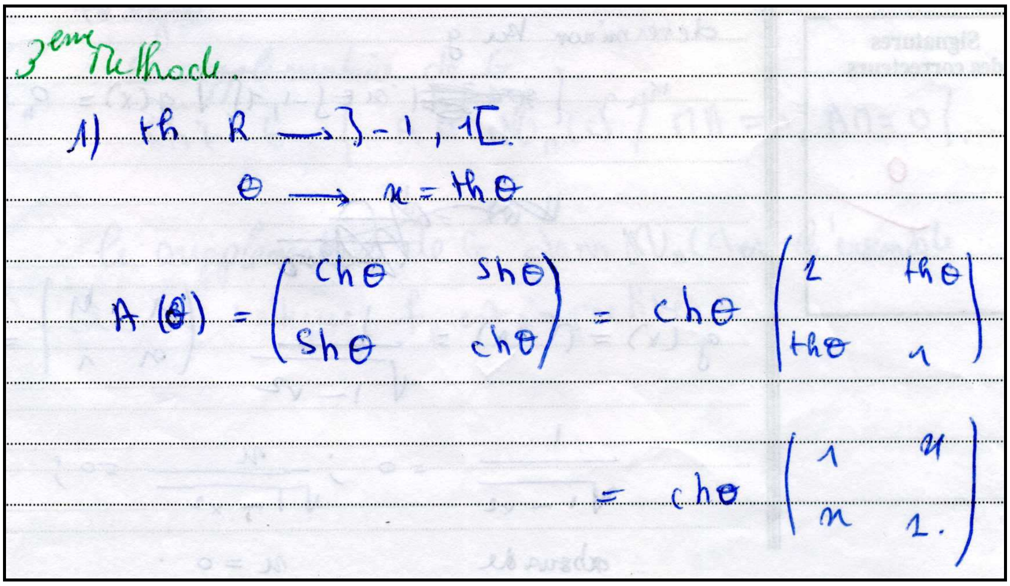
$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix}.$$

$$= M(x).$$

Ainsi l'ensemble des matrices définies pour $\theta \in \mathbb{R}$ par $A(\theta) = \begin{pmatrix} ch(\theta) & sh(\theta) \\ sh(\theta) & ch(\theta) \end{pmatrix}$ est égal à H.

Dans la deuxième ligne, l'étudiant fait un usage erroné des objets sémiotiques mis en jeu. Il semble vouloir exprimer son intention à formuler la matrice $A(\theta)$ à l'aide de *th*, ce qui pourrait expliquer la matrice écrite dans la troisième ligne. Nous ne voyons pas par ailleurs à quoi la propriété de bijectivité mentionnée au début lui était utile dans son travail.

Production 61 (Copie 8)



3ème Méthode

1) $th \; \mathbb{R} \longrightarrow]-1, 1[$

$\theta \longrightarrow x = th\theta$

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} ch\theta & sh\theta \\ sh\theta & ch\theta \end{pmatrix} = ch\theta \begin{pmatrix} 1 & th\theta \\ th\theta & 1 \end{pmatrix}$$

$$= ch\theta \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1. \end{pmatrix}$$

Le travail de l'étudiant ici se limite à l'introduction de *x* dans l'écriture de $A(\theta)$, mais il n'arrive pas à se débarrasser complètement de θ dans cette écriture. Sa solution reste inachevée.

Commentaire pour la question 1 (3ème méthode)

Le tableau suivant récapitule la répartition des réponses des étudiants à cette question :

Tableau 31 : Répartition des réponses des étudiants à la question 1 (3ème méthode)

Réponses C+	Réponses C-	Réponses F	Copies SR
26 %	56 %	9 %	9 %

Pour cette question, sur les 11 réponses correctes de type C+, 7 étudiants ont donné des réponses de même type dans la première et/ou la deuxième question de la partie B et les réponses des quatre autres étaient de type C-. La majorité des solutions à cette question reste de type C-, mettant en évidence des aptitudes à utiliser les formules de cours, à effectuer des calculs, à procéder à des transformations paramétriques…Mais, en même temps, des difficultés (ou une négligence) quant à la mise en œuvre des technologies nécessaires pour justifier les techniques utilisées et/ou les rendant intelligible. Les connaissances mobilisées pour cette tâche, sont, pour la plupart des étudiants, axées sur le bloc pratico-technique. Le bloc technologico-théorique est resté inopérant dans le travail de ces étudiants.

Question 2. (Tâche T_{10})

2) Montrer que pour θ et φ dans **R**, *on a : $A(\theta+\varphi)=A(\theta)A(\varphi)$.*

a) Analyse a priori

Cette question consiste à établir l'égalité : $A(\theta+\varphi)=A(\theta)A(\varphi)$, pour θ et φ dans **R**. Pour ce faire, deux techniques sont possibles :

Technique 1 : on utilise les formules de développement de $ch(\theta+\varphi)$ et $sh(\theta+\varphi)$. L'égalité sera alors établie, en partant de l'un des deux membres pour arriver au deuxième.

Technique 2 : On utilise le développement de $th(\theta+\varphi)$, la formule $M(x)M(y)=M(\frac{x+y}{1+xy})$, donnée dans la question 3 de la partie A (1ère méthode) et on effectue le passage des matrice *M* aux matrices *A*.

Dans les deux cas, il s'agit d'effectuer un calcul standard, supposé familier pour les étudiants. Nous considérons pour cela que la tâche est de niveau technique.

b) Analyse des productions des étudiants

Sur 43 copies, il y a 39 réponses correctes de type C+, et 4 copies sans réponse. Les 4 étudiants qui n'ont pas donné de réponse à cette question, n'ont pas aussi répondu à la question suivante. Ils n'ont, peut être, pas eu le temps de terminer le test.

Réponses correctes de type C+

Dans ce type de réponses, nous rencontrons les deux techniques de résolution données dans l’analyse a priori. Toutefois, c’est la technique 1 qui est la plus utilisée. Seulement 3 étudiants ont utilisée la technique 2. Pour la technique 1, nous trouvons parfois des étudiants qui n’utilisent pas les formules de $ch(\theta+\varphi)$ et $sh(\theta+\varphi)$ de façon directe, mais introduisent d’autres formulent intermédiaires, ce qui les engage dans des calculs plus ou moins longs. Ci-dessous, des exemples des différents types de réponses données.

Production 62 (Copie 13)

2) Mq $\forall(\theta,\varphi)\in\mathbb{R}^2$, $A(\theta+\varphi)=A(\theta)A(\varphi)$

$$A(\theta+\varphi)=\begin{pmatrix} ch(\theta+\varphi) & sh(\theta+\varphi) \\ sh(\theta+\varphi) & ch(\theta+\varphi)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} ch\theta ch\varphi + sh\theta sh\varphi & sh\theta ch\varphi + ch\theta sh\varphi \\ sh\theta ch\varphi + ch\theta sh\varphi & ch\theta ch\varphi + sh\theta sh\varphi\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} ch\theta & sh\theta \\ sh\theta & ch\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix} ch\varphi & sh\varphi \\ sh\varphi & ch\varphi\end{pmatrix}=A(\theta)A(\varphi)$$

Dans les réponses de ce type, les étudiants partent du premier membre pour arriver au deuxième membre.

Production 63 (Copie 42)

$\forall(\varphi,\theta)\in\mathbb{R}$ on a

$$A(\theta).A(\varphi)=\begin{pmatrix} ch\theta & sh\theta \\ sh\theta & ch\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix} ch\varphi & sh\varphi \\ sh\varphi & ch\varphi\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} ch\theta ch\varphi + sh\theta sh\varphi & ch\theta sh\varphi + sh\theta ch\varphi \\ sh\theta ch\varphi + ch\theta sh\varphi & sh\theta sh\varphi + ch\theta ch\varphi\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} ch(\theta+\varphi) & sh(\theta+\varphi) \\ sh(\theta+\varphi) & ch(\theta+\varphi)\end{pmatrix}$$

$$=A(\theta+\varphi) \qquad \forall(\varphi,\theta)\in\mathbb{R}^2$$

Dans les réponses de ce type, les étudiants partent de $A(\theta)A(\varphi)$, effectuent le produit matriciel et trouvent $A(\theta+\varphi)$.

Production 64 (Copie 5)

2) M.que $\forall (\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2$ on a $A(\theta + \varphi) = A(\theta) . A(\varphi)$

on pose $x = \text{th}\,\theta$ et $y = \text{th}\,\varphi$.

on a $\text{th}(\theta + \varphi) = \dfrac{\text{th}\,\theta + \text{th}\,\varphi}{1 + \text{th}\theta . \text{th}\,\varphi} = \dfrac{x + y}{1 + xy}$

d'après la prim 1ère méthode on a prouvé que

$$M(x) . M(y) = M\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$$

Par $M(\text{th}\,\theta) . M(\text{th}\,\varphi) = M(\text{th}(\theta + \varphi))$

Par suite $A(\theta) . A(\varphi) = A(\theta + \varphi)$.

Production 65 (Copie 18)

2°) $\forall\ \theta, \varphi$ de $\mathbb{R}$; $A(\theta+\varphi) = A(\theta)\cdot A(\varphi)$?

soit $\varphi \in \mathbb{R}$ / $th\varphi = y$:

$$A(\theta+\varphi) = \begin{pmatrix} ch(\theta+\varphi) & sh(\theta+\varphi) \\ sh(\theta+\varphi) & ch(\theta+\varphi) \end{pmatrix}$$

$$= ch(\theta+\varphi)\begin{pmatrix} 1 & th(\theta+\varphi) \\ th(\theta+\varphi) & 1 \end{pmatrix}.$$

or $th(\theta+\varphi) = \dfrac{th\theta + th\varphi}{1+th\theta\, th\varphi} = \dfrac{x+y}{1+xy}$

et $ch(\theta+\varphi) = \dfrac{1}{\sqrt{1-th^2(\theta+\varphi)}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{(1-x^2)(1-y^2)}{(1+xy)^2}}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{(1-th^2\theta)(1-th^2\varphi)}{(1+th\theta\, th\varphi)^2}}}$$

or $\left|\begin{array}{l} -1 < th\theta < 1 \\ -1 < th\varphi < 1 \Rightarrow \\ th\theta\, th\varphi < 1. \\ \Rightarrow\ th\theta\, th\varphi + 1 > 0 \end{array}\right.$

On aura :

$$A(\theta+\varphi) = \frac{(1+th\theta\, th\varphi)}{\sqrt{(1-th^2\theta)(1-th^2\theta)}}\begin{pmatrix} 1 & \frac{th\theta+th\varphi}{1+th\theta\, th\varphi} \\ \frac{th\theta+th\varphi}{1+th\theta\, th\varphi} & 1 \end{pmatrix}.$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-th^2\theta}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-th^2\varphi}}\underbrace{\begin{pmatrix} 1+th\theta\, th\varphi & th\theta+th\varphi \\ th\theta+th\varphi & 1+th\theta\, th\varphi \end{pmatrix}}_{B}$$

or B peut s'écrire comme produit de deux matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & th\theta \\ th\theta & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & th\varphi \\ th\varphi & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+th\theta\, th\varphi & th\theta+th\varphi \\ th\theta+th\varphi & 1+th\theta\, th\varphi \end{pmatrix}$$

D'où

$$A(\theta+\varphi) = \frac{1}{\sqrt{1-th^2\theta}}\begin{pmatrix} 1 & th\theta \\ th\theta & 1 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-th^2\varphi}}\begin{pmatrix} 1 & th\varphi \\ th\varphi & 1 \end{pmatrix}.$$

$$= ch\theta\begin{pmatrix} 1 & th\theta \\ th\theta & 1 \end{pmatrix}\cdot ch\varphi\begin{pmatrix} 1 & th\varphi \\ th\varphi & 1 \end{pmatrix}.$$

$$= \begin{pmatrix} ch\theta & sh\theta \\ sh\theta & ch\theta \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} ch\varphi & sh\varphi \\ sh\varphi & ch\varphi \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A(\theta+\varphi) = A(\theta)\cdot A(\varphi)}$$

Dans cette copie, l'étudiant exprime $ch(\theta+\varphi)$ en fonction de $th(\theta+\varphi)$, ce qui l'engage dans un calcul assez long. Il réussit tout de même à terminer son calcul et à apporter les justifications que requiert ce calcul.

Commentaire pour la question 2 (3ème méthode)

Le tableau suivant récapitule la répartition des réponses des étudiants à cette question :

Tableau 32 : Répartition des réponses des étudiants à la question 2 (3ème méthode)

Réponses C+	Réponses C-	Réponses F	Copies SR
91 %	**0 %**	**0 %**	**9 %**

Tous les étudiants qui ont traité cette question ont réalisé la tâche convenablement. Bien que certains n'ont pas eu l'idée d'adopter une technique optimale, mettant en œuvre un minimum de calcul. Dans tous les cas, la tâche montre des aptitudes chez la majorité des étudiants dans la réalisation des tâches d'ordre technique.

Question 3. (Tâche T_8)

3) Déduire des questions précédentes que $(\mathcal{H},\times)$ est un groupe isomorphe au groupe $(\mathbf{R},+)$.

a) Analyse a priori

Cette question demande de déduire, des résultats établis antérieurement, que $(\mathcal{H},\times)$ est un groupe, isomorphe au groupe $(\mathbf{R},+)$. La tâche est composée de deux sous-tâches :

t_1 : montrer que $(\mathcal{H},\times)$ est un groupe,

t_2 : montrer que les groupes $(\mathcal{H},\times)$ et $(\mathbf{R},+)$ sont isomorphes.

La réponse attendue est celle qui met en œuvre le théorème sur le transfert des structures pour transporter la structure de groupe de $(\mathbf{R},+)$ vers $(\mathcal{H},\times)$ et réaliser ainsi les deux sous-tâches simultanément. Certains étudiants peuvent cependant réaliser chacune des sous-tâches de façon indépendante. Nous donnons des techniques de résolution pour chacune des deux stratégies de travail.

Stratégie 1 : cette stratégie comprend deux pas de raisonnement :

- Déterminer l'application qui va réaliser l'isomorphisme entre $(\mathbf{R},+)$ et $(\mathcal{H},\times)$.
- Montrer que $(\mathcal{H},\times)$ est un groupe, isomorphe au groupe $(\mathbf{R},+)$.

Concernant le premier pas, les résultats établis dans les questions 1 et 2 suggèrent d'utiliser la composée des applications *th* et *g* (introduite dans la méthode 2) selon le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{R} & \xrightarrow{\ th\ } &]-1,+1[& \xrightarrow{\ g\ } & \mathcal{H} \\ \theta & \longrightarrow & x = th\,\theta & \longrightarrow & M(x) = M(th\,\theta) = A(\theta) \end{array}$$

Cette construction est rendue possible grâce à l'identification, dans la question 1, des ensembles $\mathcal{H}$ et $\mathcal{D}$.

Pour le deuxième pas de raisonnement, on montre que l'application $f = goth$ ainsi construite est un isomorphisme de (**R**,+) sur ($\mathcal{H}$,$\times$). Le théorème sur le transfert des structures permet alors de conclure.

Pour obtenir que $f = goth$ est un isomorphisme entre (**R**,+) et ($\mathcal{H}$,$\times$) :

- la question (2) prouve que l'application $f = goth$ est un morphisme pour les lois de (**R**,+) et ($\mathcal{H}$,$\times$).

- la bijectivité de *f* , peut être justifiée, par le fait que *f* est composée de deux bijections. (La bijectivité de *th* est un résultat établi dans le cours d'analyse et celle de *g* est établie dans la méthode 2). Il est possible aussi de redémontrer, via la définition, que *g* est bijective.

Stratégie 2 : cette stratégie comprend aussi deux pas de raisonnement :

- Montrer que ($\mathcal{H}$,$\times$) est un groupe, en vérifiant les axiomes du groupe.
- Construire un isomorphisme entre les groupes (**R**,+) et ($\mathcal{H}$,$\times$).

Pour l'isomorphisme, il s'agit de réaliser un travail analogue à celui de la stratégie 1 avec la même application $f = goth$.

Pour réaliser cette tâche, l'étudiant est autonome : il doit choisir une stratégie de travail, identifier les tâches à accomplir, choisir les techniques de réalisation de ces tâches et mobiliser les données et connaissances nécessaires pour exécuter la stratégie. La question requiert une bonne appropriation des données de l'exercice, une possibilité de les mettre en relation et une disponibilité de connaissances. Pour ces raisons, nous considérons que la tâche est de niveau disponible.

b) Analyse des productions des étudiants

Pour cette question, sur 43 copies, nous dénombrons : 8 réponses correctes C+, 7 réponses correctes C-, 20 réponses fausses et 8 copies sans réponses. Nous ne rencontrons pas dans les réponses données (toutes catégories comprises) des étudiants qui ont utilisé les axiomes de groupe pour montrer que ($\mathcal{H}$,$\times$) est un groupe. Tous les étudiants se sont intéressés de l'isomorphisme entre (**R**,+) et ($\mathcal{H}$,$\times$). Certains d'entre eux sont arrivés à en déduire que ($\mathcal{H}$,$\times$) est un groupe et d'autres ont admis ce résultat et se sont limités à montrer que les deux groupes sont isomorphes. Nous présentons ci-dessous chacune de ces types de réponses.

Réponses correctes de type C+

Dans ce type de réponses, les étudiants construisent convenablement l'application entre (**R**,+) et ($\mathcal{H}$,$\times$) en effectuant la composition entre *th* et *g* (comme dans l'analyse a priori), justifient que cette application est un isomorphisme et donnent la conclusion. Les rédactions sont parfois détaillées et parfois un peu succinctes mais précises. Nous rencontrons dans certaines copies de légères imprécisions au niveau de la rédaction, qui, à notre avis, ne modifient altèrent pas la pertinence des réponses données. Ci-dessous, des exemples de ces réponses :

Production 66 (Copie 23)

soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow H$

$\theta \longrightarrow A(\theta)$

$g = \varphi \circ th$

avec $\varphi :]-1,+1[\longrightarrow H$

$x \longrightarrow M(x)$;

comme φ est bijective d'apre methode 2

et th est bijective aussi

donc g est la compose de 2 application bijective $\Rightarrow$ g est bijective (2)

or d'apre la question 2)

$A(\theta+\varphi) = A(\theta)\cdot A(\varphi) \quad \forall (\theta,\varphi) \in R^2$

$\Rightarrow g(\theta+\varphi) = g(\theta)\cdot g(\varphi)$

$\Rightarrow$ g est un morphisme de $(R,+) \longrightarrow (H,\times)$ (1)

(1) et (2) $\Rightarrow$ $(H,\times)$ est un groupe isomorphe au groupe $(R;+)$

$\Rightarrow$ $(H,\times)$ groupe abélien ($(R;+)$ groupe ablien)

La réponse ici est bien détaillée et convenablement justifié. Remarquons que l'étudiant utilise parfois le signe « $\Rightarrow$ » dans le sens de donc.

Production 67 (Copie 22)

3) Soit l'application $g : (\mathbb{R},+) \longrightarrow (\mathcal{H},\times)$

$\theta \longmapsto A(\theta)$

On peut décomposer g de la manière suivante :

$g = \cancel{Th}\ f \circ Th$ avec f : l'application définie dans la $2^{ème}$ méthode : $]-1,1[\longrightarrow \mathcal{H}$

$x \longmapsto M(x)$

On sait que la composée de deux applications bijectives est bijective

et puisque Th réalise une bijection de $]-1,1[$ ~~dans~~ $\mathbb{R}$

et f réalise une bijection de $\mathcal{H}$ dans $]-1,1[$

donc g réalise une bijection de $\mathcal{H}$ dans $\mathbb{R}$

d'autre part, on a $g(0) = A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$

et $\forall (\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^2$, $g(\theta+\varphi) = A(\theta+\varphi) = A(\theta).A(\varphi)$ (d'après (2))

donc g est un isomorphisme de groupes

donc $(\mathcal{H},\times)$ est un groupe isomorphe au groupe $(\mathbb{R},+)$

et puisque $(\mathbb{R},+)$ est un groupe ~~com~~ abélien

donc $(\mathcal{H},\times)$ est un groupe abélien.

Cette réponse est aussi bien détaillée et convenablement justifiée. Toutefois, la condition $g(0)=I_2$ est inutile pour prouver *g* est un morphisme. Aussi, il ne faut préciser que *g* est un isomorphisme de groupes, qu'après avoir justifié que $(\mathcal{H},\times)$ est un groupe. Sans quoi, g est un isomorphisme pour les lois de $(\mathcal{H},\times)$ et $(\mathbf{R}, +)$.

Production 68 (Copie 34)

3) on considère l'application bijective $(H \circ th)$ alors :

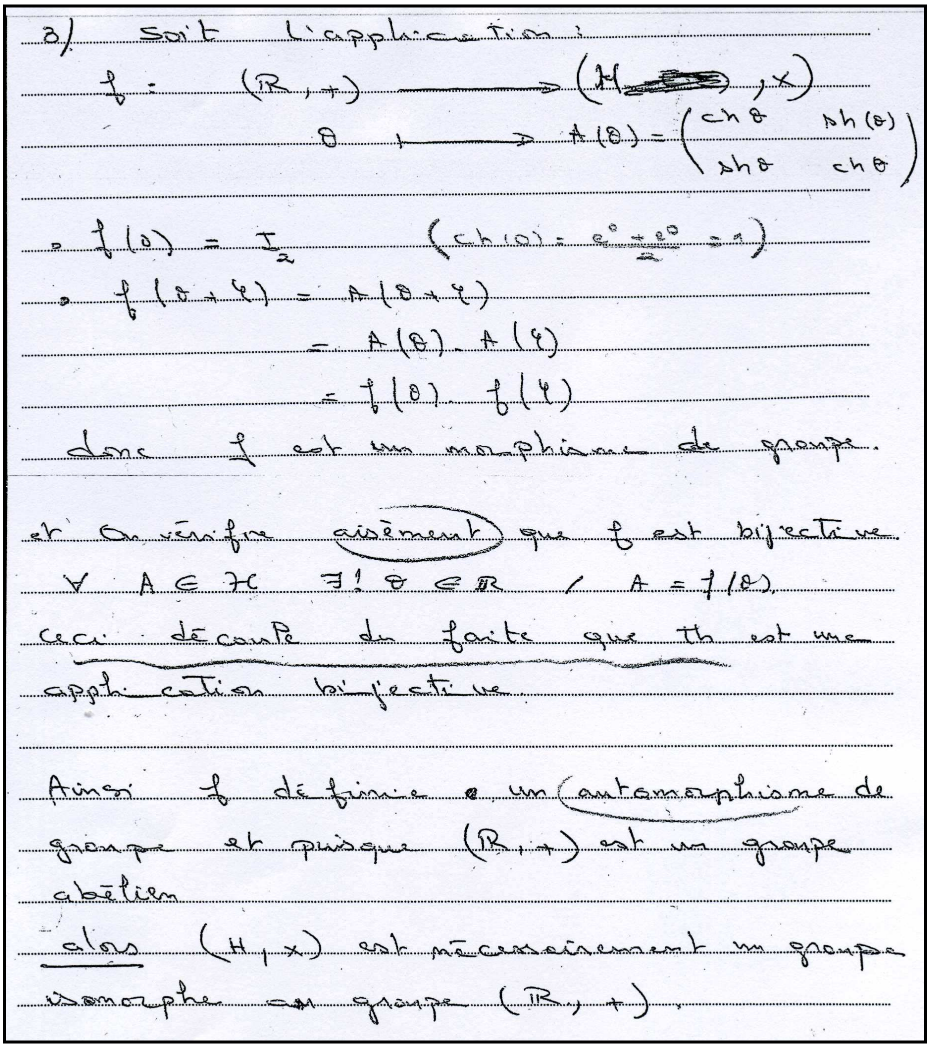
$(H \circ th)$ est un isomorphisme entre $(\mathbb{R},+)$ et le magma $(\mathcal{H},\times)$ donc d'après le théorème du transfert de la structure de groupe, on en déduit que $((\mathcal{H}),\times)$ est un groupe isomorphe au groupe $(\mathbb{R},+)$.

Cette réponse, bien qu'elle soit succincte, elle est complète et précise.

Réponses correctes de type C-

Ces réponses sont caractérisées par la présence de beaucoup d'implicites. Notamment dans la justification de la bijectivité de l'application entre ($\mathbf{R}$,+) et ($\mathcal{H}$,×). La composée *goth* est souvent omise. Nous donnons deux exemples de ces réponses :

Production 69 (Copie 38)



3) Soit l'application :

$f : (\mathbb{R},+) \longrightarrow (\mathcal{H},\times)$

$\theta \longmapsto A(\theta) = \begin{pmatrix} ch\theta & sh(\theta) \\ sh\theta & ch\theta \end{pmatrix}$

• $f(0) = I_2$ $\quad (ch(0) = \frac{e^0+e^0}{2} = 1)$

• $f(\theta+\varphi) = A(\theta+\varphi)$

$= A(\theta).A(\varphi)$

$= f(\theta).f(\varphi)$

donc f est un morphisme de groupe.

et on vérifie aisément que f est bijective

$\forall A \in \mathcal{H} \quad \exists!\, \theta \in \mathbb{R} \;/\; A = f(\theta)$.

ceci découle du fait que th est une application bijective

Ainsi f définie un automorphisme de groupe et puisque $(\mathbb{R},+)$ est un groupe abélien

alors $(H,\times)$ est nécessairement un groupe isomorphe au groupe $(\mathbb{R},+)$.

Dans cette réponse, l'étudiant ajoute, inutilement, la condition $f(0)=I_2$ pour un morphisme. Il formule la condition de bijectivité pour f et la justifie en indiquant que « *ceci découle du fait que th est bijective* » mais n'indique pas où intervient l'application *th* dans la définition de *f*. Il qualifie à la fin f d'automorphisme, ce qui ne correspond pas au cas de *f*.

Production 70 (Copie 33)

d'après 3em Methode $f :]-1, 1[\to H$ est bijective
$x \mapsto M(x)$

$\Rightarrow \forall M \in H \; \exists! \, x \in]-1,1[$ tq $f(x) = M \Rightarrow \forall A \in H \; \exists! \, \theta \in \mathbb{R}$ tq $A(\theta) = A$

donc l'application $g : (\mathbb{R},+) \to (H,\times)$
$\theta \mapsto A(\theta)$

est bijective

et d'après le question précedent on a $A(\theta+\theta') = A\theta \cdot A\theta'$

g est un homomorphisme ~~de groupe~~ de magmes

et puisque $(\mathbb{R},+)$ est un groupe abelien

donc $(H,\times)$ est un groupe isomorphe à $(\mathbb{R},+)$

donc $(H,\times)$ est un groupe abelien

Dans cette réponse, le lien entre les applications *f* et *g* est implicite. L'étudiant mobilise l'égalité entre les deux ensembles de matrices (établie dans la question 1) pour justifier que *g* est bijective. Il applique convenablement le théorème de transfert.

Production 71 (Copie 9)

3° – Soit $\varphi : \mathbb{R} \to H$.
$\theta \mapsto A(\theta)$.

$\varphi(\theta + \varphi) = A(\theta + \varphi)$.
$= A(\theta) \times A(\varphi) = \varphi(\theta) \times \varphi(\varphi)$.

$\Rightarrow \varphi$ est un morphisme

comme φ est bijective. ?

$\Rightarrow \varphi$ est un isomorphisme

d'après la propriété de transfert de structure ~~et~~ et comme on $(\mathbb{R},+)$ un groupe alors $(A,\times)$ est un groupe comme $A = H$ alors $(H,\times)$ est un groupe.

Dans cette réponse la propriété de bijectivité n'est pas justifiée.

Production 72 (Copie 5)

on a th : est une application bijective sur $\mathbb{R}$

Mq th est un morphisme :

$th(0_{\mathbb{R}}) = 0_{\mathbb{R}} = 0_{]-1,1[}$

$$th(x+y) = \frac{th(x)+th(y)}{1+th(x).th(y)} = th(x) * th(y)$$

Ainsi $(]-1,1[, +)$ est isomorphe au groupe abélien $(\mathbb{R}, +)$.

or d'après $2^{ème}$ Méthode H est isomorphe au groupe $(]-1,1[, *)$.

Ainsi $(H, \times)$ est isomorphe au groupe $(\mathbb{R}, +)$

L'étudiant ici utilise la transitivité de la relation d'isomorphie entre les groupes pour répondre à la question. Pour montrer que *th* est un isomorphisme entre (]-1,1[,$*$) et (**R**, +), il ajoute, inutilement, que *th(0)=0* et oubli de préciser que *th* est bijective. Nous n'avons pas prévu cette stratégie dans l'analyse a priori, car nous nous sommes conformés à l'objectif de l'exercice qui vise de traiter les trois méthodes de façon indépendantes.

Réponses fausses

Dans toutes les réponses fausses, les étudiants commencent une stratégie de résolution correcte. Nous rencontrons cependant des erreurs dans la justification de la propriété de bijectivité, des contradictions dans les productions fournies et parfois des connaissances erronées. Nous donnons dans les exemples suivants les différents types d''erreurs rencontrées.

Production 73 (Copie 17)

soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow H$

$\theta \longmapsto M(\text{th}\,\theta) = A(\theta)$.

on a prouvé que $M(x)$ est inversible, $\forall x \in]-1, 1[$.

de plus $\forall \theta \in \mathbb{R}$ on a $A(\theta) = M(x)$.

Par suite $f(\theta)$ est inversible d'où f est bijective.

Montrons que $f : (\mathbb{R}, +) \longrightarrow (H, \times)$

$\theta \longmapsto A(\theta)$.

est un morphisme.

$f(\theta + \varphi) = A(\theta + \varphi)$

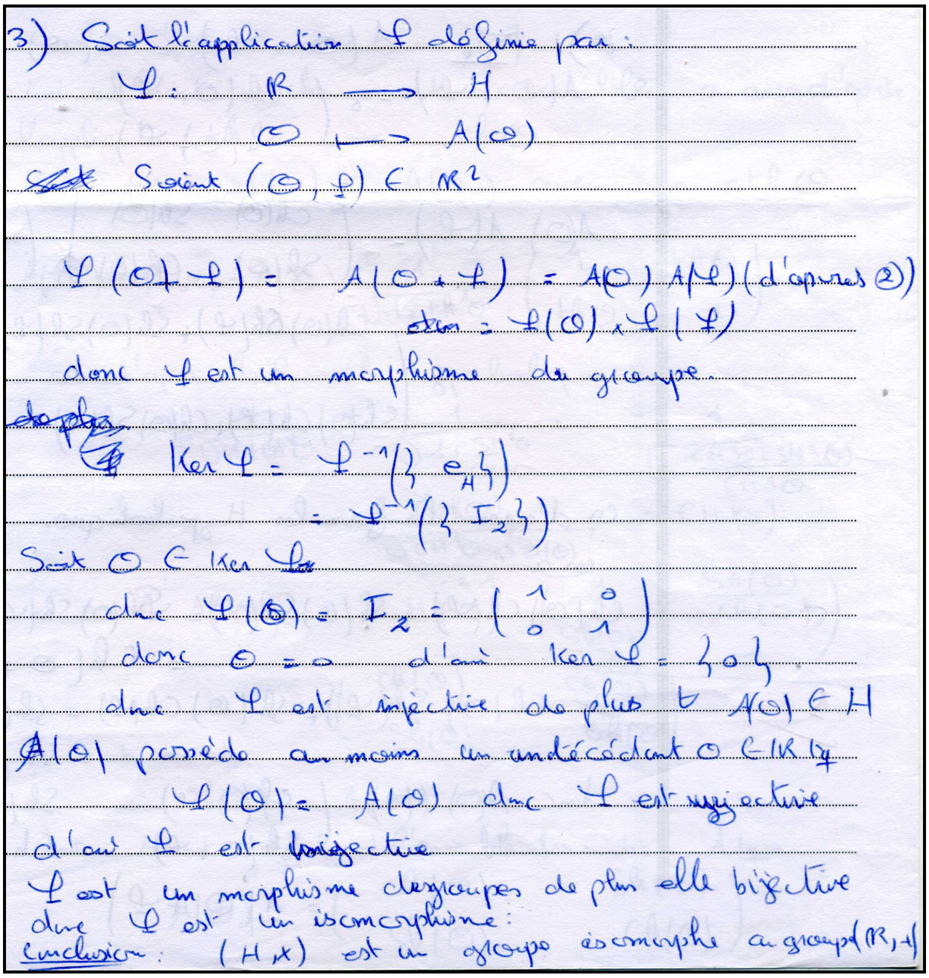
$= A(\theta) . A(\varphi)$

donc f est un morphisme de groupes.

CL : f est un isomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(H, \times)$

Ici, l'étudiant lie la bijectivité de f à l'inversibilité de la matrice $A(\theta)$, ce qui sous-entend qu'il considère $A(\theta)$ comme une matrice de f. Notons que l'étudiant a procédé de la même manière, dans la partie B de l'exercice, pour justifier que l'application $x \mapsto M(x)$ est bijective. Nous remarquons aussi que l'étudiant ne fait aucune allusion à la structure de groupe pour $(\mathcal{H}, \times)$.

Production 74 (Copie 4)


3) Soit l'application φ définie par :

$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow H$

$\theta \longmapsto A(\theta)$

Soient $(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2$

$\varphi(\theta + \varphi) = A(\theta + \varphi) = A(\theta)\, A(\varphi)$ (d'après ②)

donc $= \varphi(\theta) \times \varphi(\varphi)$

donc φ est un morphisme de groupe.

~~de plus~~

$\operatorname{Ker} \varphi = \varphi^{-1}(\{e_H\})$

$= \varphi^{-1}(\{I_2\})$

Soit $\theta \in \operatorname{Ker} \varphi$

donc $\varphi(\theta) = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

donc $\theta = 0$ d'où $\operatorname{ker} \varphi = \{0\}$

donc φ est injective de plus $\forall A(\theta) \in H$

$A(\theta)$ possède au moins un antécédent $\theta \in \mathbb{R}$ tq

$\varphi(\theta) = A(\theta)$ donc φ est surjective

d'où φ est bijective

φ est un morphisme de groupes de plus elle bijective

donc φ est un isomorphisme :

Conclusion : $(H, \times)$ est un groupe isomorphe au groupe $(\mathbb{R}, +)$

Dans cette réponse, l'étudiant utilise la caractérisation de l'injection entre deux groupes pour montrer que φ est injectif, ce qui suppose que $(\mathcal{H}, \times)$ est un groupe. Or, ceci est l'un des objectifs visés par la tâche. L'étudiant a fait la même erreur dans la partie B de l'exercice. Il justifie après correctement que φ est surjective. Nous comprenons de sa conclusion qu'il s'intéresse seulement de l'isomorphisme entre (**R**,+) et $(\mathcal{H}, \times)$.

Production 75 (Copie 31)

$\cancel{\varphi : A(\theta) \longrightarrow \mathbb{R}_+}$ $\varphi : (\mathbb{R},+) \longrightarrow (A(\theta),\cdot)$

Soit $(\theta_1,\theta_2) \in \mathbb{R}^2$

$\varphi(\theta_1+\theta_2) = A(\theta_1+\theta_2)$ (d'apres 2°)

$= A(\theta_1)\cdot A(\theta_2) = \varphi(\theta_1)\cdot\varphi(\theta_2)$

Ainsi on vient de demontrer que φ est un morphisme de groupe, il nous reste à verifier que φ est bijective.

Montrons que φ est injective?

Soit $\theta \in \operatorname{Ker}\varphi \Leftrightarrow \varphi(\theta) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$

$A(\theta) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$

$$\begin{pmatrix} ch\theta & sh(\theta) \\ sh\theta & ch(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \theta = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$$?

donc φ est injective or comme $\dim(A(\theta)) = \dim(H)$ est finie donc φ est bijective ??

d'où φ est un isomorphisme de groupe alors $(H,\times)$ est un groupe isomorphe au groupe $(\mathbb{R},+)$.

Comme dans la copie précédente, l'étudiant justifie que φ est injective en supposant que l'ensemble des matrices $A(\theta)$ est un groupe. Il désigne cet ensemble par la même notation que les matrices qui le composent et donne une écriture fausse de la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ (il s'agit en fait de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$). En fait, pour $\operatorname{Ker}\varphi$, il faut utilisé la matrice unité et non la matrice nulle. L'étudiant utilise ensuite une caractérisation erronée (via les dimensions) pour justifier que φ est bijective.

Production 76 (Copie 27)

3) i) Mq $(H,\times)$ groupe isomorphe au groupe $(\mathbb{R},+)$

* soit l'application $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$?

$\theta \longmapsto A(\theta)$

i) $\forall(\theta,\varphi)\in\mathbb{R}^2$ $\varphi(\theta+\varphi) = A(\theta+\varphi) = A(\theta)\,A(\varphi)$

$= \varphi(\theta)\cdot\varphi(\varphi)$

ii) $\varphi(0) = A(0) = \begin{pmatrix} ch0 & sh0 \\ sh0 & ch0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$?

or I_2 est l'élément neutre de la multiplication ~~de~~ "$\times$" dans H

Ainsi d'après i et ii, φ est ~~l'isomor~~ le morphisme de groupe

or d'après 2ème méthode) l'application

$]-1,+1[\longrightarrow H$ est bijective

$x \longmapsto M(x)$

or $\forall\theta\in\mathbb{R}$ $th\theta \in]-1,1[$ et comme H une partie de $GL_2(\mathbb{R})$ (1ère méthode)

D'où $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$??

$\theta \longmapsto A(\theta)$

est bijective. ?

Ainsi φ est un isomorphisme de $(\mathbb{R},+)$ à $(H,\times)$

et comme H est égale à l'ensemble des matrices $A(\theta)$ alors $(H,\times)$ isomorphe à $(\mathbb{R},+)$

Dans cette réponse, l'étudiant définie l'application ψ de **R** vers $\mathcal{M}_2$(**R**) (au lieu de $\mathcal{H}$). Mais il prend les matrices $A(\theta)$ dans $\mathcal{H}$. Il lie la bijectivité de ψ à celle de l'application $x \mapsto M(x)$, mais le lien entre les deux applications n'est pas matérialisé. Il évoque aussi que $\mathcal{H}$ est une partie de GL_2(**R**), ce qui sous-entend qu'il s'appuie sur le fait que les matrices $A(\theta)$ sont inversibles pour justifier que ψ est inversible. A la fin, l'étudiant n'évoque pas la propriété de groupe pour ($\mathcal{H}$,×). La réponse reflète des difficultés dans la gestion des connaissances mobilisées.

Production 77 (Copie 1)

3) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow H$

$\theta \longmapsto A(\theta)$

Soient ~~xxxx~~ $(\theta, \ell) \in \mathbb{R}^2$

$f(\theta+\ell) = A(\theta + \ell) = A(\theta) \times A(\ell) = f(\theta) \times f(\ell)$

$\Longrightarrow$ f est un morphisme

De plus d'aprés la 2e méthode f est bijective

Donc f est un isomorphisme

c-à-d que $(H, \times)$ est un groupe isomorphe au groupe $(\mathbb{R},+)$

Ici, l'identité entre les ensembles de matrices *M(x)* et $A(\theta)$ conduit l'étudiant à identifier les applications $x \mapsto M(x)$ et $\theta \mapsto A(\theta)$, ce qui est erronée. La notion d'égalité entre deux applications n'est pas suffisamment maitrisée par l'étudiant.

Production 78 (Copie 11)

$A : \mathbb{R} \longrightarrow \Gamma$

$\theta \longrightarrow A(\theta)$

i) A est un morphisme de groupe $(\mathbb{R},+)$ à $(\Gamma, \times)$

• A est bij (Cela découle du fait que ch, sh, th sont des fonctions bijectif.)

$\Rightarrow$ A est un isomorphisme de $(\mathbb{R},+)$ dans $(\Gamma,\times)$.

et comme $\Gamma = H$.

$\Rightarrow$

$(H,\times)$ est isomorphe à $(\mathbb{R},+)$

Dans cette réponse, l'étudiant considère implicitement que $(\Gamma,\times)$ est muni de la structure de groupe et ne s'intéresse qu'à établir l'isomorphisme entre les deux structures. Dans la justification de *A* bijective, il dit que *ch* est bijective, ce qui est erroné, et il n'explique pas comment les fonctions *ch*, *sh* et *th* interviennent dans la propriété de bijectivité de *A*.

Commentaire pour la question 3 (3$^{\text{ème}}$ méthode)

Le tableau suivant récapitule la répartition des réponses des étudiants à cette question :

Tableau 33 : Répartition des réponses des étudiants à la question 3 ($3^{ème}$ méthode)

Réponses C+	Réponses C-	Réponses F	Copies SR
19 %	**16 %**	**46 %**	**9 %**

Par rapport aux autres questions de l'exercice, celle-ci requiert plus d'autonomie de la part des étudiants, en ce qui concerne la gestion des données et la mobilisation des connaissances. Ceci, semble t-il, a posé problème pour la plupart des étudiants. Seule une minorité est arrivée à saisir la demande de la tâche et à y répondre convenablement. Néanmoins, les réponses des autres étudiants, y compris la plupart des réponses fausses, reflètent des aptitudes d'exploration et des acquis au niveau des connaissances enseignées. Les difficultés mises en évidence par nos analyses se situent essentiellement au niveau de :

- l'appropriation du contexte de la tâche et la mise en évidence des sous-tâches requises,

- l'adéquation des connaissances mobilisées avec le contexte de la tâche (cadre ensembliste et cadre des structures algébriques, structure de groupe et structure linéaire),

- la formulation explicite des justifications requises

- la gestion du formalisme mis en jeu : égalité entre deux applications, prise en compte des ensembles de départ et d'arrivée dans la définition d'une application, confusion et glissement entre notions (morphisme et automorphisme, matrice image et matrice d'une application, …).

Ces difficultés, avec des tentatives plus ou moins réussies dans la réalisation de la tâche, indiquent, nous semble t-il, une certaine fragilité dans les connaissances et un manque de familiarité avec les tâches demandant autonomie et disponibilité de connaissances.

III. 2. 2. 6. Conclusion pour l'exercice 2 (Partie C)

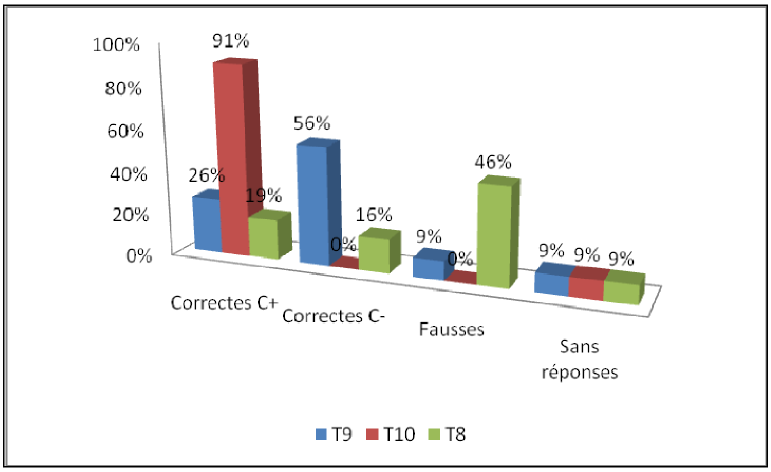
Nous récapitulons dans le tableau et le graphique ci-dessous la répartition des réponses des étudiants aux trois questions de cette partie de l'exercice.

Tableau 34 : Répartition des réponses des étudiants aux questions de l'exercice 2 ($3^{ème}$ méthode)

Tâches	Niveaux de fonctionnement	Réponses C+	Réponses C-	Réponses F	Sans réponse
T_9	Disponible	26 %	56 %	9 %	9 %
T_{10}	Technique	91 %	0 %	0 %	9 %
T_8	Disponible	19 %	16 %	46 %	9 %

Graphique 13 : Répartition des réponses des étudiants

aux questions de l'exercice 2 (3ème méthode)



Les résultats établis dans cette partie C de l'exercice appuient nos conclusions à propos des aptitudes des étudiants constatées dans la partie B et éclaircissent certains points. Ainsi, nous constatons chez la plupart des étudiants des acquis au niveau des connaissances enseignées, la possibilité de mobiliser ces connaissances dans des tâches techniques et de les mettre en œuvre dans des cadres usuels ainsi que des aptitudes plus ou moins performantes dans l'exploration de l'espace de solutions d'une tâche. La comparaison des réponses des étudiants aux tâches disponibles T_9 et T_8 montre que les réponses correctes C+ sont fournies toujours par une minorité d'étudiants qui ne sont pas toujours les mêmes. Il y a certes des étudiants qui ont bien réussi les deux tâches, mais il y en a aussi d'autres dont le type de réponse varie selon les tâches. On peut faire la même remarque pour les copies sans réponse qui ne concernent pas toujours les mêmes étudiants. Les variations importantes dans les taux de réponses C- et fausses (F), entre les tâches T_9 et T_8 (diminution de réponses C- et augmentation de réponses F pour T_8) s'expliquent, nous semble t-il, par le manque d'indications et la variété de données et de notions à mobiliser et à gérer dans la tâche T_8. Notons que, dans la partie B de l'exercice, cette même tâche était aussi mieux réussie qu'ici, la déduction étant plus directe et de ce fait plus évidente à percevoir pour les étudiants. Ceci met en évidence des difficultés dans l'identification de pas de raisonnement non indiqués et/ou la mise en relation d'une diversité de cadres de travail. Par ailleurs, les justifications technologiques que nécessitent certaines tâches et l'adaptation des connaissances aux contextes de résolution ont constitué des obstacles importants pour beaucoup d'étudiants. Ceux-ci sont souvent emportés par les désignations présentes dans l'énoncé, et éprouvent des difficultés à identifier de façon précise les contextes des tâches à réaliser et les connaissances à mobiliser. Ainsi, l'égalité entre les ensembles de matrices $M(x)$ et $A(\theta)$ a été perçue, par la plupart des étudiants, comme découlant d'un simple changement de paramètre permettant le passage d'une matrice à l'autre. Rares sont les étudiants qui ont fourni la justification technologique associée. Cette égalité a amené aussi certains étudiants à identifier les applications $x \mapsto M(x)$ et $\theta \mapsto A(\theta)$, sans considération des ensembles de variation respectifs de x et de θ. La variété de points de vue sous lesquels se présentent les notions d'injection, de surjection et de bijection dans les différents cadres d'étude (ensembliste, algébrique, linéaire et matriciel) a perturbé aussi les étudiants qui ne sont pas toujours arrivés à mobiliser le point de vue adéquat à la réalisation de la tâche concernée. Nous remarquons d'autre part des glissements entre notations, et des difficultés dans l'usage et l'appropriation des formulations disponibles. La présence de la matrice *M(x)* dans l'application : $]-1,1[\ \to \mathcal{H}$, $x \mapsto M(x)$ a perturbé beaucoup d'étudiants, qui ont considéré que *M(x)* est la matrice de cette application.

Ces observations, mettent en évidence une certaine fragilité dans l'usage des connaissances apprises et des difficultés dans la réalisation des tâches dans des contextes non usuels, demandant autonomie, disponibilité de connaissances et flexibilité de pensée.

III. 3. Conclusion générale pour le test d'évaluation et évolution du rapport au savoir.

L'analyse des réponses des étudiants aux différentes parties du test dévaluation confirme un constat récurrent à propos de l'apprentissage des notions ensemblistes fonctionnelles et de la possibilité de les mettre en œuvre dans la résolution des problèmes. Ce constat montre des acquis chez les étudiants sur le plan de la connaissance du cours et la mobilisation des dites notions dans leurs contextes habituels d'étude. En même temps, notre analyse révèle l'existence de difficultés persistantes qui se répètent pratiquement dans les différentes parties du test. Certaines de ces difficultés sont liées à l'usage des notions ensemblistes fonctionnelles et d'autres sont plus générales et concernent la pratique de résolution de problèmes.

Pour le premier type, les difficultés concernent notamment :

- des confusions et des glissements entre notations et formulations, résultant de difficultés dans la gestion de la multiplicité des points de vue sous lesquels se présentent les notions selon les cadres d'étude (ensembliste, structure de groupe, structure linéaire, point de vue matriciel…),

- l'usage des expressions paramétrées et l'appropriation du sens porté par ces expressions, notamment la distinction des statuts des différents ostensifs mis en jeu dans de telles expressions (écriture d'un ensemble ou d'une application dépendant d'un paramètre),

- la mise en œuvre des justifications technologiques que requièrent certaines tâches. Ces justifications sont souvent absentes et leur nécessité ne semble pas perçue comme telle par beaucoup d'étudiants,

- l'appropriation et la gestion des représentations sémiotiques, entrainant souvent des confusions entre notions (ensemble image/ensemble d'arrivée, application f_A /matrice A, matrice image/matrice de l'application associée, égalité entre images/égalité entre les applications associées…).

Concernant l'activité de résolution de problème, les réponses des étudiants aux différentes questions du test mettent en évidence des difficultés à propos de :

- la mise en relation des données de l'exercice : les tâches sont souvent pensées de façon séparée, les stratégies de re-démonstration et d'application directe de définitions et de théorèmes sont toujours plus accessibles,

- l'identification de pas de raisonnement non indiqués,

- l'adaptation des connaissances apprises au contexte de résolution de la tâche.

Nous notons aussi des insuffisances sur le plan de la rédaction : non-conformité dans l'usage des connecteurs de logique, oubli et/ou négligence des quantificateurs, glissements de notations ($\in/\subset$, $\in/=$, $\Rightarrow$/donc, $\Rightarrow/=$)...

La comparaison de ces résultats avec le constat établi à l'issue du test diagnostic fait état d'une amélioration sur le plan de la connaissance des définitions et théorèmes relatifs aux notions ensemblistes fonctionnelles et sur la possibilité de les mobiliser dans leurs contextes habituels d'usage. Néanmoins, nous notons la persistance de certaines difficultés qui concernent notamment la mise en œuvre des contenus technologiques dans la réalisation des tâches, le travail dans des contextes non familiers, l'usage et la gestion du langage ensembliste et plus généralement du symbolisme mathématique. D'autres difficultés sont apparues, dues surtout à la multiplicité des cadres d'étude où sont travaillées les notions ensemblistes fonctionnelles dans l'institution CPS1. Les étudiants se trouvent peu familiarisés à gérer en autonomie cette multiplicité de cadres et à adopter le point de vue approprié pour une notion requise par une tâche donnée.

La récurrence des difficultés et insuffisances constatées, leur présence chez des étudiants supposés travailleurs et motivés, et profitant d'un enseignement mathématique de niveau assez élevé, rendent difficiles la mise en cause des caractéristiques personnelles des étudiants, comme facteurs responsables des difficultés constatées et nous conduisent à impliquer des facteurs dus aux choix institutionnels d'enseignement et aux habitudes de travail des étudiants.

En effet, la rupture mise en évidence dans la transition ES/CPS1 à propos des rapports institutionnels aux notions ensemblistes fonctionnelles semble être difficile à dépasser, y compris par ces étudiants. Ceux-ci se trouvent, semble t-il, encore très dépendants de la culture mathématique du secondaire, caractérisée par une contextualisation des thèmes étudiés, un discours technologique peu opérant dans le topos de l'élève et par un travail centré sur des praxéologies mathématiques ponctuelles, rigides, isolées et intervenant essentiellement au niveau pratico-technique. La négligence par l'institution CPS1 du travail d'ordre technique, la non considération du symbolisme mathématique comme enjeu d'apprentissage et l'insuffisance dans le travail d'intégration des praxéologies ponctuelles étudiées, accroissent la brutalité de changements auxquels les étudiants ont du mal à s'adapter pour répondre aux attentes de l'institution CSP1. Ceci, malgré les ressources techniques et technologiques mises à la disposition des étudiants et des conditions de travail, apparemment favorables, dans l'institution CPS1. Le volume horaire d'enseignement des mathématiques dans les classes CPS1 (12 heures par semaines), le contenu mathématique important qui y est dispensé et l'enseignement en classes de taille réduite (25-30 étudiants par classe), ajoutés au bon niveau, à la motivation et au sérieux des étudiants ne semblent pas fournir à ceux-ci des conditions suffisantes leur permettant d'acquérir les connaissances identifiées dans nos analyses. Admettant avec Castela (2002), qu'une grande partie de ces connaissances, ne constituant pas des enjeux explicites d'apprentissage dans l'institution Supérieur, « *leur acquisition dépend largement du travail personnel accompli par les étudiants, des objets et des modalités de ce travail* » (ibid. p. 5), nous envisageons, dans le chapitre suivant, de déceler, à travers un questionnaire, des raisons aux difficultés des étudiants qui pourraient être dues à leurs habitudes de travail et leurs modes d'apprentissage.

Chapitre IV : Modalités de travail personnel et leurs effets sur la formation des étudiants

Les difficultés résistantes constatées chez les étudiants dans le test d'évaluation à propos de l'usage des notions ensemblistes fonctionnelles et de l'activité de résolution de problèmes nous incitent à chercher à mieux comprendre les facteurs potentiellement divers à l'origine de ces difficultés et leurs interactions. L'analyse institutionnelle a mis en évidence des discontinuités dans les rapports institutionnels aux fonctions et leur sous-estimation par les acteurs institutionnels. Il s'agit là de sources indéniables de difficultés. Robert (1998) et Castela (2002) ont souligné par ailleurs l'importance du travail personnel des étudiants comme facteur conditionnant la forme des apprentissages (superficiels/authentiques (Robert, 1998)) et favorisant/défavorisant la construction d'un savoir fonctionnel[66] (Castela, 2002). Dans ce chapitre, nous étudions, à travers un questionnaire, d'une part l'influence des contraintes institutionnelles sur les modes de travail personnel des étudiants, et d'autre part les effets éventuels de ces modes de travail sur les aptitudes et formes d'apprentissage des étudiants. Nous essayons de voir les liens éventuels entre ces modes de travail et les difficultés des étudiants. En cohérence avec les choix de ce travail de thèse, nous nous centrons sur l'Algèbre.

I. Introduction

L'étude, dans les chapitres précédents, des rapports institutionnels et personnels aux notions ensemblistes fonctionnelles a mis en évidence des discontinuités dans les organisations praxéologiques relatives à l'enseignement de ces notions dans la transition ES/CPS1 et les difficultés rencontrées par les étudiants pour dépasser cette discontinuité. Considérant que les connaissances à l'origine de cette discontinuité sont, soit élémentaires et donc ne méritant pas qu'on leur accorde une réelle importance (comme celles engagées dans la résolution de tâches d'ordre technique, ou la reprise et l'intégration des praxéologies ponctuelles enseignées au Secondaire), soit ne constituent pas un enjeu d'apprentissage car le curriculum officiel ne s'exprime pas à leur propos (comme c'est le cas pour les connaissances intervenant dans l'activité de résolution de problèmes ou pour celles liées à l'usage du symbolisme), l'institution CPS1 laisse l'identification et le développement des dites connaissances à la charge des étudiants, qui se trouvent ainsi contraints d'accomplir, par des efforts personnels et/ou via des aides à l'étude (Chevallard, 1998), des apprentissages ignorés (Castela, 2007b) par l'institution et qui, pourtant, s'avèrent essentiels pour leur formation et pour leur réussite.

Nous plaçant toujours dans le cadre de la TAD et admettant, avec Castela (2002), que « *l'institution didactique influence de manière décisive le travail personnel, même si celui-ci*

[66] C'est-à-dire un savoir qui favorise la construction de connaissances sur le fonctionnement mathématique.

est susceptible de variations individuelles importantes ; par ce biais, elle favorise plus ou moins l'acquisition de connaissances non directement enseignées. » (p. 5), nous essayons, à travers le questionnaire que nous analysons ci-dessous, de voir comment les contraintes institutionnelles orientent les modalités de travail personnel des étudiants et quels sont les effets éventuels de ces modalités de travail sur les possibilités d'apprentissage des étudiants de l'institution CPS1. Un tel travail nous semble de plus nécessaire dans la perspective qui est la nôtre, à ce stade de l'étude, c'est-à-dire la conception d'une ingénierie didactique susceptible d'aider les étudiants à mieux faire face aux difficultés les plus résistantes qu'ils rencontrent en CSP1.

II. Conception générale et contexte de passation du questionnaire

Dans la mesure où, comme précisé ci-dessus, notre objectif est de mettre en évidence dans les comportements et les difficultés constatées chez les étudiants dans le test d'évaluation des facteurs imputables à l'influence de l'institution CPS1, nous nous sommes intéressés dans le questionnaire plus particulièrement à l'enseignement et l'apprentissage de l'Algèbre dans la classe CPS1. Le questionnaire comporte deux volets, le premier concerne l'avis des étudiants sur l'enseignement de l'Algèbre en CPS1, ses liens avec les mathématiques du Secondaire et sur les difficultés éventuelles d'apprentissage qu'ils rencontrent plus spécifiquement en Algèbre ; quant au deuxième, il concerne les comportements des étudiants à des moments précis d'apprentissage. Le questionnaire est composé de trois questions fermées, de deux questions semi-ouvertes et d'une question ouverte. Dans la formulation de certaines questions, nous nous sommes inspirés de la recherche réalisée par Castela (2002) concernant les objets du travail personnel en mathématiques des étudiants dans l'enseignement supérieur.

Le questionnaire est passé au milieu du troisième trimestre de l'année universitaire. Les étudiants concernés sont, de ce fait, supposés s'être formé une idée de l'enseignement des mathématiques en CPS1 et avoir acquis des habitudes de travail par lesquelles ils espèrent répondre aux exigences de formation de leur institution. Tous les étudiants concernés par le test d'évaluation, c'est-à-dire 43 étudiants, ont été soumis à ce questionnaire. Ils y ont répondu chez eux et de façon anonyme. Nous avons opté pour ce choix afin d'atténuer les effets possibles d'une contrainte de temps ou d'une éventuelle tendance de la part de certains étudiants à vouloir se conformer à l'image qu'ils ont du « bon » étudiant, ce qui aurait pu les conduire à donner des réponses ne correspondant pas à leurs véritables avis.

III. Présentation et analyse des réponses au questionnaire

Dans ce paragraphe, nous effectuons, pour chacune des questions qui composent le questionnaire, une analyse a priori précisant l'objectif de la question et nous la faisons suivre des résultats obtenus et du commentaire correspondant[67].

[67] Le texte complet du questionnaire est en Annexe

III.1. Question 1

Question

A ton avis, les connaissances mathématiques du secondaire ont-elles contribuées à faciliter ton apprentissage des mathématiques au supérieur ?

	En analyse	***En algèbre***
Beaucoup		
Moyennement		
Très peu		
Pas du tout		
Autre Avis		

Objectif

L'objectif de la question est de connaître les avis des étudiants quant aux liens éventuels qu'ils voient entre les mathématiques du Secondaire et celles étudiées en CPS1. Ceci nous permettra de mieux évaluer le contexte général de la transition ES/CPS1 du point de vue des étudiants. La mention à la fois de l'Algèbre et de l'Analyse permet ici de contraster deux domaines pour lesquels les discontinuités entre secondaire et supérieur ne sont pas de même nature.

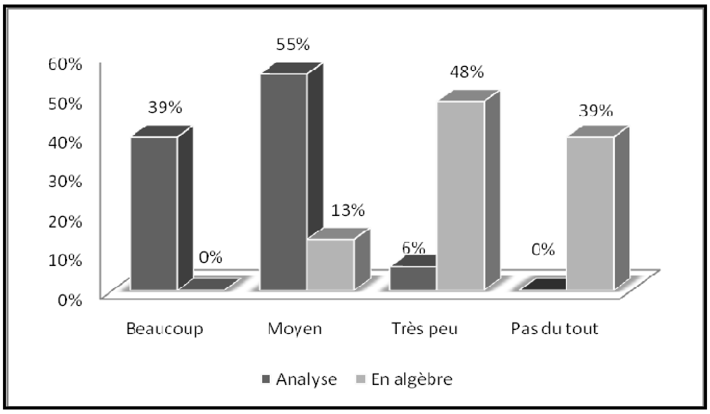
Résultats

Le tableau et le graphique ci-dessous donnent les résultats obtenus, en pourcentages.

Tableau 1

	En analyse	***En algèbre***
Beaucoup	*39%*	*0%*
Moyennement	*55%*	*13%*
Très peu	*6%*	*48%*
Pas du tout	*0%*	*39%*

Graphique 1



Analyse et commentaire

Les réponses données à cette question montrent que pour la majorité des étudiants, les connaissances mathématiques acquises dans le Secondaire sont d'un apport bénéfique pour l'étude de l'Analyse au Supérieur (94% pour les réponses « beaucoup » et « moyennement »), alors qu'elles contribuent très faiblement à l'apprentissage de l'Algèbre (87 % pour les réponses « très peu » et « pas du tout »). L'écart observé entre Analyse et Algèbre n'est pas surprenant. En première année des classes préparatoires scientifiques le programme d'Analyse est organisé autour des concepts fondamentaux de « suite » et de « fonction » (d'une ou de deux variables réelles et à valeurs réelle ou complexe). Plusieurs notions relatives à ces concepts (notamment le calcul différentiel et intégral à une variable) ont été abordées dans les deux dernières classes de lycée, et elles sont revues et complétées en CPS1. Bien qu'à l'université l'approche de ces notions se fasse de façon théorique et savante et diffère de ce fait de celle utilisée dans le Secondaire, certaines techniques de calcul (comme le calcul de limites, de fonctions dérivées, d'intégrales…) et certains algorithmes et méthodes de travail (comme ceux gouvernant l'étude des suites, des fonctions d'une variable réelle, des courbes planes…) utilisés au lycée, restent employés à l'Université. De façon générale, un point de vue algorithmique reste toujours en vigueur dans l'étude de l'Analyse en CPS1, les instructions officielles relatives au programme d'Analyse précisant que « *le point de vue algorithmique est à prendre en compte pour l'ensemble de ce programme, notamment pour le tracé des courbes* ». En revanche, la très grande majorité des étudiants trouvent que les mathématiques du Secondaire ne les ont pas aidés dans leur apprentissage de l'Algèbre au Supérieur. Ce constat est appuyé par les réponses données par 26 étudiants à la dernière modalité proposée pour cette question (Autre avis). Nous rapportons ci-dessous les types de réponses les plus fréquentes données :

- *Au secondaire, on n'a rien fait qui ressemble à l'algèbre du supérieur. L'algèbre, c'est trop abstrait.* (4 réponses)

- *Avec les nouvelles notions, telles que les espaces vectoriels et les structures, il n'y a aucun rapport avec les mathématiques du secondaire*. (5 réponses)

- *Il n'y a pas de rapport, car au secondaire on néglige les démonstrations du cours qui sont très importantes dans le programme du supérieur*. (7 réponses)

- *Cette année, les exercices qu'on fait sont comme les démonstrations du cours, ils sont difficiles à travailler*. (5 réponses)

- *Au secondaire, on s'intéresse aux applications des théorèmes plus qu'à leurs démonstrations*. (5 réponses)

Dans la première réponse les étudiants reconnaissent, de façon un peu vague, l'absence de liens ou de « ressemblance » entre les mathématiques du Secondaire et l'étude de l'Algèbre au Supérieur, la réponse suivante précise que la différence se trouve dans la nature des notions et des connaissances enseignées dans les deux institutions. Dans les trois dernières réponses (qui correspondent à la majorité des étudiants 17/26, soit 65%), les étudiants trouvent que ce sont les méthodes de présentation des mathématiques qui font la différence entre le Secondaire et le Supérieur. Ils précisent ainsi que les démonstrations du cours sont « négligées » ou ont « peu d'intérêt » au Secondaire. Ce qui importe c'est l'application des théorèmes, alors qu'au Supérieur, les exercices que les étudiants sont appelés à travailler ressemblent aux démonstrations du cours, ce qui les rend difficiles à résoudre. Ces avis sont conformes au constat obtenu à propos des rapports institutionnels aux notions ensemblistes fonctionnelles, et montrent en même temps que les différences constatées dans les deux institutions ne sont pas spécifiques aux dites notions, mais concernent plus généralement la nature des objets enseignés, les formes de connaissances et les pratiques mathématiques. Mais, dans le cas de l'Algèbre, ces différences se conjuguent avec la nouveauté des structures rencontrées.

III.2. Question 2

Question

Comment trouves-tu l'enseignement de l'Algèbre cette année ?
Donne ton avis concernant chacune des modalités suivantes :

	Comprendre le cours	***Comprendre les corrigés des exercices***	***Faire les exercices d'application directe du cours***	***Faire les autres exercices***
Très facile				
Facile				
Un peu difficile				
Difficile				
Très difficile				

Objectif

Dans cette question, le travail des étudiants en Algèbre est partagé selon quatre modalités : deux modalités de compréhension (comprendre le cours, comprendre les corrections des exercices) et deux autres de production (faire les exercices d'application directe du cours, faire les autres exercices). Connaître le rapport des étudiants à chacune de ces modalités nous permettra de mieux cerner les moments de l'étude qui posent spécifiquement problème à ces étudiants. Dans nos analyses, nous considérons qu'une modalité est accessible à un, lorsqu'il la considère au plus un peu difficile (c'est à dire, très facile, facile ou un peu difficile).

Résultats

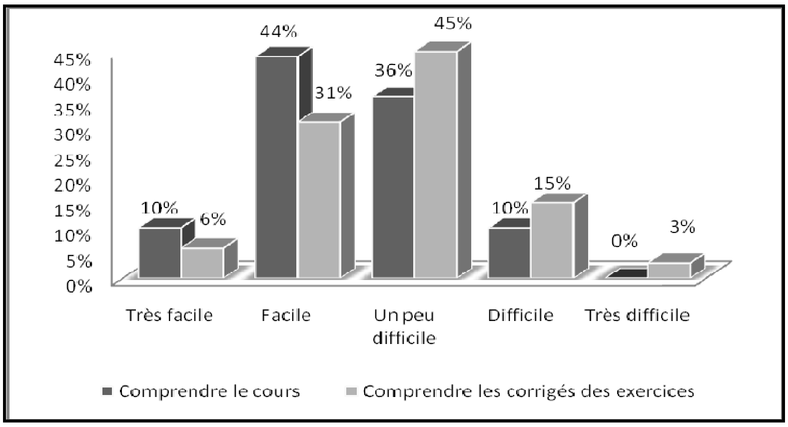
Les réponses des étudiants à cette question sont données dans le tableau et les graphiques ci-dessous :

Tableau 2

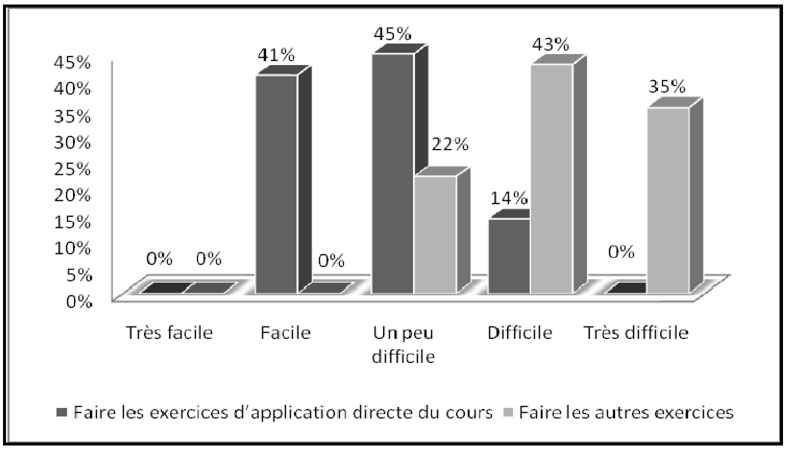
	Comprendre le cours	*Comprendre les corrigés des exercices*	*Faire les exercices d'application directe du cours*	*Faire les autres exercices*
Très facile	*10%*	*6%*	*0%*	*0%*
Facile	*44%*	*31%*	*41%*	*0%*
Un peu difficile	*36%*	*45%*	*45%*	*22%*
Difficile	*10%*	*15%*	*14%*	*43%*
Très difficile	*0%*	*3%*	*0%*	*35%*

Les fréquences données correspondent aux nombres d'occurrences associées aux différentes cases. Pour une modalité donnée, le total des occurrences peut dépasser le nombre des étudiants interrogés. Ceci car certains étudiants ont coché deux cases (généralement voisines) pour une même modalité, comme par exemple : facile/un peu difficile, un peu difficile/difficile…Les pourcentages sont calculés par rapport au total des occurrences de chacune des modalités.

Graphique 2 (Compréhension)



Graphique 3 (Production)



Analyse et commentaire

Pour la compréhension du cours ou des corrigés des exercices, nous pouvons donc considérer qu'il s'agit d'une modalité accessible à la majorité des étudiants. Ainsi, concernant le cours, il y a 54% de réponses "très facile" et "facile" et 36% "un peu difficile" soit 90% d'accessibles. Concernant les corrigés des exercices, il y a 37% de réponses "très facile" et "facile" et 45% pour "un peu difficile" soit 82% d'accessibles. Nous notons cependant qu'il y a plus de difficultés dans la compréhension des corrigés des exercices que dans la compréhension du cours, ce qui peut sembler un peu étonnant. Une explication possible peut résider dans le fait que le cours est toujours présenté et expliqué dans son intégralité dans la classe, alors que, pour les exercices de travaux dirigés (TD), les enseignants de CPS1, faute de temps, donnent parfois les corrigés de certains exercices en polycopiés. Les étudiants peuvent aussi avoir répondu de façon générale en considérant, en plus des exercices corrigés donnés dans les TD, ceux qu'ils trouvent dans les manuels d'exercices corrigés. Dans ce cas, les corrigés peuvent, dans certains manuels, être succincts et laisser à la charge de l'étudiant trop d'étapes intermédiaires.

Pour le travail des exercices, le contraste entre exercices d'application directe du cours et les autres est particulièrement fort (85% d'accessibilité contre 22% pour les autres exercices). Les résultats obtenus montrent bien que, pour cette population d'élèves, appliquer le cours que, par ailleurs ils jugent accessible, ne pose pas de problème mais qu'ils restent en revanche très démunis dès qu'ils doivent sortir de cette catégorie de tâches routinières et faire preuve d'autonomie et de disponibilité des connaissances. Ceci nous conduit à nous interroger quant à la pratique qu'adoptent les étudiants lorsqu'ils sont confrontés à des tâches de ce type. C'est ce que nous essayons de savoir à travers les questions qui suivent.

III.3. Question 3

Question

D'habitude, quelle attitude adoptes-tu quand tu rencontres une difficulté lors de la résolution d'un exercice donné dans une fiche de TD ? Si tu retiens plusieurs choix de réponse, numérote ces choix par ordre décroissant d'importance (1 pour le plus important).

M_1	*J'attends que correction soit faite en classe*	
M_2	*Je cherche un exercice analogue dans un livre d'exercices corrigés*	
M_3	*Je réfléchis à la difficulté avec un autre (ou d'autres) collègue(s)*	
M_4	*J'essaye de m'en sortir tout seul*	

Objectif

Une bonne connaissance des concepts et théorèmes enseignés n'implique pas nécessairement la possibilité d'utiliser et d'appliquer ces connaissances dans des contextes complexes ou non habituels (Niss, 1999). Pour permettre aux apprenants d'affronter et de réussir des tâches de résolution de problèmes exigeant initiative, adaptabilité et inventivité, Castela (2008a) trouve nécessaire le développement, chez les apprenants, d'une autonomie mathématique (qu'elle qualifie d'*autodidactie*). Le développement de cette autonomie dépend largement, nous semble t-il, de l'attitude qu'adopte l'étudiant devant les difficultés qu'il rencontre dans la réalisation d'une tâche problématique. Cette question vise donc à identifier les postures qu'adoptent les étudiants à l'égard des difficultés qu'ils rencontrent lors de la résolution de problèmes.

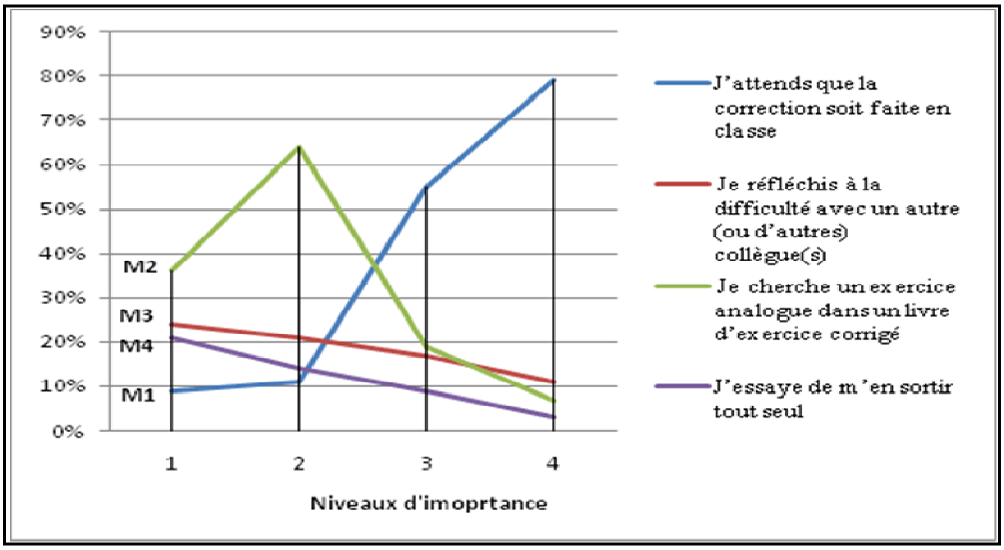
Résultats

Le tableau et le graphique ci-dessous donnent, pour chaque modalité de réponse, les pourcentages d'occurrences correspondant aux différents niveaux d'importance. Si un étudiant choisit une seule modalité, celle-ci est comptée au niveau 1 d'importance. Les pourcentages sont calculés par rapport au nombre total d'occurrences pour chaque niveau d'importance :

Tableau 3

Modalités		***Niveaux d'importance***			
		1	***2***	***3***	***4***
M_1	*J'attends que correction soit faite en classe*	*9%*	*11%*	*55%*	*79%*
M_2	*Je cherche un exercice analogue dans un livre d'exercice corrigé*	*36%*	*64%*	*19%*	*7%*
M_3	*Je réfléchis à la difficulté avec un autre (ou d'autres) collègue(s)*	*24%*	*21%*	*17%*	*11%*
M_4	*J'essaye de m'en sortir tout seul*	*21%*	*14%*	*9%*	*3%*

Graphique 4



Analyse et commentaire

Nous remarquons que, placés devant une tâche problématique, une minorité d'étudiants seulement a comme stratégie usuelle d'abandonner la réalisation de la tâche pour attendre que correction soit faite en classe (modalité M_1), comme le montrent les faibles pourcentages des niveaux 1 et 2 d'importance pour cette stratégie (9% ou 11%). Le comportement dominant consiste à chercher dans un livre une indication permettant de résoudre la difficulté rencontrée (modalité M_2, respectivement 36% et 64% de niveaux 1 et 2 d'importance). Généralement, dans de tels cas, l'étudiant peut, soit trouver explicitement la technique précise permettant de résoudre le problème rencontré, soit s'inspirer pour la solution d'une technique proposée pour une tâche analogue, mais il peut également ne se trouver ni dans l'une ni dans l'autre de ces deux possibilités. Si nous considérons ensemble les modalités M_3 et M_4, consistant à réfléchir à la difficulté rencontrée, individuellement ou avec un collègue, nous trouvons qu'elles sont adoptées en priorité par 45% des étudiants. Elles dépassent ainsi au niveau 1 d'importance la modalité M_2. Ce n'est plus le cas si l'on considère le niveau 2 d'importance pour lequel ces modalités (M_3 et M_4) n'obtiennent que 35%, alors que la modalité M_2 atteint son maximum (64%). En fait, beaucoup d'étudiants qui donnent la priorité aux modalités M_3 et M_4, placent la modalité M_2 en deuxième position, ce qui indique que si l'effort de réflexion n'aboutit pas, ils ont recours aux livres d'exercices corrigés pour essayer de surmonter la difficulté rencontrée.

Il découle de ces données que, globalement, la majorité des étudiants ont un comportement positif devant une tâche problématique. En ce sens que la plupart d'entre eux ne baissent pas les bras et essaient de surmonter la difficulté par eux-mêmes ou avec les ressources à leur portée (recherche dans un livre, réflexion individuel ou avec un (ou des) tiers). Ceci n'est a priori pas surprenant vu la population d'étudiants concernés, des étudiants sérieux, soucieux d'apprendre et de se former, et ayant également une certaine confiance dans leur capacité à résoudre des problèmes. On observe néanmoins une tendance importante à privilégier la recherche d'aide dans des ouvrages d'exercices corrigés (stratégie dominante pour 36% des étudiants et venant en second pour 64% d'entre eux), tendance déjà mise en évidence dans d'autres recherches (Lithner, 2000), une tendance qui peut faire obstacle à la construction d'un rapport stratégique au monde mathématique, leur permettant d'être autonomes et d'assumer de façon productive la responsabilité autodidacte (Castela, 2008a).

III.4. Question 4

Question

D'habitude, lorsque tu réfléchis à un exercice et que tu trouves l'idée de sa résolution, essayes-tu de faire une rédaction propre et détaillée de la solution.

Jamais	
Rarement	
Souvent	
Toujours	

Objectif

Faisant référence aux pratiques « expertes » des mathématiciens professionnels, A. Robert (1998) souligne l'importance de l'écrit dans l'activité mathématique, comme générateur d'une « *dynamique de questionnements plus précis, rendus possible par la production écrite, visible, et une exigence de rigueur sur la chose écrite, notamment dans la phase finale, la rédaction définitive*». De son côté, soulignant les spécificités de l'écrit par comparaison avec la modalité orale de l'expression, R. Duval indique (2001, p. 191) que « *l'écriture [est] le lieu et le moyen d'une activité de contrôle de la pensée* ». Particulièrement, en mathématiques, il précise que « *rien, peut être, ne mérite davantage d'être appelé "éducation mathématique" que cette initiation à l'écrire, surtout s'il s'agit de démonstration* » c'est que « *l'écriture est la véritable épreuve de compréhension et d'interprétation des démarches théoriques* » (Duval, 2000, p. 146 et 167). Faisant nôtres ces affirmations, et tenant compte des difficultés qu'éprouvent les étudiants au niveau du raisonnement comme au niveau de la rédaction constatées dans le test d'évaluation ainsi que dans les devoirs et examens de classe, nous envisageons avec cette question de mieux cerner l'importance qu'accordent les étudiants à la pratique d'écriture dans leur travail personnel. Dans cette question, nous nous intéressons particulièrement à la rédaction des solutions des exercices résolus par les étudiants. Dans la question suivante nous étudions cette pratique de façon plus générale.

Résultats

Le tableau suivant donne les résultats obtenus :

Tableau 4

Jamais	*3%*
Rarement	*38%*
Souvent	*47%*
Toujours	*12%*

Analyse et commentaire

Les résultats obtenus indiquent qu'une mise en rédaction conforme et complète des solutions d'exercices résolus n'est pas une pratique courante pour 42% des étudiants et qu'elle est souvent pratiquée sans être systématique par 47% d'entre eux. Une minorité (12%) seulement la pratique de façon systématique. On peut faire l'hypothèse que le faible temps disponible pour le travail personnel et le fait que les exercices donnés dans les épreuves d'évaluation ne ressemblent que partiellement ceux qui sont traités en TD conduit un pourcentage substantiel des étudiants de CPS1 à miser sur la quantité d'exercices résolus plus que sur la qualité de résolution. Autrement dit, ces étudiants préfèreraient, une fois qu'ils pensent savoir comment résoudre un exercice, réfléchir à un nouvel exercice plutôt que de terminer la résolution du premier et la mettre en forme. Ceci, dans l'objectif de connaître le plus de méthodes et de techniques de travail des exercices qui puissent leur être utiles dans les évaluations. Si l'on admet ce que postulent Robert et Duval (cf. ci-dessus), ce manque d'intérêt à la pratique d'écriture pourrait expliquer, dans une certaine mesure, les insuffisances constatées chez les étudiants au niveau de la rédaction, mais aussi au niveau d'une mobilisation efficace et maîtrisée des notions et concepts d'Algèbre lors de la résolution des exercices. Ceci pourrait notamment contribuer aux glissements observés entre notions et symboles, à la non-conformité dans l'usage des connecteurs logiques et à l'existence de nombreux implicites dans les solutions produites.

III.5. Question 5

Question

Classe, par ordre décroissant d'importance (1 pour le plus important), les modalités suivantes concernant l'attitude que tu préfères adopter dans ton travail personnel (en Algèbre), et notamment pour préparer un devoir ou un examen. (Tu attribues le même nombre aux modalités qui ont la même importance pout toi)

M_1	*Je relis le cours et j'y reviens en cas de besoin*	
M_2	*Je refais les démonstrations que je trouve importantes*	
M_3	*Je relis les corrections des exercices faits en classe ou que je trouve dans des livres d'exercices corrigés*	
M_4	*Je refais des exercices et problèmes faits en classe ou que je trouve dans des livres d'exercices corrigés*	
M_5	*Je cherche à faire des exercices et problèmes nouveaux*	
M_6	*Je réfléchis sur les difficultés que je rencontre dans les exercices et j'essaye de dégager des idées à retenir*	
M_7	*J'essaie de retenir les solutions d'exercices que je trouve importants*	
M_8	*Autre attitude :*	

Objectif

Partant de l'hypothèse, qu'« *une grande partie des connaissances […en jeu dans la résolution de problèmes] ne constituant pas des enjeux explicites d'enseignement, leur acquisition dépend largement du travail personnel accompli par les étudiants, des objets et modalités de ce travail* » (Castela, 2002, p. 5) et considérant que le cours et les exercices constituent les objets de base autour desquels s'organise le travail personnel des étudiants, cette question vise à étudier les modalités qu'adoptent les étudiants dans le travail de ces deux objets. Notre objectif est, d'une part de mettre en évidence l'objet de savoir (cours/exercices) que les étudiants considèrent comme le mieux à même de leur permettre d'apprendre l'Algèbre et de se préparer pour les devoirs et examens, d'autre part de connaître la forme de travail qu'adoptent les étudiants pour tirer profit de chacun de ces deux objets de savoir. Dans ce contexte, nous avons distingué dans les modalités proposées entre une pratique centrée sur la lecture (M_1 et M_3), une pratique centrée sur la reconstruction et la rédaction (M_2 et M_4), une pratique de mémorisation (M_7) et une pratique réflexive (M_6). Les réponses des étudiants devraient aussi nous permettre de mieux connaître leurs possibilités à s'adapter aux exigences de travail en CPS1 qui se distinguent de celles du lycée, où généralement les démonstrations de cours ne sont pas considérées comme des connaissances exigibles et où une bonne partie des devoirs et examens est constituée de tâches routinières, traitées généralement en classe et se trouvent dans les livres d'exercices corrigés.

Résultats

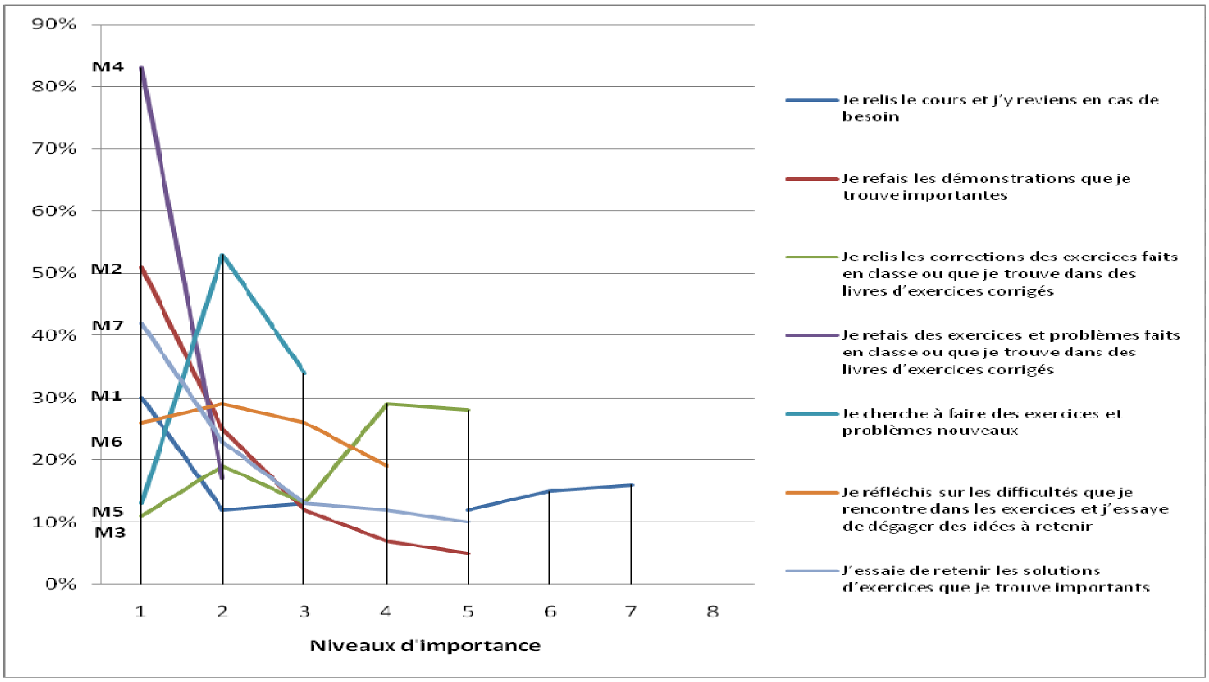
Le tableau et le graphique ci-dessous donnent, pour chaque modalité de réponse, les pourcentages d'occurrences correspondant aux différents niveaux d'importance (les pourcentages de chaque modalité sont calculés par rapport au nombre total des étudiants) :

Tableau 5

Modalités		***Niveaux d'importance***							
		1	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***
M_1	*Je relis le cours et j'y reviens en cas de besoin*	*30%*	*12%*	*13%*		*12%*	*15%*	*16%*	
M_2	*Je refais les démonstrations que je trouve importantes*	*51%*	*25%*	*12%*	*7%*	*5%*			
M_3	*Je relis les corrections des exercices faits en classe ou que je trouve dans des livres d'exercices corrigés*	*11%*	*19%*	*13%*	*29%*	*28%*			
M_4	*Je refais des exercices et problèmes faits en classe ou que je trouve dans des livres d'exercices corrigés*	*83%*	*17%*						
M_5	*Je cherche à faire des exercices et problèmes nouveaux*	*13%*	*53%*	*34%*					
M_6	*Je réfléchis sur les difficultés que je rencontre dans les exercices et j'essaye de dégager des idées à retenir*	*26%*	*29%*	*26%*	*19%*				
M_7	*J'essaie de retenir les solutions d'exercices que je trouve importants*	*52%*	*23%*	*13%*	*12%*				
M_8	*Autre attitude*								

Les cases vides s'expliquent par les modalités ordonnées en ex quo

Graphique 5



Analyse et commentaire

La modalité M_4 (refaire des exercices et problèmes …) apparait la plus importante pour les étudiants : 83 % d'entre eux lui accordent le 1er niveau d'importance et les 17 % restants lui accordent le 2ème niveau. Pour ces deux premiers niveaux, et concernant le cours, 76 % des étudiants (respectivement 51 % et 25 %) trouvent que « refaire les démonstrations » (modalité M_2) est important pour l'apprentissage de l'Algèbre et la préparation aux devoirs. La modalité M_5 (faire des exercices et problèmes nouveaux) est, en revanche, faiblement représentée au premier niveau. Néanmoins, 87 % des étudiants la choisissent en deuxième et troisième niveau d'importance. On peut donc faire l'hypothèse que les étudiants cherchent au début à se refamiliariser avec les notions et concepts enseignés (modalités M_4 et M_2), et à assurer leur connaissance des praxéologies mathématiques introduites dans l'enseignement et de leurs modes d'intervention dans les exercices et problèmes, ainsi que dans les démonstrations de cours, avant de se lancer dans le travail sur de nouveaux types d'exercices. Ceci montre aussi que les étudiants ont compris qu'en CPS1, se limiter aux tâches routinières et aux exercices de TD ne suffit pas pour réussir les devoirs et examens (du moment que, généralement, une bonne partie de ces devoirs et examens ne ressemble pas au travail fait dans les TD), ce qui est cohérent avec les réponses données à la question 3. Ceci étant, nous remarquons que la modalité M_6 exprimant une attitude réflexive est faiblement représentée (respectivement 26 %, 29 %, 26 %, 19 %) relativement aux modalités précédentes (ce qui est cohérent avec les résultats de la question 3). Ceci est à mettre en rapport avec le score important de la modalité M_7 correspondant au travail de mémorisation (75 % d'occurrence pour les premier et deuxième niveaux d'importance). En effet, il semble que les étudiants, éprouvant des difficultés à surmonter individuellement les difficultés qu'ils rencontrent dans leur travail habituel, sont convaincus que ceci sera encore plus difficile à réaliser dans les devoirs et examens, vu les contraintes supplémentaires qui pèsent sur eux dans de telles situations. Le travail de mémorisation pourrait être une alternative dont ils espèrent qu'elle sera efficace dans les épreuves d'évaluation. Concernant la modalité M_3 (relire les corrigés des exercices), elle est faiblement représentée pour les trois premiers niveaux d'importance (11 %, 19 %, 13 %), tout en obtenant un score important en 4ème et 5ème rang. Cette répartition qui contraste avec celle obtenue pour la modalité M_4 (refaire des exercices et problèmes …) exprime, nous semble-t-il, l'importance que les étudiants attachent à leur travail de production de solutions, et aussi peut-être le fait qu'ils sont moins sensibles au plus que peut leur apporter un travail sur la correction d'un exercice, concernant notamment l'expression du raisonnement, s'ils pensent savoir le résoudre.

Ceci dit, pour la modalité M_8 (autre attitude), 9 étudiants y ont répondu. Les réponses données qui évoquent d'autres modalités de travail que celles proposées montrent le souci des étudiants concernés d'enrichir leur expérience d'enseignement et leur souci notamment d'élargir la palette des techniques et méthodes de résolution des exercices dont ils disposent.

Nous donnons ci-dessous des exemples de ces réponses :

- *Je cherche d'autres cours soit par internet, soit en cherchant les cours d'autres enseignants pour voir plus de détails et d'autres méthodes.*

- *Je cherche à faire des exercices de nature autre que celles de la série de TD, pour varier mes connaissances et savoir d'autres méthodes qui me serviront à l'examen.*

- *J'essaye de résoudre les exercices avec d'autres méthodes que celles faites en classe, pour m'habituer à penser.*

Pour conclure, les réponses à cette question montrent que les étudiants interrogés sont, dans leur majorité, bien conscients des exigences de travail dans l'institution CPS1, et qu'ils essaient d'ajuster leur travail pour répondre au mieux à ces exigences. Dans ce contexte, les attitudes considérées comme les plus importantes par la plupart des étudiants sont (par ordre d'importance) :

- refaire des exercices et problèmes corrigés,

- mémoriser les corrections d'exercices et problèmes.

- refaire les démonstrations de cours,

- faire des exercices et problèmes nouveaux.

Cette hiérarchie de réponses, et notamment l'importance accordée à la mémorisation de solutions d'exercices et problèmes, nous semblent cependant montrer la difficulté que ces étudiants rencontrent à développer des stratégies vraiment efficaces dans le cadre des contraintes institutionnelles fortes qu'ils rencontrent, notamment du point de vue rapport : temps de travail/volume de connaissances à apprendre, et aussi suite à une formation qui, tant dans l'enseignement secondaire que dans le supérieur, ne prend pas en charge ces apprentissages méthodologiques comme de réels objets d'enseignement.

III.6. Question 6

Question

Qu'est ce qui te paraît le plus difficile en Algèbre ? (illustre, si possible, ta réponse avec des exemples précis)

Objectif

Cette question ouverte donne aux étudiants l'occasion de s'exprimer librement sur les difficultés qu'ils rencontrent dans leur apprentissage de l'Algèbre. Ceci pourrait nous permettre de mieux comprendre les origines de ces difficultés et, éventuellement, de mettre en évidence des éléments que nous n'avons pas pris en considération dans les questions précédentes.

Résultats

Nous classons les réponses des étudiants à cette question en 5 classes, selon le type de difficultés indiqué. Certains étudiants ont indiqué dans leurs réponses deux difficultés, ce qui donne un total d'occurrences pour les difficultés supérieur au nombre total des étudiants. Les pourcentages donnés sont calculés par rapport au nombre total des occurrences.

Les 5 types de difficultés sont les suivants :

Tableau 6

	Types de difficultés	**Occurrences**
R_1	*Méthodes de résolution des exercices et rigueur des raisonnements*	*39%*
R_2	*Rédaction des solutions des exercices et des démonstrations*	*26%*
R_3	*La nouveauté des notions et thèmes étudiés*	*12%*
R_4	*Comprendre les démonstrations de cours*	*14%*
R_5	*Le manque de temps par rapport à la quantité de notions à apprendre*	*9%*

Nous rapportons ci-dessous des exemples de réponses pour chacun de ces types de difficultés.

R_1 : Méthodes de résolution des exercices et rigueur des raisonnements

1) *Ce qui me paraît le plus difficile en Algèbre est de savoir la démarche qu'on doit prendre pour résoudre un exercice.*

2) *Les solutions des exercices sont en général à la portée, mais le plus difficile c'est d'y penser et être irréprochable dans mon raisonnement.*

3) *Ce qui me paraît difficile en algèbre c'est le passage du cours aux exercices, car je n'arrive pas à refaire les démonstrations des théorèmes et puis j'ai du mal à les exploiter dans les exercices.*

4) *Ce qui me semble le plus compliqué en algèbre est le passage du cours aux exercices. La difficulté étant qu'il faut bien comprendre les théorèmes et prévoir tout ce qu'ils impliquent comme résultats pour pouvoir résoudre les exercices.*

R_2 : Rédaction des solutions des exercices et des démonstrations

1) *La rédaction me paraît la plus difficile, car on est habitué à ne pas rédiger correctement au cours de nos études secondaires. Plus précisément, j'ai quelques problèmes de rédiger correctement et de comprendre les démonstrations du cours facilement.*

2) *Je crois qu'en algèbre ce qui est le plus difficile c'est comment rédiger, car la rédaction et la logique comptent beaucoup en algèbre.*

3) *C'est la rédaction complète qui est importante en algèbre, car c'est facile de trouver l'idée d'un exercice mais c'est parfois difficile de l'exprimer ou de la rédiger.*

R_3 : La nouveauté des notions et thèmes étudiés

1) *Il existe des notions nouvelles qui ne sont pas assez simples et auxquelles je ne me familiarise pas assez vite. Du coup, je ne peux pas les utiliser facilement.*

2) *L'algèbre est une matière très abstraite, nous ne sommes pas habitués aux notions d'algèbre. Parfois nous avons le sentiment qu'il y a contradiction entre nos connaissances du lycée et celles de Prépas (exp : la relation entre espace vectoriel et les vecteurs du secondaire).*

3) *Le plus difficile en algèbre, c'est qu'il est nouveau pour nous, il est totalement différent de ce qu'on a étudié au secondaire. Même ce qu'on étudie est un peu vague et trop général de façon qu'on n'arrive pas à découvrir l'utilité. Par exemple les structures des groupes…, ce qui rend les démonstrations plus difficiles.*

R_4 : Comprendre les démonstrations de cours

1) *Je crois qu'en algèbre les démonstrations des théorèmes et des propriétés sont très difficiles, en plus des nouvelles notions qu'on rencontre pour la première fois.*

2) *Ce qui me paraît difficile en algèbre ce sont les longues démonstrations des théorèmes que je n'arrive pas à refaire même si j'ai bien saisi les idées importantes de la démonstration.*

R_5 : Le manque de temps par rapport à la quantité de notions à apprendre

1) *Le nombre excessif de théorèmes et de propriétés pour chaque leçon me gêne beaucoup dans la préparation des devoirs.*

2) *Le problème en algèbre est le même pour toutes les matières en classes préparatoires, à savoir trop de nouvelles notions à assimiler en très peu de temps.*

3) *A mon avis, le fait de refaire le cours me semble un peu difficile à cause du manque de temps que presque tous les étudiants en souffrent, ainsi que le passage aux premiers exercices de la série.*

Analyse et commentaire

Les difficultés soulevées par les étudiants à propos de leur apprentissage de l'Algèbre confirment les constats établis dans les autres questions. Ces difficultés peuvent être imputées à deux facteurs essentiels : la nature des connaissances en jeu, et les conditions et choix institutionnels d'enseignement. Concernant le premier facteur, les étudiants trouvent que la nouveauté des notions en jeu, qualifiées « d'abstraites », le passage du cours aux applications et les nouvelles exigences en matière de démonstration, notamment en ce qui concerne la rigueur des raisonnements, l'usage des éléments de logique et la rédaction, sont des éléments nouveaux qui marquent des évolutions importantes par rapport à ce qu'ils ont appris au lycée et auxquels il leur est difficile de se familiariser. Pour le deuxième facteur, les étudiants trouvent que le grand écart entre les mathématiques du Secondaire et celles du Supérieur, aussi bien au niveau des contenus que sur le plan de la pratique mathématique, et le déséquilibre dans le rapport temps disponible/connaissances à apprendre, rendent plus difficile leur intégration dans la culture mathématique du Supérieur. Ceci pourrait expliquer, dans une certaine mesure, le cantonnement des étudiants dans des pratiques centrées sur la reproduction et la mémorisation de démonstrations faites et d'exercices résolus. Par ailleurs, l'importance dans les réponses des étudiants des occurrences relatives aux difficultés dans la résolution d'exercices, le passage du cours aux applications et la rédaction des textes mathématiques, nous semble significatif de la difficile acquisition, de façon autonome, de connaissances sur le fonctionnement mathématique (Castela, 2000) et de compétences de rédaction. Nous reviendrons sur ces points dans la conclusion.

IV. Conclusion

Un premier constat qu'on peut établir au vu des réponses au questionnaire est que les étudiants sont généralement conscients des évolutions qui s'opèrent dans l'enseignement des mathématiques lors du passage du lycée à l'université, ainsi que des exigences et des attentes qu'imposent ces évolutions sur le plan de la pratique mathématique et en matière de travail personnel. Les étudiants montrent aussi le souci de surmonter les difficultés qu'ils éprouvent. Néanmoins, faute de préparation appropriée au Secondaire et d'une prise en charge par l'enseignement supérieur des apprentissages qui font défaut, la plupart des étudiants semblent miser trop prioritairement sur des comportements qui se révèlent insuffisants pour permettre les adaptations visées, comme la mémorisation et la reproduction d'exercices corrigés. Les difficultés soulevées par les étudiants à propos de leur apprentissage de l'Algèbre sont de deux types, celles attribuées au savoir enseigné et à son mode de présentation, et celles liées aux choix et contraintes institutionnels d'enseignement. Pour le premier type, une première source de difficultés évoquée par les étudiants concerne la nature abstraite des notions étudiées et l'écart entre les connaissances du lycée et celles de l'université. Outre le formalisme et l'axiomatique afférents aux nouvelles notions, les étudiants évoquent l'absence de liens apparents entre les connaissances du Secondaire et celles du Supérieur (certains parlent même de contradiction) et l'embarras qu'ils éprouvent à mettre les savoirs enseignés en fonctionnement dans la résolution des exercices et problèmes. Plusieurs travaux de didactique se sont intéressés à de telles difficultés. Dorier et al. (1997) trouvent ainsi qu'une « *exposition [classique] des notions d'algèbre linéaire en tant qu'objets bien ordonnés d'une théorie unifiée et abstraite risque de manquer complètement son but auprès des étudiants : ceux-ci n'auront aucune raison de rentrer dans la logique du rôle de ces notions, ou de percevoir l'économie réalisée dans la résolution de nombreux problèmes…* » (ibid., p. 292). Les auteurs soulignent dans ce contexte l'intérêt d'une prise en compte du « levier méta »[68] dans l'enseignement des mathématiques au début de l'enseignement supérieur, amenant un questionnement et une réflexion sur la nature des notions et connaissances visées, leur fonctionnement et utilisation, ainsi que sur leurs caractéristiques épistémologiques, comme le caractère unificateur, généralisateur des notions d'algèbre linéaire. D'un autre côté, la mise en fonctionnement des savoirs enseignés dans la résolution des problèmes renvoie au *problème de Polya* (Bosch et Gascon, 2005)[69] sur l'apprentissage et la construction de stratégies complexes de résolution de problèmes. Le traitement d'un point de vue organisationnel et curriculaire de ce problème conduit à considérer la construction et l'utilisation de stratégies de résolution de problèmes et la connaissance des modes d'intervention des praxéologies mathématiques dans les exercices et problèmes, comme du ressort de l'institution. Ceci implique l'identification des facteurs, origines des difficultés éprouvées dans la matière et de « conditions suffisantes » d'acquisition (Robert, 1998), pouvant aider à surmonter ces difficultés. S'inspirant des pratiques expertes et considérant que les mathématiques enseignées dans le Supérieur ressemblent, dans une certaine mesure, aux mathématiques des experts, A. Robert (ibid.), décrit des catégories habituellement utilisées par les mathématiciens professionnels pouvant apporter des éléments sur les pratiques attendues de la part des étudiants. Les plus importantes de ces catégories sont :

---

[68] Dorier et al. désignent par *« levier méta »* : « *le recours dans l'enseignement à des éléments d'information ou de connaissances SUR les mathématiques. Cela peut concerner le fonctionnement des mathématiques, leur utilisation, leur apprentissage, ce peut être des éléments généraux ou particuliers* » (Dorier et al., 1997). Les auteurs retiennent plus précisément les éléments suivants :
- des informations constitutives de la connaissance mathématique,
- des informations constitutives du fonctionnement mathématique,
- des informations de nature épistémologique sur les mathématiques. (ibid., p. 186)

[69] Qu'on peut résumer dans le questionnement suivant : *« comment obtenir que les élèves apprennent à construire et à utiliser adéquatement des stratégies complexes pour résoudre de "vrais" problèmes mathématiques, une fois qu'ils dominent les techniques mathématiques élémentaires et qu'ils ont acquis les connaissances nécessaires qui leur sont associées ? »* (Bosch et Gascon, 2005, p.107) (cf. Chap. I)

- Le caractère « *disponible* » des connaissances et leur « *organisation* ».

- L'existence de « *repères* » dépendant du stock de connaissances organisées du mathématicien, et permettant un contrôle (systématique) interne dans toute situation mathématique. Ce contrôle se traduit généralement par plusieurs types de questionnements (explicites ou implicites) concernant : la structure, l'homogénéité, la cohérence, le caractère local ou global, fini ou infini…

- L'existence de « *situations de référence* » constituant des points d'appui qui permettent de repérer une anomalie, de tester une hypothèse ou un calcul, de conjecturer…

- La possibilité de généraliser, de particulariser, de « *mettre en relation* » des situations différentes, des problèmes variés, des aspects différents d'un même énoncé (changement de points de vue)…

- La possibilité de calculer, longtemps si la situation l'exige.

- Le rôle de l'écrit (notamment dans la phase finale) comme générateur d'une dynamique de questionnements plus précis, rendue possible par « *une exigence de rigueur* » sur la chose écrite.

Concernant ce dernier point, Duval insiste sur le rôle que joue la pratique de l'écriture « *dans la découverte des démarches intellectuelles spécifiques aux démonstrations en mathématiques* » (Duval, 2000, p. 139). Il distingue dans ce contexte deux pratiques de l'écriture : *transcrire* et *écrire*. *« "Transcrire", est une simple reprise de la parole qui reste le mode de référence pour l'explicitation et la compréhension : transcrire est une production graphique*[70] *qui accompagne la parole ou qui la prolonge. Son fonctionnement cognitif reste celui de l'expression orale* » (p. 146) connue pour « *ne pas rechercher la précision, de multiplier les implicites, de privilégier les métaphores* » (p. 155) et où *l'organisation des propositions et la restructuration du discours produit ne se font pas, ou très peu* (p. 146). L'« *écriture* », par contre est une pratique qui *exige, de la part des sujets, un plus grand contrôle conscient […] et une restructuration du discours par rapport à la parole* (p. 141-142). Duval postule que « *c'est seulement au niveau de la pratique écrite que les possibilités discursives d'une langue*[71]*, et particulièrement les formes de raisonnement valide, peuvent être réellement mobilisées et perçues par les sujets. L'écriture est la véritable épreuve de compréhension et d'interprétation des démarches théoriques* » (p 146).

[70] Duval désigne ici par l'adjectif « graphique » le code graphique utilisé dans la pratique écrite d'un langage. Il désigne par le terme « écriture » l'utilisation de ce code graphique pour produire graphiquement et non vocalement un message linguistique et par le verbe « écrire » le travail spécifique de recherche portant sur l'expression (Duval, 2000. p 141)

[71] Pour Duval, les représentations sémiotiques utilisées en mathématiques en font une langue formelle qui permet de développer un discours au même titre que les langues naturelles. (Duval, 2000. p166)

Les productions des étudiants dans le test d'évaluation, marquées par un manque de précision, la présence de nombreux implicites, et non-conformité dans l'usage du symbolisme mathématique…, pourraient être assimilées à des *transcriptions* (dans le sens de Duval) entrainées par des habitudes contractées dans le travail personnel, et un manque d'intérêt pour la mise au propre des solutions d'exercices résolus (cf. question 4). Elle montre aussi que la reproduction d'un travail fait (démonstrations, solutions d'exercices…) n'a pas un grand impact sur l'aptitude de produire individuellement et de façon conforme des solutions d'exercices non encore rencontrés. Ces insuffisances sur le plan de la rédaction pourraient aussi être à l'origine de certaines difficultés de raisonnement. En effet, pour Duval, « *le passage de transcrire à écrire se heurte à des difficultés fonctionnelles complexes qui conduisent très vite le sujet à un sentiment de blocage ou à un mutisme mental* » et l'auteur ajoute, qu'*« il est difficile que les élèves en formation initiale […] puissent d'eux-mêmes passer de l'expression orale à l'« écrire », sans que l'enseignement le prenne systématiquement en charge* » (p. 151 et 161). Dans notre cas, l'écart mis en évidence lors de l'étude des rapports institutionnels nous permet de considérer que les étudiants en CPS1 sont en formation initiale, vis-à-vis des mathématiques formelles qu'ils apprennent et du symbolisme qu'ils manipulent.

En guise de conclusion, à l'Université, où les étudiants sont censés être autonomes, et avoir un rapport stratégique vis-à-vis des savoirs à acquérir (Castela, 2007b), plusieurs chercheurs s'accordent sur le fait qu'il revient à l'institution d'assumer une part de responsabilité dans la construction de cette autonomie et d'organiser un système didactique permettant l'acquisition d'apprentissages ignorés (ibid.) mais pourtant nécessaires à la réussite des apprenants et à une bonne appropriation du savoir enseigné. L'ingénierie que nous présentons dans le chapitre qui suit propose une expérimentation visant à étudier des possibilités d'action sur le système didactique dans les classes préparatoires CPS1, et les impacts d'une telle action.

Chapitre V : Ingénierie didactique

Ce chapitre est consacré à l'expérimentation d'une ingénierie didactique visant à étudier les possibilités d'action au niveau du système didactique en vue d'améliorer les aptitudes des étudiants dans l'activité de résolution de problèmes et particulièrement dans la mise en fonctionnement des notions ensemblistes fonctionnelles dans les problèmes. Cette ingénierie a été réalisée avec nos étudiants de CPS1 dans l'année qui a suivi l'année d'observation et d'analyse dans laquelle nous avions réalisé le test diagnostique, le test d'évaluation et le questionnaire. Elle a par conséquent intéressé une population autre que celle concernée par les travaux antérieurs. Néanmoins, les réponses de cette nouvelle population au même test diagnostique, le suivi régulier du travail des nouveaux étudiants en classe et l'examen de leurs productions dans les évaluations ordinaires permettent d'émettre l'hypothèse que les résultats obtenus suite aux travaux antérieurs peuvent être étendus à la nouvelle population. Ceci étant, l'ingénierie que nous présentons ici fait partie d'une action de remédiation organisée selon deux modalités : un travail à long terme qui a concerné tous les étudiants d'une classe de CPS1 et un travail en temps limité qui a concerné un groupe réduit d'étudiants volontaires de cette même classe. C'est cette deuxième modalité que nous présentons dans ce chapitre.

I. Introduction

Les analyses et travaux antérieurs ont permis de mettre en évidence les difficultés qu'éprouvent les étudiants dans leur apprentissage de l'Algèbre et particulièrement en ce qui concerne l'usage et la mise en fonctionnement des notions ensemblistes fonctionnelles dans la résolution des problèmes. Ces difficultés peuvent être résumées dans les points suivants :

- obstacles dus à l'aspect formel et abstrait des mathématiques enseignées ;

- difficultés dans l'usage du langage ensembliste et plus généralement du symbolisme mathématique, entraînant des difficultés sur le plan de la rédaction et des blocages au niveau du raisonnement ;

- difficultés dans la mise en fonctionnement dans les exercices et problèmes des notions étudiées dans le cours, notamment pour la réalisation de tâches non routinières demandant disponibilité de connaissances, adaptabilité et inventivité.

Ces difficultés ne résultent pas du contenu technologique du savoir enseigné qui, du reste, se présente de façon bien structurée et convenablement organisée, ni même d'une méconnaissance de ce savoir, vu que dans le test d'évaluation les formulations données par les étudiants à propos des notions mises en jeu sont dans leur ensemble correctes. Ces difficultés sont plutôt liées aux composantes pratiques des organisations mathématiques (Castela, 2007b) mises en œuvre dans les exercices (ce que désigne Castela par *folklore* mathématique). L'étude des rapports des institutions « enseignement secondaire » et « classes préparatoires scientifiques » aux notions ensemblistes fonctionnelles et les réponses des étudiants au questionnaire ont bien mis en évidence le rôle joué par la rupture ES/CPS1, concernant l'enseignement des notions ensemblistes fonctionnelles, et l'impact des choix et contraintes institutionnelles dans l'émergence et la résistance des difficultés constatées.

Prenant appui sur les travaux de Castela (2008b), nous postulons donc qu'« *une action appropriée au niveau de l'enseignement pourrait favoriser l'acquisition de connaissances d'ordre pratique qui, bien qu'elles débordent le savoir théorique, s'avèrent nécessaires pour le fonctionnement du savoir enseigné.*

L'ingénierie didactique que nous présentons ici se fonde sur cette hypothèse.

II. Conception générale de l'ingénierie

Tenant compte des résultats obtenus suite à nos travaux antérieurs, notre action (visant l'acquisition de connaissances d'ordre pratique) s'est articulée autour de deux axes :

1) ***La pratique de l'écrit***, qui, par ce qu'elle requiert de contrôle conscient sur la production écrite, de travail d'organisation et de restructuration, apparaît, comme la seule à travers laquelle les possibilités discursives du langage symbolique, et les formes de raisonnement valide, peuvent être mobilisées et perçues par les sujets (Duval (2000).

2) ***Le fonctionnement mathématique*** (Castela, 2000). Il s'agit dans ce contexte de concevoir un dispositif mettant en jeu des connaissances sur les modes d'intervention des objets mathématiques dans les solutions de problèmes.

Pour le premier point, notre travail s'est inscrit dans le cadre de l'enseignement ordinaire tout au long de l'année. Des interventions au niveau des cours et un travail à la maison spécifique concernant la résolution d'exercices ont été programmés pour cela. En ce qui concerne les cours, pour chaque leçon, des démonstrations ont été laissées à la charge des étudiants. Ils devaient les préparer en avance et les exposer au tableau lors de l'étude de la leçon correspondante. Ce travail s'est fait à tour de rôle de manière à faire participer tous les étudiants de la classe. Pour le travail à la maison, des devoirs maison, qui d'habitude se font à raison d'un devoir par trimestre, ont été donnés tous les mois. Ces devoirs consistaient en la résolution et la mise en propre d'exercices soigneusement choisis dans les fiches de TD. Les étudiants ont été chargés, à tour de rôle, de présenter leur travail au tableau, et des discussions à propos des difficultés et erreurs les plus fréquentes rencontrées ont été systématiquement menées en classe. Comme nous l'avons signalé ci-dessus, ce travail ne sera pas présenté dans le cadre de cette thèse[72]. Néanmoins, certains progrès (que nous indiquons lorsque l'occasion

[72] Vu les contraintes de temps du travail de thèse, nous avons choisi de concentrer notre travail d'analyse sur l'ingénierie de remédiation menée avec le groupe d'étudiants volontaires. Les données recueillies au cours de l'année restent à exploiter.

se présente) observés chez les étudiants dans l'ingénierie que nous présentons ici, nous semblent résulter de ce travail.

Pour le second point, une ingénierie didactique a été expérimentée visant, d'une part à identifier de façon plus précise l'origine des difficultés que rencontraient les étudiants dans l'activité de résolution de problèmes, notamment celles qui sont liées aux processus de raisonnement, lesquelles n'étaient pas nécessairement suffisamment clarifiées par l'analyse des productions des étudiants effectuée antérieurement, et d'autre part à mettre en place un dispositif expérimental visant à remédier aux difficultés constatées. Nous consacrons la suite de ce chapitre à la présentation de cette ingénierie didactique.

III. Contexte de travail de l'ingénierie

Les expérimentations se sont déroulées dans le courant du troisième trimestre de l'année universitaire 2007/2008 à l'Institut préparatoire aux études d'ingénieurs de Tunis (IPEIT). Pour réaliser nos expérimentations, nous voulions initialement agir au niveau de l'enseignement ordinaire en classe, mais des difficultés opératoires sont apparues au niveau de l'organisation et du suivi du travail des étudiants. Ces difficultés sont essentiellement dues au nombre élevé des étudiants dans la classe (31 étudiants), ce qui rend difficile le suivi du travail des étudiants en situation de résolution de problème, et à la faible marge de manœuvre que nous laissent les contraintes institutionnelles dans les classes préparatoires CPS1. Ceci nous a amené à examiner la possibilité de réaliser nos expérimentations en dehors des séances de classe. Au début, nous nous sommes heurté à un manque d'intérêt pour ce travail de la part des étudiants (qui ne voyaient pas le profit que pouvaient leur apporter de telles expérimentations didactiques), ainsi qu'au refus de l'institution qui trouvait que le rythme des études était si chargé pour les étudiants qu'il n'était pas possible de les engager dans des travaux supplémentaires (les étudiants ne disposent que de deux après midi libres par semaine qu'ils consacrent généralement à leur travail personnel). Pour contourner ces obstacles, nous avons proposé aux étudiants qui le désiraient des séances organisées en dehors des séances de classe pour un travail personnalisé. Douze étudiants ont accepté au départ de participer volontairement à ces séances et huit y ont participé très régulièrement.

En nous référant aux moyennes des notes d'Algèbre obtenues par ces douze étudiants à la fin du premier trimestre ainsi qu'à leur rang, nous pouvons considérer qu'ils constituent un échantillon représentatif de la classe. Toutes les catégories de moyenne et de rang sont en effet représentées dans ce groupe comme le montre le tableau suivant :

Tableau 1. Niveau institutionnel des étudiants

Etudiant	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8	E_9	E_{10}	E_{11}	E_{12}
Moyenne (Sur 20)	7,83	8,79	8,94	9,18	9,56	9,68	10,08	10,52	10,99	11,03	11,72	13,22
Rang (Sur 31)	29	22	20	16	15	14	13	11	9	8	7	1

Notons que vu la vocation de l’institution CPS1, qui consiste à préparer ses sujets au concours d’entrée aux écoles d’ingénieurs, les devoirs et examens donnés sont généralement assez difficiles et assez long par rapport au temps accordé aux épreuves. Pour cela, une moyenne de 9 est considérée très satisfaisante. Une moyenne de 8 correspond à un niveau moyen.

Ceci dit, l’ingénierie se compose de deux parties : une première partie qualifiée de « diagnostique », vise à identifier avec plus de précision les difficultés que rencontrent les étudiants lors de la résolution de problèmes d’Algèbre, quant à la deuxième partie, qualifiée de « remédiation », elle est consacrée à expérimenter un dispositif visant à aider les étudiants à surmonter les difficultés et insuffisances constatées dans la première partie et aussi dans les expérimentations antérieures réalisées avec la première population de CPS1. La première partie de l’ingénierie comprend deux séances de résolution d’exercices, quant à la deuxième partie, prévue au départ de s’étaler sur cinq séances, l’approche des examens de fin d’année nous a contraints à nous limiter à seulement trois séances. Bien que ceci ait réduit nos choix relatifs aux contenus thématiques et aux types d’exercices que nous envisagions de proposer et puisse avoir eu un impact sur l’apprentissage visé, nous pensons toutefois que les étudiants avec lesquels nous avons mené nos expérimentations, de par leur motivation et leur bon niveau d’étude représentaient un public qui pouvait atténuer, un tant soit peu, l’effet de cette contrainte.

Concernant le contexte d’enseignement de l’ingénierie, dans la période précédant les expérimentations, les étudiants ont étudié les chapitres suivants :

- Ensembles, applications et relations binaires
- Ensemble finis et dénombrement
- Arithmétique dans **Z**
- Structures algébriques
- Polynômes et fractions rationnelles
- Espaces vectoriels de dimension finie

Au cours des expérimentations (qui se sont étalées sur sept semaines) les chapitres sur les matrices et déterminants ont aussi été étudiés et travaillés.

IV. Ingénierie didactique. Partie diagnostique

Nous commençons par décrire la conception et l’organisation générale des deux séances diagnostiques, nous présentons et nous analysons ensuite les travaux concernant chacune des deux séances.

IV. 1. Déroulement des séances

Chacune des séances d’expérimentation comporte deux périodes de travail :

Première période (de réflexion et travail en groupes)

Pendant cette période, qui dure entre 30 et 40 minutes, les étudiants sont appelés à réfléchir à l'exercice posé. Répartis généralement en groupes de 2 à 4 étudiants selon leur choix, ils discutent ensemble de la résolution de l'exercice. Il leur est demandé de noter sur des feuilles les démarches entreprises, les résultats établis et éventuellement la solution obtenue. Les productions remises à l'enseignant à la fin de cette période ne constituent pas nécessairement des solutions finales et propres de l'exercice proposé, mais des brouillons que nous utiliserons pour analyser les processus de raisonnement adoptés et éventuellement les difficultés et obstacles rencontrés. Durant cette période, nous essayons de ne pas intervenir, nous supervisons le travail des étudiants et nous prenons note des discussions qui peuvent se dérouler entre eux. Dans le cas où certains étudiants se trouvent en situation de blocage, nous essayons de débloquer la situation par une intervention minimale.

Deuxième période (de discussion collective)

A l'issue de la période de réflexion et de travail en groupes, et après avoir pris connaissance des différentes productions remises par les étudiants, nous engageons avec ceux-ci une discussion collective concernant ces productions.

Notre objectif dans cette période est double :

- analyser les stratégies de travail adoptées, comprendre la façon dont les étudiants ont fait sens du problème proposé, ce qui leur a posé problème et ce qui leur a permis de progresser, et les aider à l'expliciter ;

- amener les étudiants, autant que faire se peut, à corriger leurs erreurs éventuelles et aussi à tirer les leçons de cette expérience et à comprendre ce qui permet d'avancer, aussi bien au niveau des connaissances qu'au niveau des démarches de raisonnement.

IV. 2. Choix des exercices à proposer

Tenant compte des résultats obtenus dans le test d'évaluation (passé avec la première population d'étudiants), qui montrent que les questions d'ordre technique (comme les tâches de calcul ou les applications directes du cours) sont généralement bien réussies par les étudiants, et vu les possibilités réduites (pour le nombre de séances) pour réaliser les expérimentations, nous avons focalisé notre travail dans cette partie de l'ingénierie essentiellement sur la résolution de tâches dépourvues d'indications et qui requièrent une mobilisation et une disponibilité de connaissances. Nous distinguons dans ce contexte deux types de problèmes :

- les problèmes d'existence et de construction ;

- les problèmes de démonstration.

Le premier type concerne les problèmes où les étudiants sont appelés à déterminer ou à construire un objet mathématique (ensemble, élément d'un ensemble, application, isomorphisme…), ou du moins à prouver son existence. Quant au deuxième type, il concerne les problèmes où il s'agit de prouver un résultat donné sans qu'une construction auxiliaire d'objet mathématique ne soit demandée. Nous illustrons cette classification par les trois exercices suivants extraits de fiches de TD des étudiants.

Exercice 1

Soit f un endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ *de rang 1.*
1. Montrer qu'il existe un réel k unique tel que $f^2 = k.f$
2. Montrer que si k est différent de 1, alors $(f - \mathrm{Id}_{\mathbf{R}^n})$ *est inversible.*
Exprimer l'inverse de $(f - \mathrm{Id}_{\mathbf{R}^n})$.

Catégorie : Chacune des deux questions de l'exercice comprend deux tâches. Le tableau ci-dessous précise la catégorie a priori de chacune des tâches. Concernant la question 2, on peut bien sûr montrer que $(f - \mathrm{Id}_{\mathbf{R}^n})$ est inversible en exhibant son inverse, mais le texte de l'exercice suggère plutôt une démonstration directe. C'est pourquoi la question est classée dans la catégorie démonstration.

Tâche	Catégorie
Existence de k	Existence
Unicité de k	Démonstration
$(f - \mathrm{Id}_{\mathbf{R}^n})$ est inversible	Démonstration
Inverse de $(f - \mathrm{Id}_{\mathbf{R}^n})$.	Construction

Exercice 2

Soient E un ***R****-ev de dimension finie n (n > 0) et f un endomorphisme de E nilpotent, d'indice de nilpotence n*
(ie : $f^n = \tilde{0}$ *et* $f^{n-1} \neq \tilde{0}$ *,* $n \in \mathbf{N}^*$*)*
Montrer qu'il existe un vecteur a dans E tel que $(a, f(a), \dots, f^{n-1}(a))$ *soit une base de E.*

Catégorie : La question comprend deux tâches :

Tâche d'existence et de recherche : Trouver un vecteur *a* candidat a priori.

Tâche de démonstration : Montrer que la famille $(a, f(a), \dots, f^{n-1}(a))$ est une base de *E*.

Remarquons qu'ici les deux tâches ne sont pas indépendantes, la recherche d'un vecteur *a*, candidat a priori, doit tenir compte de la condition $(a, f(a), \dots, f^{n-1}(a))$ base de E, ce qui demande de choisir *a* tel que $f^{n-1}(a)$ soit non nul.

Exercice 3

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie.
Montrer que tout sous-espace vectoriel F de E possède au moins un supplémentaire.

Catégorie : La question comprend deux tâches :

Tâche de construction : Trouver un sous espace vectoriel H convenable.

Tâche de démonstration : Montrer que H est un supplémentaire de F dans E.

Là encore, les deux tâches sont liées. Si par exemple on part d'une base de F que l'on complète en une base de E, on sait alors que le sous-espace engendré par les vecteurs rajoutés, est un supplémentaire de E. Dans ce cas, la tâche de démonstration sera réduite à une simple justification qui utilise un résultat du cours.

Notons que dans les fiches d'exercices données aux étudiants en classe[73], bien que les problèmes de démonstration sont généralement dominants en nombre par rapport à ceux d'existence et de construction, les problèmes de ce deuxième type occupent une place non négligeable dans le travail des étudiants (comme nous l'avons remarqué lors de l'étude du rapport de l'institution CPS1 aux notions ensemblistes fonctionnelles), de plus, ce type de tâches est fréquemment travaillés dans les démonstrations faites dans le cours. Néanmoins, le suivi du travail des étudiants en classe, ainsi que l'analyse du test d'évaluation nous ont permis de constater qu'en général les étudiants se trouvent plus à l'aise avec les tâches de démonstration qu'avec celles d'existence et de construction. Nous avons même remarqué une réticence de la part de beaucoup d'étudiants à travailler ce dernier type de tâches, prétendant qu'ils sont généralement difficiles à aborder.

V. Première séance diagnostique

L'exercice proposé dans cette séance est de type recherche.

V.1. Analyse a priori de l'exercice

Exercice

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n ($n \geq 2$).

H désigne un hyperplan de E (c'est à dire un sous-espace de E de dimension n-1)

Montrer qu'il existe une forme linéaire f non nulle sur E telle que H soit le noyau de f.

Analyse a priori

a) Objectif

L'objectif visé par ce problème est d'étudier les manières avec lesquelles les étudiants vont résoudre le problème de l'existence de l'application *f*. Nous nous intéressons particulièrement aux différentes stratégies adoptées pour définir *f* ainsi qu'au rôle joué par les contraintes imposées à *f* et leurs reformulations dans les démarches de raisonnement entreprises par les étudiants.

Dans l'analyse a priori que nous menons ci-après nous donnons des stratégies de résolution possibles du problème et nous précisons les facteurs dont dépend le développement de ces stratégies (identification des données, reformulations, connaissances utilisées…). Ceci nous

[73] Ces séries sont communes aux 13 classes CPS1 de l'institut IPEIT et sont préparées par les six enseignants d'Algèbre de ces classes.

permettra de prévoir les processus de raisonnement que pourraient entreprendre les étudiants ainsi que les différents types de difficultés et d'obstacles qu'ils pourraient rencontrer.

b) Contexte d'enseignement

Le problème proposé consiste à prouver l'existence d'une application f de E dans **K** vérifiant trois conditions : f linéaire, non nulle et Ker$f$ = H.

Deux méthodes sont généralement utilisées pour résoudre un problème d'existence d'objets mathématiques :

- Construire (ou exhiber) un objet satisfaisant les conditions données.

- Prouver que l'objet existe sans chercher à en déterminer un exemplaire.

Les étudiants ont rencontré en classe, à plusieurs occasions, des problèmes d'existence qui ont été résolus par l'une ou l'autre des deux méthodes. En plus des trois exercices cités plus haut, nous indiquons ci-dessous trois théorèmes qui établissent l'existence d'applications linéaires et qui ont été démontrés en classe dans le chapitre sur les espaces vectoriels de dimension finie.

Théorème (1)

Soit E un K-e.v de dimension finie p muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots , e_p)$ et F un K-e.v quelconque. Pour toute famille $(y_1, \dots , y_p)$ de p éléments de F, il existe une application linéaire f de E dans F, et une seule, telle que : $f(e_1) = y_1, \dots , f(e_p) = y_p$

Ici, l'existence de f est prouvée par construction explicite.

Théorème (2)

Tout K-e.v de dimension n ($n \in \mathbb{N}^*$) est isomorphe à K^n.

Dans ce théorème, l'isomorphisme est défini explicitement.

Théorème (3)

Soient E un K-e.v de dimension finie et F un K-e.v quelconque. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Im(f) est isomorphe à tout supplémentaire de Ker(f) dans E.

Dans ce théorème l'isomorphisme est déduit de l'application linéaire f donnée : on restreint f à un supplémentaire U de Ker$f$ et on montre que cette restriction induit un isomorphisme de U sur Imf.

Les démonstrations de ces trois théorèmes utilisent des applications linéaires définies de façon explicite mais, une fois démontrés, ces théorèmes permettent (entre autres) de prouver l'existence d'applications linéaires ou d'isomorphismes entre espaces vectoriels sans chercher à expliciter ces applications linéaires ou isomorphismes (comme par exemple l'existence d'un isomorphisme entre deux espaces vectoriels dès que l'on sait qu'ils ont même dimension).

Notons d'un autre côté que l'exercice posé dans la séance d'expérimentation énonce le résultat d'un théorème connu d'algèbre, à savoir :

Théorème

Tout hyperplan H d'un K-e.v E de dimension finie est le noyau d'une forme linéaire non nulle *h*, unique à un facteur scalaire non nul près.

Ce théorème n'a pas été traité en classe avant la séance d'expérimentation.

c) Analyse en termes de tâches et de stratégies de résolution

Le problème est de type « recherche », il comprend une seule tâche qui consiste à montrer l'existence d'une application *f* sous des contraintes données. Les théorèmes établis dans le cours ne permettent pas de réaliser cette tâche de façon immédiate (autrement dit par une technique de déduction directe).

L'énoncé comprend six données :

- Trois hypothèses :

- E est un **K**-espace vectoriel
- E est de dimension finie n (n > 1)
- H est un hyperplan de E

- Trois contraintes concernant *f* :

- *f* est une forme linéaire sur E
- *f* est non nulle
- Ker*f* = H

Ces contraintes jouent un double rôle : d'une part, ce sont des données qui aident dans la recherche de *f*, d'autre part, ce sont des conditions qu'il faut vérifier une fois que *f* est déterminée. Si le noyau de *f* est bien H, il est sûr que *f* n'est pas nulle, donc la seconde condition est en fait redondante. Cette redondance n'est cependant pas forcément perçue immédiatement par les étudiants.

Rôle et différentes reformulations possibles des informations contenues dans l'énoncé

1) E est un K-espace vectoriel

Cette hypothèse délimite le contexte de l'exercice (algèbre linéaire) et permet l'introduction des autres données. D'un autre côté, elle autorise l'utilisation du calcul vectoriel qui découle des axiomes définissant un **K**-espace vectoriel.

2) E est de dimension finie n (n > 1)

Cette hypothèse donne la possibilité de travailler sur une base de n vecteurs de E, elle précise le contexte dans lequel est défini l'hyperplan H, et servira à donner une reformulation convenable de l'hypothèse : « H hyperplan de E »

3) H est un hyperplan de E

Cette hypothèse est utilisée dans la troisième contrainte sur *f*. La stratégie qui sera suivie dans la résolution du problème dépendra de la manière dont cette hypothèse sera reformulée.

Dans un espace vectoriel quelconque, cette hypothèse signifie que H possède un sous-espace vectoriel supplémentaire de dimension 1.

Tenant compte du fait que E est de dimension finie n et que n >1, on déduit que H est un sous-espace vectoriel de E de dimension (n-1), non réduit à $\{O_E\}$.

Trois reformulations (au moins) sont possibles pour cette hypothèse :

R_1 : On fixe une base $(e_1, \ldots , e_{n-1})$ de H qu'on complète en une base $(e_1, \ldots , e_{n-1} , e_n)$ de E.

R_2 : On écrit que E est somme directe de H et d'un sous-espace vectoriel H' de E de dimension 1 : $E = H \oplus H'$

R_3 : On écrit que E est somme directe de H et d'une droite vectorielle engendrée par un vecteur non nul a de E\H : $E = H \oplus \langle a \rangle$

4) *f* est une forme linéaire sur E

Cette donnée signifie que *f* est une application linéaire de E dans **K**.

Pour tout x dans E, *f*(x) est donc un scalaire de **K** (dépendant de x).

La linéarité de *f* servira pour déterminer une expression plus simple de *f*(x) lorsque x est décomposé sur une somme directe de sous-espaces de E. Elle donne aussi la possibilité de définir *f* par la donnée de l'image d'une base de E.

5) *f* est non nulle

Cette donnée signifie qu'il existe au moins un x dans E tel que $f(x) \neq O_{\mathbf{K}}$

6) Ker*f* = H

Cette donnée est équivalente à :

$\forall x \in H$, $f(x) = O_{\mathbf{K}}$ (traduit l'inclusion $H \subset \mathrm{Ker}f$)

et $\forall x \notin H$, $f(x) \neq O_{\mathbf{K}}$ (traduit l'inclusion $\mathrm{Ker}f \subset H$)

Les données (4), (5) et (6) représentent, comme souligné plus haut, à la fois des contraintes qui limitent le choix de *f* et une aide à la recherche de *f*.

Rappelons que si l'on élimine la condition « *f* est non nulle » on ne réduit pas les contraintes imposées à *f*, puisque les données : Ker*f* = H et H hyperplan de E de dimension supérieure ou égal à 1 (donc $\mathrm{Ker}f \neq E$) entraînent nécessairement que *f* soit non nulle. Toutefois, la donnée : « *f* est non nulle » peut aider à la construction de *f* dans le cas où l'inclusion $\mathrm{Ker}f \subset H$ n'est pas prise en compte par le sujet.

Possibilités d'exploitation des différentes données et stratégies de résolution possibles

Remarquons tout d'abord que la consigne donnée dans l'énoncé : « montrer qu'il existe une forme linéaire *f* … » n'est pas présentée sous forme « constructive » (comme : déterminer, définir, construire …). Ceci donne a priori deux choix pour la stratégie de démarrage :

1) Prouver l'existence de *f* sans chercher à définir *f* explicitement. (Stratégie non constructive)

2) Définir *f* explicitement. (Stratégie constructive)

Toutefois, nous estimons que les contraintes imposées à *f* incitent à la définir à l'aide d'une stratégie constructive.

1) Stratégie non constructive

Cette stratégie suppose l'utilisation d'un théorème qui assure l'existence de *f* sous les contraintes indiquées. Les théorèmes étudiés en classe avant l'expérimentation ne permettent pas à une telle stratégie d'aboutir.

2) Stratégies constructives

Nous donnons ci-dessous deux stratégies qui peuvent être adoptées pour la construction de *f*. Nous indiquons ensuite des connexions possibles entre ces deux stratégies qui peuvent donner lieu à d'autres stratégies de résolution.

Stratégie 1

Cette stratégie utilise le théorème (1) (voir (b) plus haut), en prenant **K** pour l'espace vectoriel F.

On choisit une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E, des scalaires $k_1, \dots, k_n$ de **K** et on pose : $f(e_i) = k_i$ pour $i \in \{1,\dots,n\}$. D'après le théorème (1), l'application *f* ainsi définie est une forme linéaire sur E.

Remarquons que si la base $(e_1, \dots, e_n)$ et/ou les scalaires $k_1, \dots, k_n$ sont choisis de façon arbitraire, l'application *f* obtenue est bien une forme linéaire sur E. Elle ne vérifie cependant pas nécessairement les conditions imposées à *f* par l'énoncé.

Pour que cette stratégie aboutisse au résultat demandé, il faut commencer par choisir une base convenable. Ceci demande que l'on tienne compte de l'hypothèse : H hyperplan de E.

Tâche (1) : Choix d'une base de E convenable

Selon la reformulation adoptée de l'hypothèse : « H hyperplan de E », trois possibilités se présentent :

- Si l'on adopte la reformulation $\mathbf{R_1}$, on fixe une base $(e_1, \dots, e_{n-1})$ de H qu'on complète en une base $(e_1, \dots, e_{n-1}, e_n)$ de E, où e_n est un vecteur n'appartenant pas à H.

- En utilisant la reformulation $\mathbf{R_2}$ (où $E = H \oplus H'$), on fixe une base $(e_1, \dots , e_{n-1})$ de H et une base (e_n) de H'. La famille $(e_1, \dots , e_{n-1} , e_n)$ donne alors une base de E.

- En utilisant la reformulation $\mathbf{R_3}$ (où $E = H \oplus \langle a \rangle$), on fixe une base $(e_1, \dots , e_{n-1})$ de H. La famille $(e_1, \dots , e_{n-1} , a)$ donne alors une base de E.

Dans la suite, quelle que soit la reformulation utilisée, la base choisie sera désignée par $(e_1,\dots,e_n)$

Tâche (2) : Choix des images de $e_1, \dots , e_{n-1} , e_n$

Un choix convenable de ces images doit tenir compte de la donnée : $\mathrm{Ker}f = H$.

- L'égalité $\mathrm{Ker}f = H$ (et plus précisément l'inclusion $H \subset \mathrm{Ker}f$) exige de poser :

$f(e_i) = O_{\mathbf{K}}$, pour tout $i \in \{1, \dots , n-1\}$

- La même égalité $\mathrm{Ker}f = H$ (et plus précisément l'inclusion : $\mathrm{Ker}f \subset H$, ou encore la condition : f non nulle) nécessite que l'on choisisse $f(e_n) = k$, où k est un scalaire <u>non nul</u>.

Tâche (3) : Récapituler les résultats établis dans les tâches 1 et 2.

D'après le théorème (1), le travail accompli dans les tâches 1 et 2 donne une définition complète de f et établit que f est une forme linéaire sur E. Ce travail permet en même temps d'obtenir que f est non nulle et qu'elle vérifie : $H \subset \mathrm{Ker}f$. Pour terminer la résolution du problème, il reste à vérifier que $\mathrm{Ker}f \subset H$.

Remarquons que certains étudiants pourraient ne pas trouver nécessaire de vérifier cette deuxième inclusion, en admettant que l'égalité $H = \mathrm{Ker}f$ est immédiatement établie dès lors qu'elle est utilisée dans la construction de f.

Tâche (4) : Vérification de l'inclusion : $\mathrm{Ker}f \subset H$.

Nous citons ci-dessous trois techniques qui permettent d'établir cette inclusion :

Technique 1

On a $H \subset \mathrm{Ker}f$ et $\dim H = n-1$, donc $\dim \mathrm{Ker}f \geq n-1$

D'autre part, $\dim \mathrm{Ker}f < n$ (car f étant non nulle, $\mathrm{Ker}f \neq E$)

D'où $\dim \mathrm{Ker}f = n-1 = \dim H$ et puisque $H \subset \mathrm{Ker}f$, on en déduit que $H = \mathrm{Ker}f$

Technique 2

On a que $\mathrm{Im}f \subset \mathbf{K}$ et $\mathrm{Im}f \neq \{O_{\mathbf{K}}\}$ (car f est non nulle)

Alors : $0 < \dim \mathrm{Im}f \leq 1$, c'est-à-dire $\dim \mathrm{Im}f = 1$

Le théorème du rang, donne : $\dim \mathrm{Ker}f = n-1$,

On termine ensuite comme dans la méthode 1

Technique 3

Montrer que Ker$f \subset$ H, revient à montrer que :

Pour tout $x \in E$, $f(x) = O_{\mathbf{K}} \Rightarrow x \in H$

Par contraposée, ou par passage au complémentaire ($H^c \subset (\mathrm{Ker}f)^c$), ceci revient à montrer que : Pour tout $x \in E$, $x \in E \backslash H \Rightarrow f(x) \neq O_{\mathbf{K}}$

On fait un raisonnement par l'absurde :

Supposons qu'il existe $x \in E \backslash H$ tel que : $f(x) = O_{\mathbf{K}}$

x s'écrit de façon unique sous la forme : $x = h + \lambda.e_n$,   où $h \in H$ et $\lambda \in \mathbf{K} \backslash \{O_{\mathbf{K}}\}$

Dans ces conditions, $f(x) = \lambda . f(e_n) = O_{\mathbf{K}}$ avec $\lambda \neq O_{\mathbf{K}}$

On en déduit que $f(e_n) = O_{\mathbf{K}}$.

Par suite f est partout nulle. D'où la contradiction.

Stratégie 2

Cette stratégie consiste à définir f explicitement (exprimer $f(x)$ pour tout x dans E). Pour que cette stratégie aboutisse au résultat demandé, il est nécessaire d'effectuer un choix convenable de la décomposition de x sur une somme directe de E. Un choix arbitraire de l'écriture de x pourrait constituer un obstacle pour la suite de la résolution.

Tâche (1) : Choix d'une forme d'écriture d'un vecteur quelconque x de E

Ceci utilise l'une des reformulations possibles de l'hypothèse : « H hyperplan de E »

- Selon la reformulation $\mathbf{R_1}$ (où $(e_1, \ldots, e_{n-1}, e_n)$ est une base convenablement choisie de E) tout vecteur x de E s'écrit de façon unique sous la forme : $x = \sum_{i=1}^{n} x_i.e_i$,

où $x_1, \ldots, x_n$ sont des scalaires de $\mathbf{K}$.

- Selon la reformulation $\mathbf{R_2}$ (où $E = H \oplus H'$), tout vecteur x de E s'écrit de façon unique sous la forme : $x = x_1 + x_2$ où $x_1 \in H$ et $x_2 \in H'$

- Selon la reformulation $\mathbf{R_3}$ (où $E = H \oplus \langle a \rangle$), tout vecteur x de E s'écrit de façon unique sous la forme : $x = h + \lambda.a$ où $h \in H$, $a \in E\text{-}H$ et $\lambda \in \mathbf{K}$.

Bien que chacune des trois reformulations permette de poursuivre la résolution, la technique utilisant la reformulation $\mathbf{R_2}$ est longue. Le sujet utilisant cette technique sera obligé, dans la suite de son travail (tâche 3), de fixer une base (a) de H', ce qui le ramènera à la reformulation $\mathbf{R_3}$.

Tâche (2) : Donner une expression à f(x)

Cette tâche comprend deux sous-tâches :

Sous-tâche (2.1) : Choix d'une écriture pour x et expression résultante de *f(x)*

En utilisant les contraintes sur f : f linéaire et H = Ker$f$ (ou plus précisément $H \subset \mathrm{Ker}f$), on obtient, selon la reformulation adoptée dans la tâche (1) et l'écriture de x qui en a résulté :

Pour $\mathbf{R_1}$: $\forall x\ (x = \sum_{i=1}^{n} x_i.e_i \Rightarrow f(x) = x_n.f(e_n))$

Pour $\mathbf{R_2}$: $\forall x$ (si $x = x_1 + x_2$ où $x_1 \in H$ et $x_2 \in H'$, alors $f(x) = f(x_2)$)

Pour $\mathbf{R_3}$: $\forall x$ (si $x = h + \lambda.a$ où $h \in H$, $a \in E \backslash H$ et $\lambda \in \mathbf{K}$, alors $f(x) = \lambda f(a)$)

Sous-tâche (2.2) : Expression des contraintes sur *f*

La condition : f non nulle, ou encore l'inclusion $\mathrm{Ker}f \subset H$, permet de préciser :

Pour $\mathbf{R_1}$: $f(e_n) \neq O_{\mathbf{K}}$

Pour $\mathbf{R_2}$: Il existe au moins x_2 dans H' tel que : $f(x_2) \neq O_{\mathbf{K}}$

Pour $\mathbf{R_3}$: $f(a) \neq O_{\mathbf{K}}$

Pour cette sous-tâche, il nous semble que la condition : « f non nulle », serait plus simple à examiner. Tenir compte de l'inclusion $\mathrm{Ker}f \subset H$, demande une bonne familiarité avec l'égalité ensembliste.

Tâche (3) : Récapituler les résultats établis dans les tâches 1 et 2.

A cette étape, le travail accompli via les reformulations $\mathbf{R_1}$ et $\mathbf{R_3}$ donne (en notant, si nécessaire, k l'image $f(e_n)$, ou $f(a)$) une définition complète de f. L'application f est ainsi définie à un facteur scalaire non nul prés.

Par contre, avec la reformulation $\mathbf{R_2}$, l'application f n'est pas entièrement définie. Il reste à préciser l'image d'un vecteur x_2 quelconque de H'. Pour ce faire, on fixe une base (a) de H' et on écrit que $x_2 = \lambda.a$ (où $\lambda \in \mathbf{K}$), ce qui rejoint la technique utilisée avec la reformulation $\mathbf{R_3}$.

Par ailleurs, la construction donnée à f (par chacune des trois reformulations) permet de déduire immédiatement que f est une forme linéaire non nulle vérifiant : $H \subset \mathrm{Ker}f$. (On pourrait, pour plus de détail, faire une vérification de la linéarité de f, comme on pourrait remarquer que la linéarité découle de la définition de f)

Tâche (4) : Vérification de l'inclusion : Ker*f* $\subset$ H

Même travail que dans la stratégie 1

Processus heuristiques de raisonnement

La résolution du problème posé requiert du sujet à la fois des connaissances mathématiques et des démarches intellectuelles. Bien que ces dernières restent inaccessibles à l'observateur, il nous semble néanmoins qu'il est possible de décrire les étapes heuristiques essentielles qui peuvent orienter ces démarches. Le tableau ci-dessous résume ces étapes dans le cas des stratégies 1 et 2. Nous désignons chacune de ces étapes par « *un pas de raisonnement* » (notée par P_i dans le tableau 1). Il nous semble important de souligner qu'il s'agit là d'une structure de référence pour analyser la tâche et les raisonnements susceptibles d'être impliqués dans sa résolution. Les choix y sont présentés comme des choix conscients ayant une fonctionnalité précise. Mais nous sommes bien conscients que la recherche d'un exercice obéit rarement à une logique aussi explicite et l'on s'attend de la part des étudiants à des démarches moins contrôlées, où la prise de sens des actions est étroitement imbriquée avec leur réalisation même, où les écritures produites génèrent les décisions autant qu'elles sont générées par ces dernières.

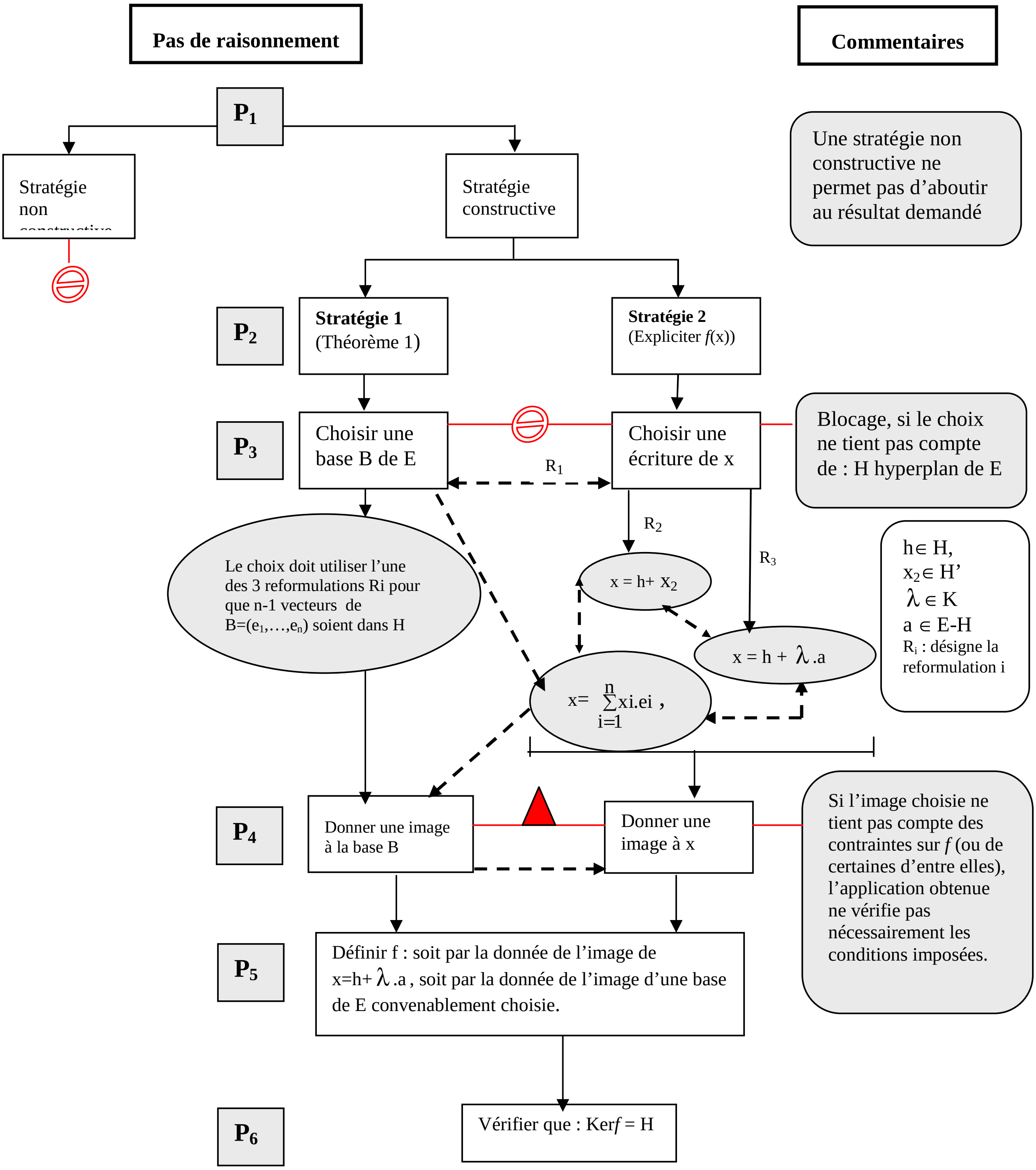
Tableau 2 : Pas de raisonnement des stratégies 1 et 2

Pas de raisonnement		Rôle
P_1	Reconnaître (comprendre) la consigne relative à l'existence de *f*	Choisir la stratégie de démarrage
P_2	Réfléchir à la stratégie de résolution **Stratégie 1** : utiliser le théorème 1 **Stratégie 2** : définir *f* explicitement	Organiser la stratégie
P_3	Effectuer un choix concernant les reformulations R_1, R_2 et R_3 **Stratégie 1** : en vue de fixer une base de E **Stratégie 2** : en vue de donner une écriture à un vecteur x de E	Préciser une technique pour la tâche 1
P_4	Faire le lien entre les contraintes sur *f* et : **Stratégie 1** : l'image d'une base de E **Stratégie 2** : l'expression de *f*(x)	Préciser une technique pour la tâche 2
P_5	Récapituler les résultats établis jusqu'à cette étape	- Vérifier si *f* est entièrement définie - Mettre en évidence la nécessité de vérifier l'inclusion : $\mathrm{Ker}f \subset \mathrm{H}$
P_6	Faire le lien entre les résultats établis et les informations contenues dans l'énoncé, en vue de réaliser la tâche 4	Préciser une technique pour la tâche 4

Nous appelons *processus heuristique de raisonnement* tout ensemble de pas de raisonnement. Un processus est dit *complet* (resp. *incomplet*) si l'ensemble des pas de raisonnement correspondant constitue une stratégie permettant (resp. ne permettant pas) d'aboutir au résultat attendu.

Structuration des stratégies 1 et 2 et interconnexions

Prenant en compte les connaissances mathématiques que requiert le développement des stratégies 1 et 2, ainsi que les pas de raisonnement qui constituent les étapes essentielles du processus heuristique de résolution, nous donnons dans ce qui suit une structuration sommaire des démarches que pourrait entreprendre un sujet lors de son travail de recherche d'une solution. Dans cette structuration, nous décrivons les points de convergence, les points de divergence et les interconnexions possibles des stratégies 1 et 2. Nous montrons comment ces interactions peuvent donner lieu à de nouvelles stratégies. Nous précisons en même temps les choix qui pourraient être sources d'obstacles et/ou de difficultés lors de la résolution du problème.



Organigramme 1

Désigne un blocage

Désigne une difficulté

Commentaire

Nous remarquons que les interconnexions éventuelles entre les deux stratégies 1 et 2 (désignées dans le schéma par des flèches en pointillés) se produisent principalement au niveau du troisième et du quatrième pas de raisonnement, et ceci par des allers et/ou retours entre tâches et techniques. Nous citons ci-après quelques exemples :

Exemple 1

Partant de la stratégie 1, une base B de E étant fixée, un sujet peut passer à la stratégie 2 en donnant une écriture de x dans cette base. Il exprime après *f*(x) en utilisant l'image de la base B. (Il peut aussi revenir à la stratégie 1 en se contentant de donner l'image de la base B)

Exemple 2

Partant de la stratégie 2, et en vue de choisir une écriture à x qui lui permet d'exprimer *f*(x), un sujet peut commencer par fixer une base de E (ce qui le ramène à la stratégie 1) dans laquelle il exprime x. Il donne après une image à x en utilisant l'image de cette base (l'image de la base le fait revenir une deuxième fois à la stratégie 1).

Exemple 3

Les trois techniques permettant de donner une écriture à x (tenant compte de l'hypothèse : H hyperplan de E) sont interconnectables. Par exemple, un sujet voulant décomposer x sur une base de E, peut commencer par écrire : $x = h + x_2$ où $h \in H$ et $x_2 \in H'$, préciser ensuite que H' est une droite vectorielle <a> et déterminer la composante de x_2 selon (a) : $x_2 = \lambda.a$, puis, à l'aide d'une base ($e_1, \dots, e_{n-1}$) de H, décomposer le vecteur h. A la fin, il obtient : $x = x_1.e_1 + \dots + x_{n-1}.e_{n-1} + \lambda.a$. De cette façon, le sujet utiliserait, à la fois, les trois reformulations de l'hypothèse : H hyperplan de E, dans la même tâche.

Ces interconnexions entre stratégies donnent de nouvelles méthodes de résolution (quoique plus longues que les stratégies 1 et 2). Les stratégies de démarrage, quant à elles, restent, nous semble-t-il, limitées à celles citées plus haut.

Pour conclure, nous voudrions souligner que cette analyse a priori nous aide à prendre la mesure de la complexité de la résolution, pour un débutant en algèbre linéaire, de cet exercice qu'un enseignant peut considérer comme on ne peut plus banal.

V. 2. L'expérimentation

La séance d'expérimentation s'est déroulée dans une après-midi libre pour les étudiants, elle a durée environ 90 minutes et les douze étudiants et étudiantes volontaires y ont participé.

V. 2. 1. Période de réflexion

Déroulement

Durant la période de réflexion, les étudiants se sont répartis selon les groupes suivants :

Groupe 1 : Elèves E_1, E_3, E_8 (E_1, E_3 < **M** et E_8 = **M**)[74]

Groupe 2 : Elèves E_6, E_9, E_{10}, E_{11} (E_6< **M**, E_9 = **M** et E_{10}, E_{11}> **M**)

Groupe 3 : Elèves E_2, E_4, E_5, E_7 (E_2, E_4, E_5< **M** et E_7 = **M**)

Groupe 4 : Elève E_{12} (E_{12} > **M**)

Nous remarquons qu'à part le groupe 4 réduit à un seul étudiant, au moins deux catégories d'étudiants sont représentées dans chacun des trois autres groupes.

Au commencement, nous nous sommes intéressés à la façon dont les étudiants abordent leur travail. Ainsi, à peine les feuilles de l'énoncé de l'exercice distribuées, nous remarquons une tendance presque générale chez les étudiants des différents groupes à commencer à prendre des notes et discuter ensemble des données du problème. L'étudiant E_{12}, par contre, commence par consacrer quelques minutes pour lire l'énoncé avant d'entamer le travail écrit.

Après environ cinq minutes, nous nous approchons des groupes et nous prenons note de leurs activités :

Groupe 1 : Les étudiants du groupe discutent ensemble sur la définition d'un hyperplan :

- H est un sev de dimension n-1
- Il existe donc un supplémentaire à H de dimension 1
- Que doit-on chercher ?
- On doit montrer que H = Kerf
- C'est quoi f ?
- C'est une forme linéaire

Les étudiants ne semblent pas bien saisir ce qui est exactement demandé dans l'exercice. Ils reprennent alors la lecture de l'énoncé.

Nous passons à un autre groupe

Groupe 2 : Les étudiants travaillent ensemble. Ils ont pris quelques notes sur leurs copies. Ils semblent rencontrer une difficulté. L'un des étudiants m'adresse la parole :

- On doit chercher f, or son noyau est donné, c'est H. Comment ça !

Nous lui demandons de réfléchir davantage sur les données de l'exercice.

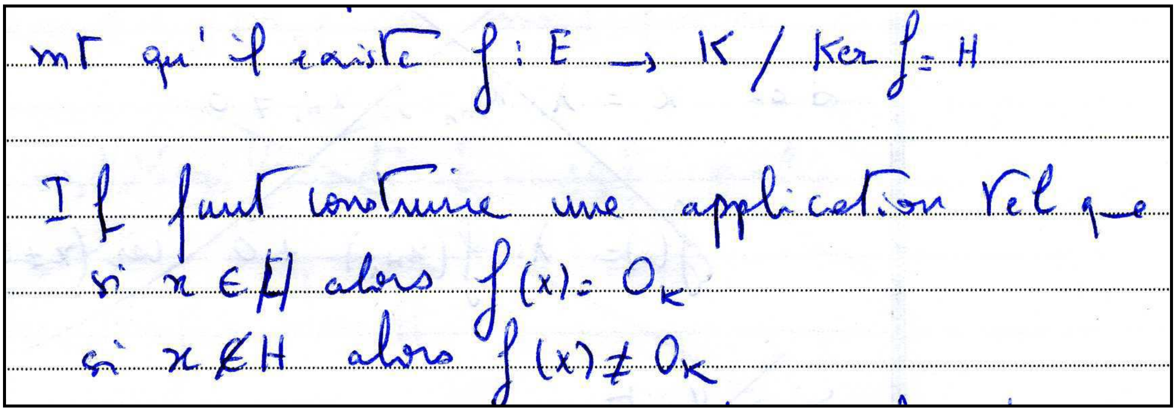
[74] Abréviation : E_i < M (resp. E_i = M, E_i > M) désigne que l'élève E_i est dans la catégorie « en dessous de la moyenne » (resp. moyenne, au dessus de la moyenne)

Groupe 3 : Les étudiants ont reproduit sur leurs brouillons les données de l'exercice. L'étudiant E_7 semble commencer déjà la résolution. Les autres discutent de la question posée. Certains d'entre eux s'interrogent :

- L'hypothèse H=Kerf, est-ce qu'on doit la vérifier à la fin ou on doit l'utiliser au début ?
- Et f ? C'est pas très clair …. Est ce qu'on doit commencer par chercher f ou par montrer que H=Kerf ?

Nous passons au groupe 3

Groupe 4 : L'étudiant E_{12} est encore concentré sur l'énoncé. Il commence à noter sur sa feuille une reformulation de la condition : Kerf = H. Ainsi, nous lisons :


mT qu'il existe $f : E \to K \,/\, \ker f = H$

Il faut construire une application tel que

si $x \in H$ alors $f(x) = 0_K$

si $x \notin H$ alors $f(x) \neq 0_K$

Commentaire

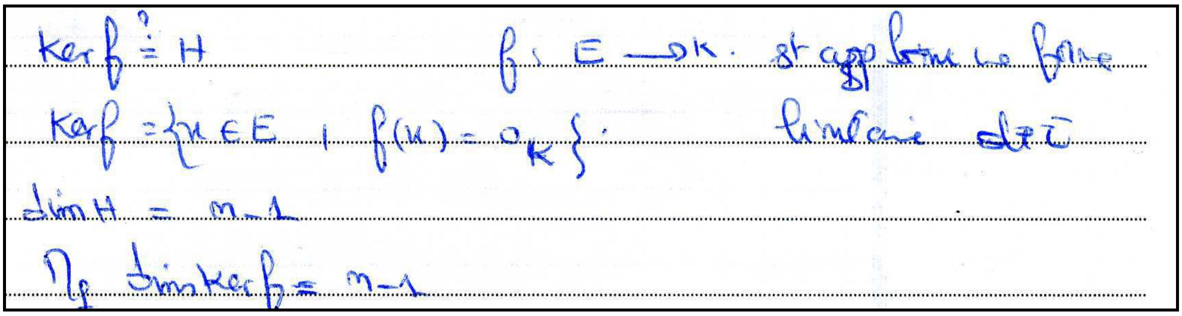
A part l'étudiant E_{12}, nous remarquons que les étudiants des autres groupes éprouvent encore des difficultés pour aborder le problème. Ces étudiants semblent être déstabilisés par les différentes données de l'exercice. Ils n'arrivent pas à s'approprier le statut et le rôle de chacune de ces données, ni à orienter leurs réflexions vers des stratégies de résolution appropriées. La recherche d'une application sous contraintes ne semble en rien une tâche familière pour eux, et ils ne disposent pas pour l'approcher d'une heuristique globale. En témoignent les questions posées sur l'utilisation de la contrainte kerf=H.

Intervention

Constatant les difficultés auxquelles se heurtent la plupart des étudiants pour résoudre l'exercice, nous leur demandons de s'attarder plus sur la lecture et l'analyse de l'énoncé, d'essayer de mieux s'approprier les différentes données de l'exercice et de bien comprendre ce qui est demandé.

Nous laissons ensuite les différents groupes poursuivre leur travail.

Après quelques minutes, nous revenons à l'étudiant E_7 du **groupe 3**, qui semble travailler seul. Voici ce que nous lisons sur sa copie



L’enseignant intervient :

P[75] : Pourquoi tu t’intéresses à la dimension de Kerf ?

E_7 : Pour démontrer que Kerf = H

P : Mais…, est-ce que ceci est demandé ?

E_7 : Il faut montrer que : « f existe et Kerf = H ». J’admets au départ l’existence de f.

L’enseignant écrit sur la feuille de l’étudiant : « f existe et Kerf = H » et lui demande de comparer ceci avec la question posée dans l’exercice.

L’étudiant relit et hésite à donner une réponse.

Nous soulignons sur la feuille de l’étudiant le mot « et » dans la phrase écrite.

Notre discussion attire l’attention des autres étudiants du groupe. L’un d’eux répond :

- En fait, il faut trouver f <u>telle que</u> Kerf = H.

P : Est-ce que vous voyez une différence entre <u>et</u> et <u>telle que</u> ?

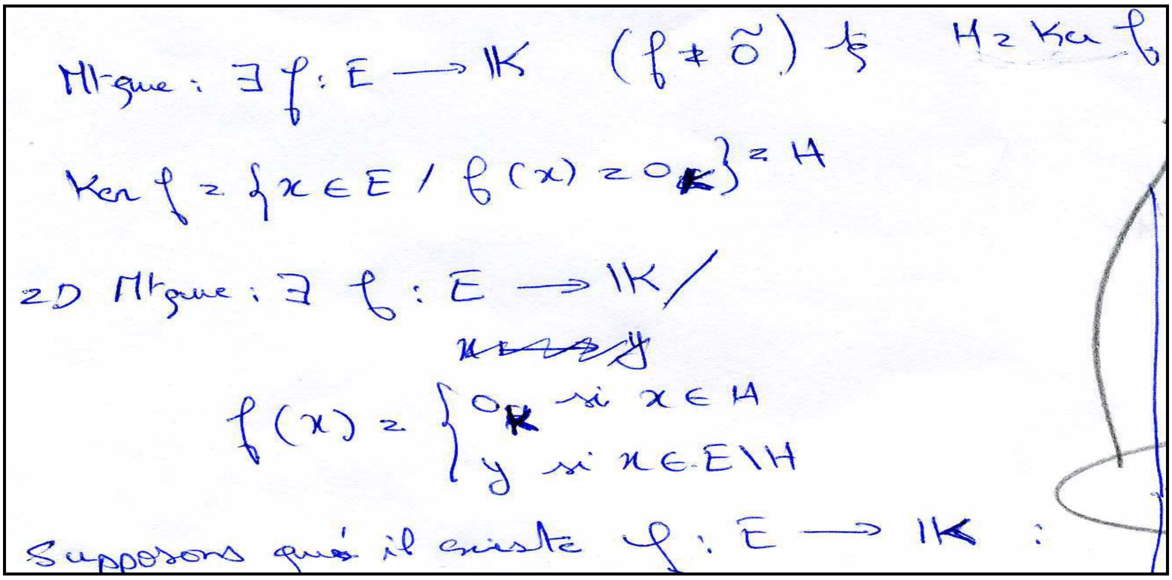
- oui, « <u>telle que</u> Kerf = H », c’est une condition.

Les étudiants relisent de nouveau l’énoncé et semblent réfléchir de nouveau sur la question…

Nous passons au **groupe 1**. Les trois étudiants travaillent ensemble. Lors de notre premier passage nous les avons laissé en train de discuter de la question posée dans l’exercice.

Sur une feuille où l’un des étudiants prend des notes, nous lisons :

[75] P désigne l’enseignant



Mq-que : $\exists f : E \longrightarrow \mathbb{K}$ $(f \neq \tilde{0})$ tq $H = \mathrm{Ker} f$

$\mathrm{Ker} f = \{x \in E \,/\, f(x) = 0_{\mathbb{K}}\} = H$

2) Mq-que : $\exists f : E \longrightarrow \mathbb{K}$ /

$\cancel{x \mapsto y}$

$$f(x) = \begin{cases} 0_{\mathbb{K}} & \text{si } x \in H \\ y & \text{si } x \in E \setminus H \end{cases}$$

Supposons qu'il existe $f : E \longrightarrow \mathbb{K}$:

Ici, les étudiants donnent une reformulation de la condition Kerf = H. Dans l'écriture f(x)=y, si $x \in E \setminus H$, les étudiants semblent désigner implicitement par y un scalaire non nul de **K**. On notera que le choix de l'ostensif y ne permet pas d'exprimer une dépendance par rapport à x de cette image. Nous reviendrons sur ce point important ultérieurement.

Dans la suite, les étudiants supposent que f existe. Je les laisse en train de discuter de la façon avec laquelle ils doivent prouver cette existence.

Nous passons au **groupe 2**.

Il semble que le problème soulevé par l'un des étudiants de ce groupe lors du premier passage ait été surmonté. Les étudiants essayent de définir f de façon explicite en décomposant un vecteur x de E sur une somme directe $H \oplus G$.

En revenant à l'étudiant E_{12}, nous le trouvons en train de reformuler les autres données de l'exercice et d'essayer d'organiser ces reformulations pour définir l'application f.

Trouvant que les étudiants commencent à trouver des pistes de travail plus ou moins appropriées, nous avons préféré ne plus intervenir pour permettre aux différents groupes de développer seuls leurs stratégies de travail.

Après environ trente minutes, durée que nous avons estimée suffisante pour que les étudiants aient mis en œuvre des stratégies de résolution et aient rédigé des solutions (ou du moins commencé à le faire), nous avons ramassé les copies des différents groupes pour commencer la deuxième période de travail.

Commentaire

Comme nous l'avons remarqué ci-dessus, la majorité des étudiants ne sont pas arrivés, au départ, à saisir ce qui est exactement demandé dans l'exercice et ils semblent avoir eu du mal à comprendre comment traiter les différentes données dont ils disposaient. Après notre intervention, et avec un retour sur l'énoncé, la plupart des étudiants ont réussi à surmonter cette difficulté et ont commencé à apercevoir des pistes de travail par la reformulation des données et la recherche de moyens permettant d'exploiter ces données pour répondre à la question posée. L'étudiant E_{12}, quant à lui, en prenant le temps nécessaire pour réfléchir sur l'exercice, est arrivé dés le début à organiser son travail et à fixer une stratégie de résolution Ceci nous amène à penser que les difficultés rencontrées au départ par la majorité des étudiants sont au moins partiellement dues à la manière avec laquelle ceux-ci ont commencé à aborder l'exercice : lecture rapide de l'énoncé conduisant à une appropriation insuffisante du problème à résoudre et un traitement superficiel des données.

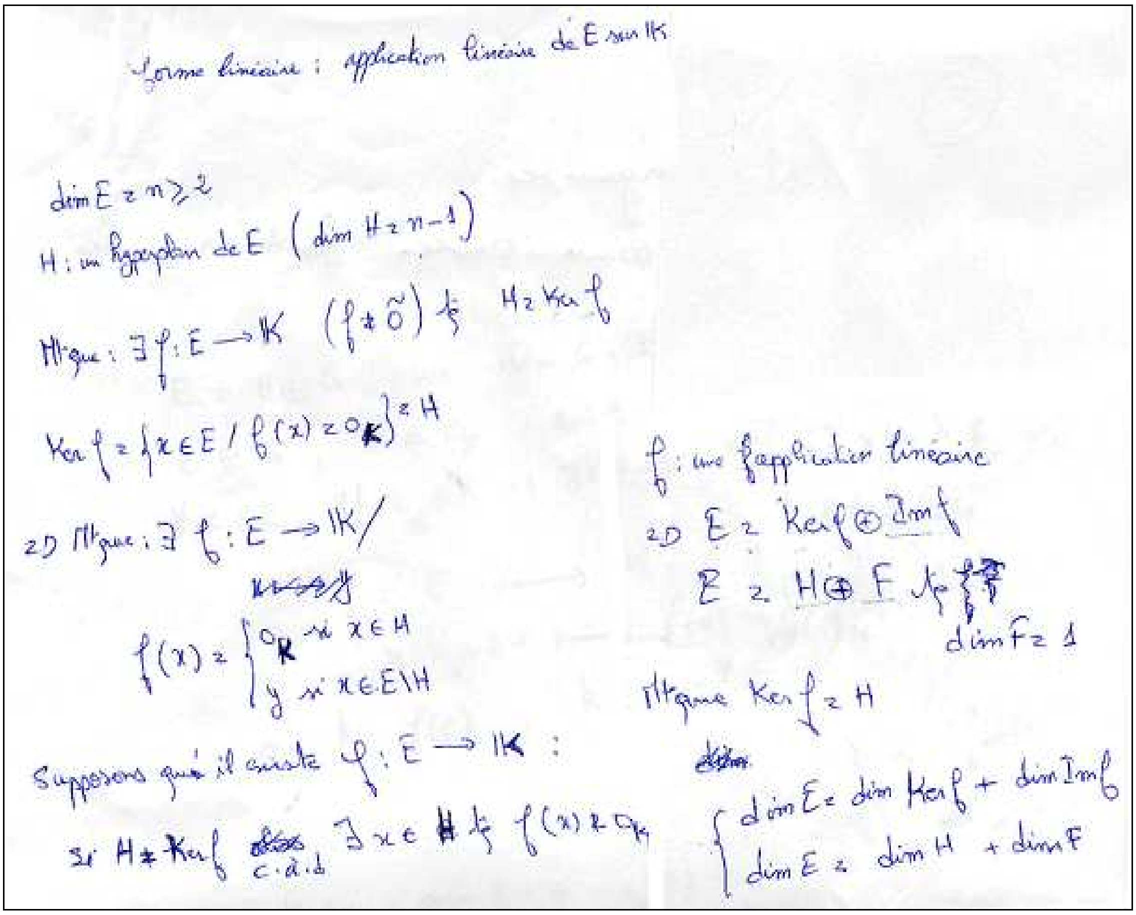
V. 2. 2. Analyse des copies des étudiants

Avant d'entamer la période de discussion, nous avons procédé à l'examen des différentes copies remises par les groupes d'étudiants et nous avons noté les remarques que nous avons trouvées utiles pour organiser la discussion collective et guider nos interventions.

Nous rapportons ci-dessous le travail que chacun des quatre groupes nous a remis ainsi que nos analyses et commentaires concernant ces travaux.

Groupe 1 (composé par : E_1, E_3 **< M** et E_8 **= M**) :

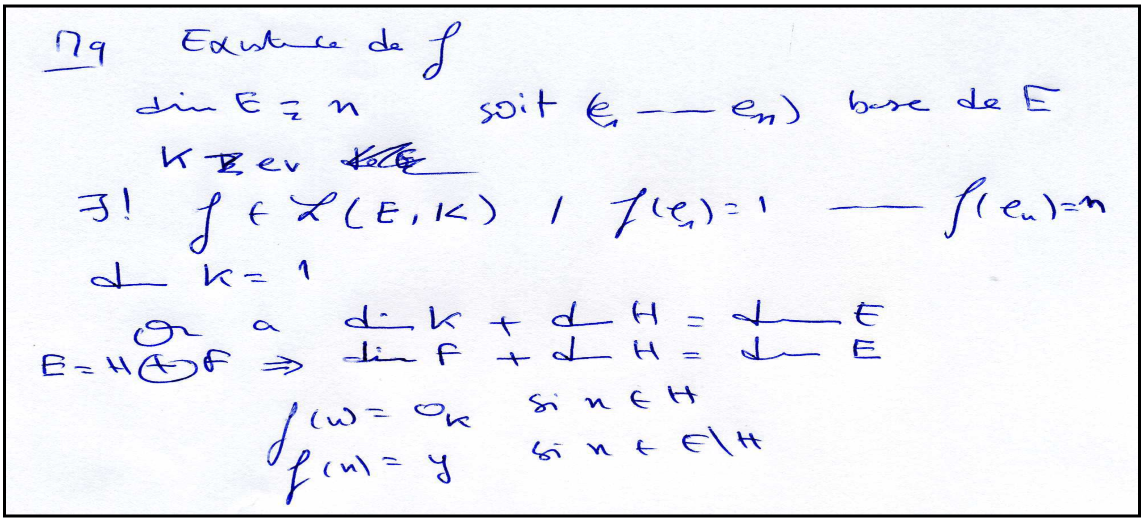
Le travail de ce groupe est donné dans deux feuilles séparées et rédigées par deux étudiants différents. Ces rédactions se complètent et présentent une certaine cohérence, ce qui laisse à croire que la production donnée dans les deux feuilles présente un travail collectif du groupe.


forme linéaire : application linéaire de E sur K

dim E = n ≥ 2
H : un hyperplan de E (dim H = n − 1)
Mque : ∃ f : E → K (f ≠ õ) tq H = Ker f
Ker f = {x ∈ E / f(x) = 0_K} = H
2) Mque : ∃ f : E → K /
f(x) = { 0_K si x ∈ H ; y si x ∈ E\H
Supposons qu'il existe φ : E → K :
si H ≠ Ker f c.à.d ∃ x ∈ H tq f(x) ≠ 0_K

f : une application linéaire
2) E = Ker f ⊕ Im f
E = H ⊕ F tq
dim F = 1
Mque Ker f = H
dim E = dim Ker f + dim Im f
dim E = dim H + dim F

Copie 1 (groupe 1, page 1)


Mq Existence de f
dim E = n soit (e_1 — e_n) base de E
K ev
∃! f ∈ $\mathcal{L}$(E, K) / f(e_1) = 1 —— f(e_n) = n
d— K = 1
On a di— K + d— H = d— E
E = H ⊕ F ⇒ di— F + d— H = d— E
f(x) = 0_K si x ∈ H
f(x) = y si x ∈ E\H

Copie 2 (groupe 1, page 2)

Analyse

Les étudiants envisagent de définir f explicitement. Ils commencent par donner une reformulation de H=Kerf, ce qui leur permet de connaître l'image des éléments de H. Ils semblent ensuite éprouver des difficultés à définir de façon opératoire l'image d'un vecteur de E\H. La notation "y" porte implicitement le fait que l'image est non nulle mais elle ne permet pas de relier x à son image ; "y" apparaît comme la notation d'un objet libre dans **K**. Il faut dépasser ce stade pour avancer dans la résolution et, visiblement, les étudiants n'y parviennent pas. Ils admettent alors, dans un premier temps, l'existence de f et cherchent à prouver que la condition H=Kerf est bien vérifiée. Pour cela, ils essayent de procéder par l'absurde en supposant que $H \neq Kerf$. Les égalités écrites dimE=dimKerf+dimImf et dimE=dimH+dimF laissent penser qu'ils ont voulu comparer les dimensions de H et de Kerf pour arriver au résultat. Avant les égalités de dimensions, nous remarquons sur la feuille deux autres égalités concernant la décomposition de E en une somme directe :

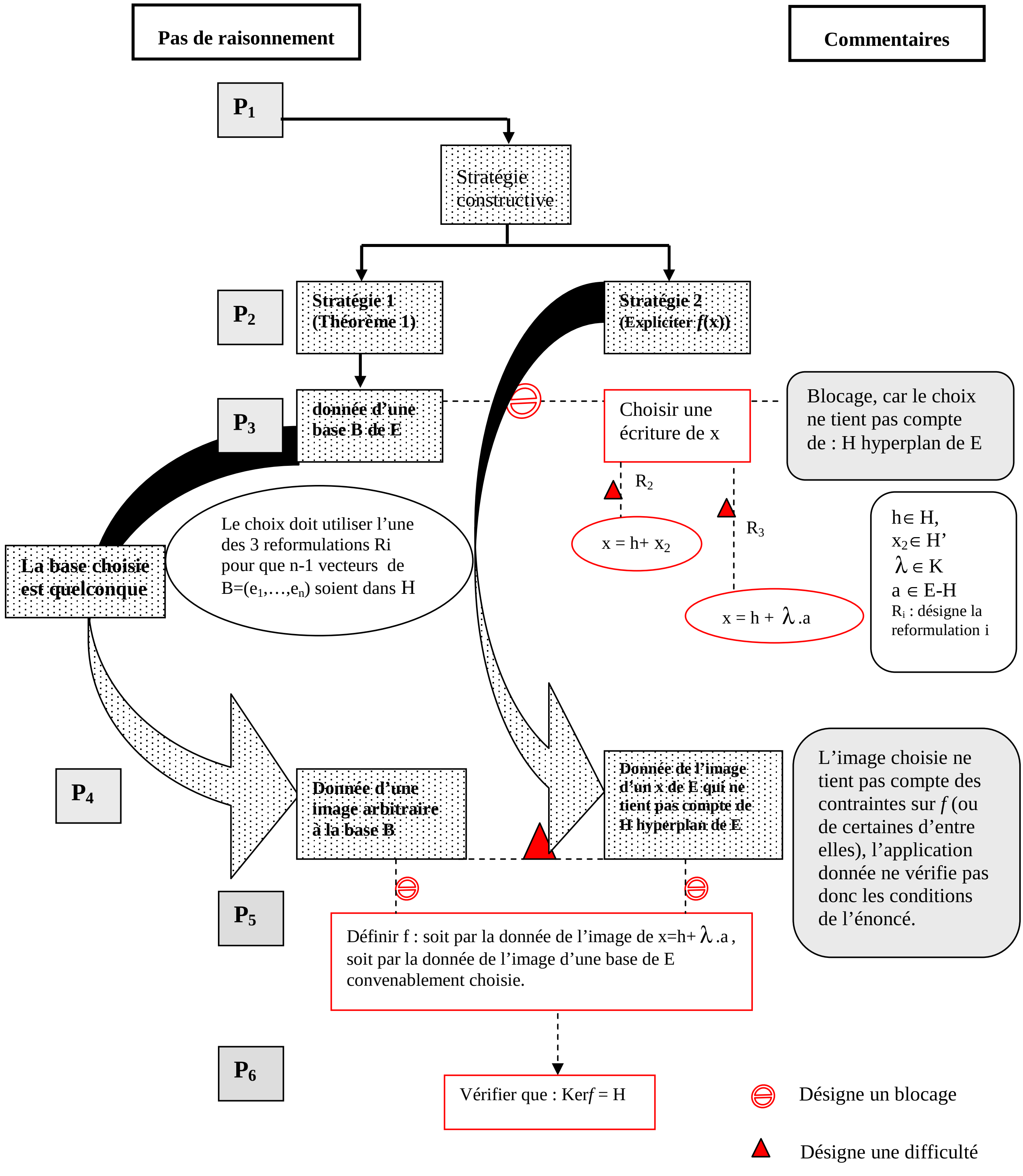
- La première égalité : $E = Kerf \oplus Imf$, est fausse. Les étudiants semblent faire une confusion avec le théorème du rang : dimE=dimKerf+dimImf. Ce genre de glissement entre des énoncés mathématiques sémiotiquement voisins est fréquent chez les étudiants au début de leur cursus universitaire (nous le rencontrons aussi par exemple entre les écritures de dimension et de cardinal, entre réunion et somme d'ensembles, entre image directe et image réciproque d'ensembles…). Ceci soulève le problème du rapport au symbolisme mathématique, dont les difficultés et les obstacles qu'ils engendrent chez les étudiants au début de l'enseignement supérieur ont été mises en évidences dans plusieurs recherches antérieures (cf. Dorier, 1997 et Lajoie 2004).

- La deuxième égalité : $E = H \oplus F$ tq dimF = 1, est une reformulation correcte de l'hypothèse : H hyperplan de E.

Dans un deuxième temps, ne progressant pas dans cette voie non plus, les étudiants reviennent sur la question de l'existence de f, ce qui veut dire implicitement qu'ils envisagent de préciser la valeur de y = f(x) pour $x \in E \backslash H$. Ils fixent alors une base quelconque ($e_1, \dots e_n$) de E et attribuent aux vecteurs $e_1, \dots e_n$ de cette base respectivement les valeurs 1, …, n de **K**, ce qui donne une application linéaire de E dans **K** (selon le théorème 1). La base choisie étant quelconque et les conditions sur f n'étant pas prises en considération, le travail n'aboutit pas. Les étudiants reprennent à la fin l'écriture ensembliste de f.

En vue de localiser les difficultés et les points de blocage rencontrés par les étudiants, nous reprenons ci-dessous le schéma de structuration des stratégies de résolution et nous faisons apparaître les "états de stratégie"[76] qui sont établis (zones de texte en pointillés) et les connexions mises en évidence (traits noir). (Les zones de textes blanches et les traits interrompus indiquent les états de stratégie et les connexions que les étudiants n'ont pas utilisées dans leur travail).

[76] Nous désignons par "état de stratégie" une étape de raisonnement dans la stratégie de résolution caractérisée par les connaissances qui y sont mises en œuvre.



Organigramme 2

Le graphe de résolution ci-dessus montre que des états dans la stratégie de résolution n'ont pas été franchis et d'autres, qui sont établis, n'ont pas pris en considération certaines contraintes de l’exercice. Nous notons aussi l’absence de connexions entre certains états de la stratégie adoptée. Tout cela a entraîné le blocage de la situation de recherche.

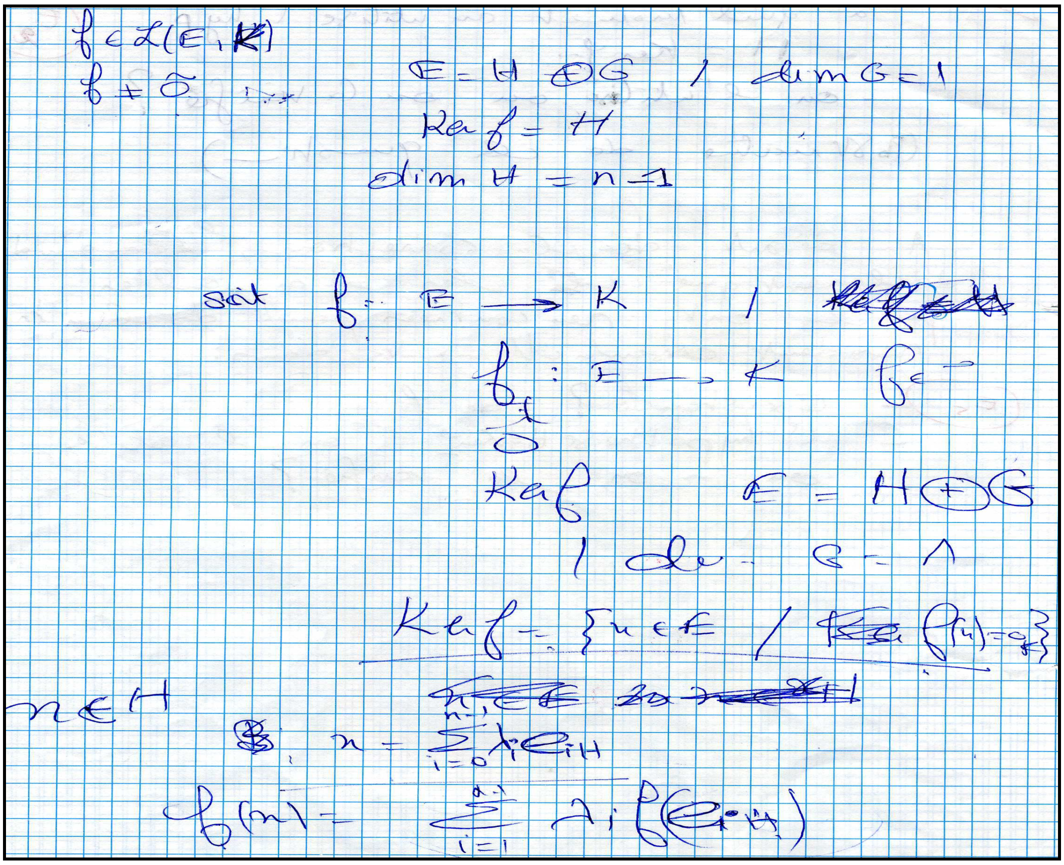
Commentaire

Du point de vue stratégique, l’écriture ensembliste de f (dans la première feuille), et la donnée de l’image d’une base de E par f (dans la deuxième feuille) montrent que les étudiants ont choisi d’utiliser une stratégie constructive dans la résolution du problème. Dans leur travail, les étudiants mobilisent un certain nombre de connaissances correctes et essayent de les mettre en œuvre pour définir l’application f. Ils sont apparemment conscients des points qui restent à traiter pour terminer la résolution de l’exercice (à savoir : déterminer y et vérifier que Kerf=H). Ceci apparaît dans les tentatives de recherche qu’ils effectuent et les allers et retours entre les stratégies 1 et 2. N’arrivant pas à exploiter de façon adéquate la décomposition de E en somme directe pour choisir une base convenable de E, ou à donner une écriture de x (ou de x_F) pouvant amener à déterminer la valeur de "y", les étudiants finissent par revenir à l’écriture de f(x) donnée au début de leur travail. Il y a là des mises en relation qui ne s’effectuent pas, résultantes de contraintes non prises en considération. Ceci a bloqué l’avancée du travail. Les étudiants ici, sont un peu dans la même situation qu’un élève de collège qui, voulant montrer que la somme de deux nombres impairs consécutifs est un multiple de 2, désignerait ces deux nombres par x et y, ou x et x+2, sans tenir compte des contraintes qui pèsent sur ces deux nombres.

Groupe 2 (composé par : E_6< **M**, E_9 **= M** et E_{10}, E_{11}> **M**) :

La feuille que nous ont remise les étudiants de ce groupe contient un travail de recherche qui n’est pas encore rédigé de façon propre et organisée. Ceci se manifeste notamment par la présence d’implicites dans la production donnée.

Contenu de la feuille



$f \in \mathcal{L}(E, K)$

$f \neq \tilde{0}$

$E = H \oplus G$ / $\dim G = 1$

$\mathrm{Ker} f = H$

$\dim H = n - 1$

soit $f : E \longrightarrow K$ /

$f_1 : E \longrightarrow K$ $f \in$

$\mathrm{Ker} f$ $E = H \oplus G$

/ $\dim G = 1$

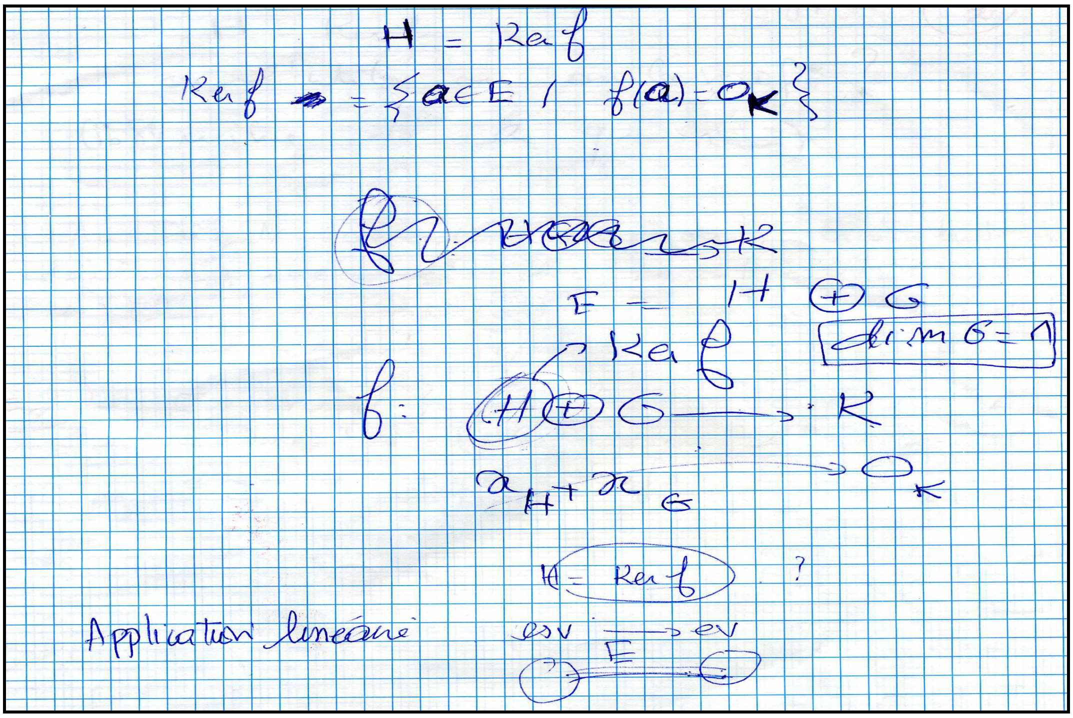
$\mathrm{Ker} f = \{x \in E \ / \ f(x) = 0\}$

$x \in H$

$x = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i e_{iH}$

$f(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i f(e_{iH})$

Copie 3 (groupe 2, page 1)



$H = \mathrm{Ker} f$

$\mathrm{Ker} f = \{a \in E \ / \ f(a) = 0_K\}$

$f \longrightarrow K$

$E = H \oplus G$ $\boxed{\dim G = 1}$

$\mathrm{Ker} f$

$f : H \oplus G \longrightarrow K$

$x_H + x_G \longrightarrow 0_K$

$H = \mathrm{Ker} f$?

Application linéaire esv $\longrightarrow$ ev

E

Copie 4 (groupe 2, page 2)

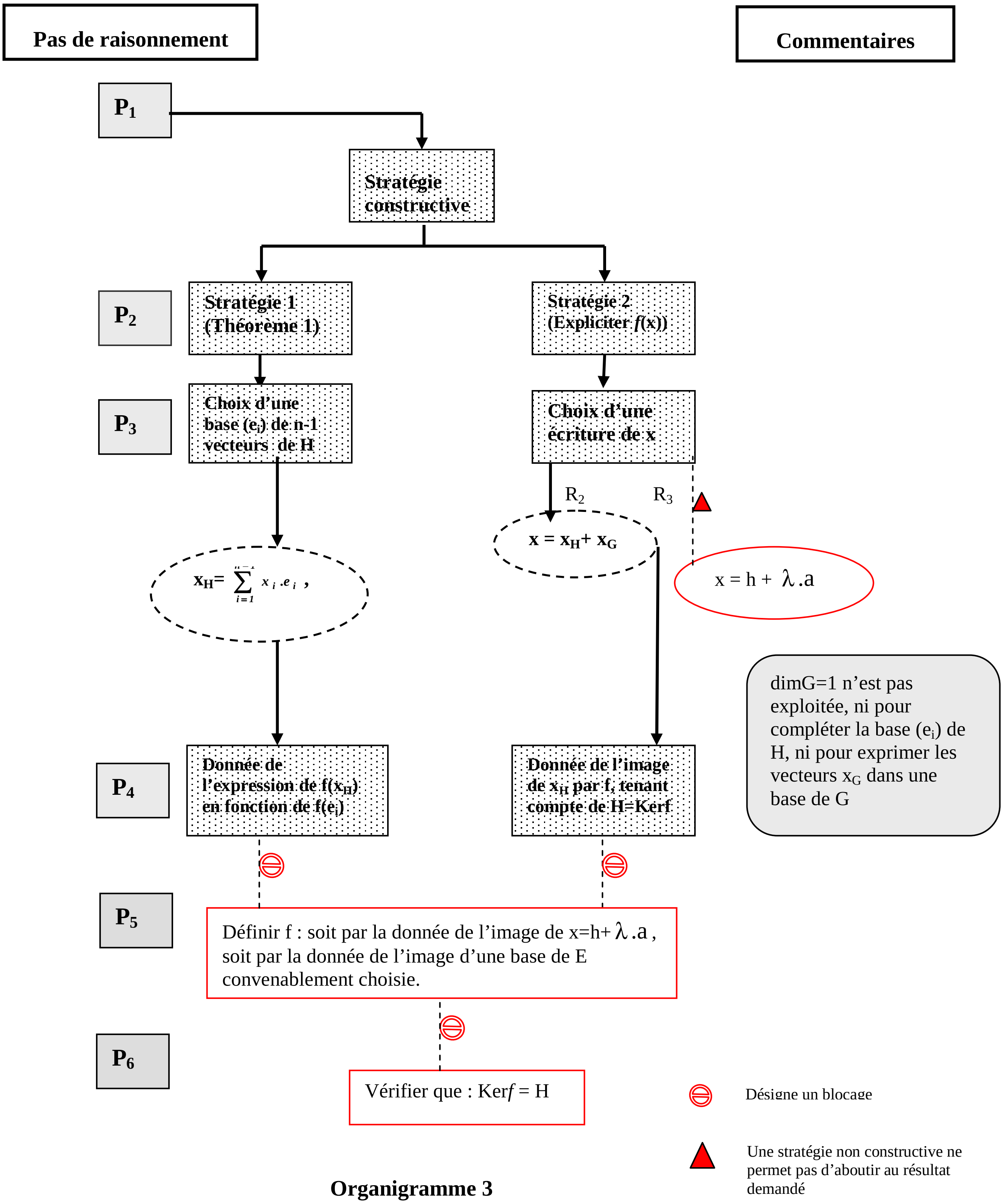
Analyse

Dans la première page, les étudiants commencent par écrire les différentes données de l'exercice dans le registre symbolique avec une reformulation de l'hypothèse : « H hyperplan de E » qu'ils traduisent par l'égalité : « $E = H \oplus G$ / $\dim G = 1$ ». Ensuite, les étudiants considèrent une application f de E dans **K** et semblent examiner les conditions sur f en vue de les utiliser pour exprimer f(x). Pour cela, ils expriment un vecteur x de H en combinaison linéaire de vecteurs notés e_{iH} (i = 1, … , n-1) qui, semble-t-il, constituent une base de H. Utilisant la linéarité de f, ils expriment après f(x) en combinaison linéaire des vecteurs $f(e_{iH})$. Cette écriture de f(x) n'est pas exploitée dans la suite.

Dans la deuxième page, le travail se concentre dans la recherche de la valeur de f(x). Après avoir écrit la définition de l'ensemble Kerf, les étudiants utilisent la somme directe $E = H \oplus G$ pour décomposer un vecteur x de E en la somme d'un vecteur x_H de H et d'un vecteur x_G de G. Utilisant le fait que H est le noyau de f, ils font correspondre à x_H l'élément nul de **K**. Ils n'arrivent pas à définir l'image par f de la composante x_G.

A la fin, l'égalité H = Kerf est reprise encore une fois et nous remarquons qu'elle est suivie d'un point d'interrogation, comme si les étudiants s'interrogeaient sur les moyens qui leur permettent de calculer $f(x_G)$ en tenant compte de H = Kerf .

Le graphe ci-dessous récapitule le travail des étudiants et indique les difficultés et blocages rencontrés.



Organigramme 3

La difficulté essentielle rencontrée par les étudiants réside dans la mise en relation entre les reformulations R_2 et R_3, pour voir en quoi x_G est contrainte et déterminer en conséquence l'image de x par f. Il y a là un état qui manque dans la stratégie de résolution. Les étudiants se sont trouvés à la fin dans une impasse.

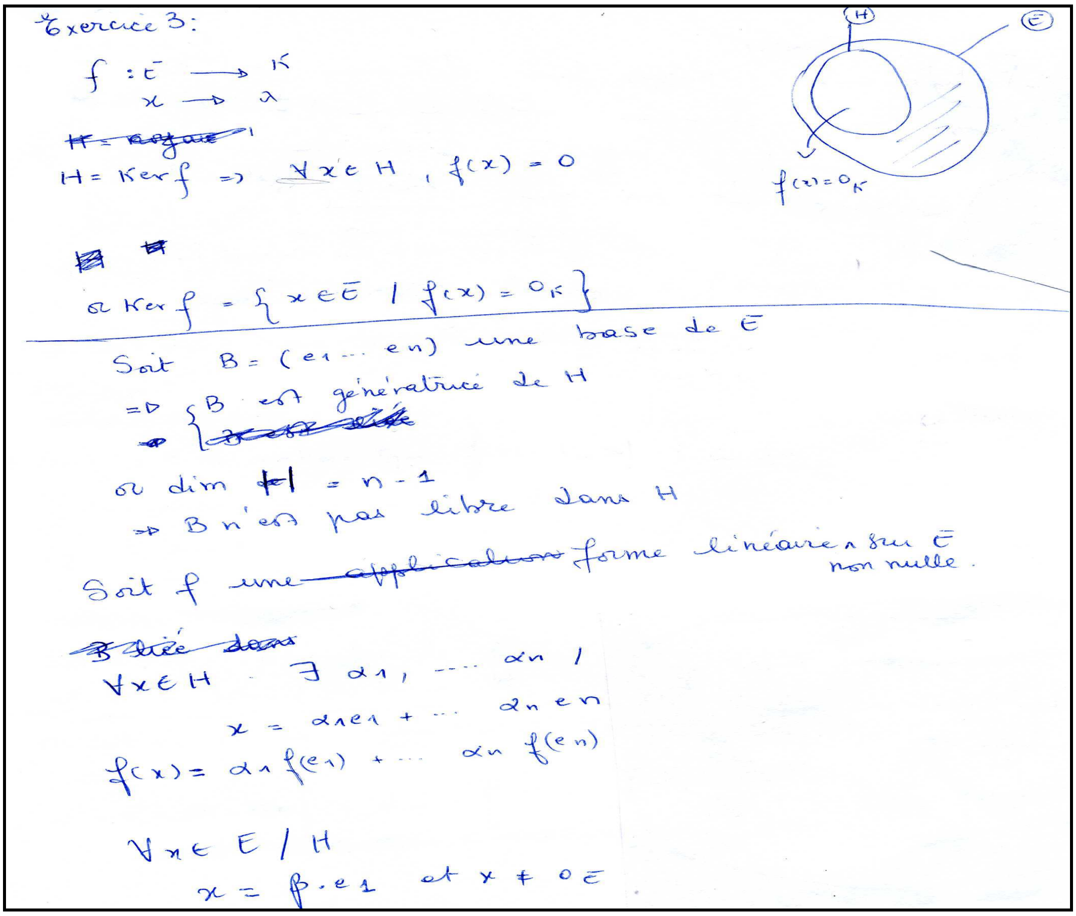
Commentaire

Pour résoudre le problème d'existence de f, les étudiants adoptent une stratégie constructive. Les démarches de raisonnement entreprises présentent une certaine organisation et les connaissances utilisées sont correctes, bien que nous rencontrions un certain implicite qui caractérise généralement la phase de recherche où les étudiants se trouvent.

Bien que les reformulations adoptées soient pertinentes eu égard à l'objectif de l'exercice, les étudiants ne sont pas arrivés à rendre l'hypothèse : dimG = 1 opérationnelle pour déterminer les images des x_G. L'expression additive d'un x de E ($x=x_H+x_G$) laisse invisible le fait que x_G est dans un espace de dimension 1, et donc, la décomposition de E en somme directe reste impuissante à permettre l'expression de la contrainte relative à l'image de x_G. La combinaison, dans une forme unique, entre expressions de la somme directe et de la dimension 1 n'étant pas produite, les étudiants se sont trouvés dans une impasse.

Groupe 3 (composé par : E_2, E_4, E_5**< M** et E_7 **= M**)

Le travail de ce groupe est donné dans la page suivante :



Exercice 3:

$f : E \to K$

$x \to \lambda$

~~H = noyau~~

$H = \mathrm{Ker} f \Rightarrow \forall x \in H,\ f(x) = 0$

or $\mathrm{Ker} f = \{x \in E \mid f(x) = 0_K\}$

Soit $B = (e_1 \dots e_n)$ une base de E

$\Rightarrow$ { B est génératrice de H

or dim H = n - 1

$\Rightarrow$ B n'est pas libre dans H

Soit f une ~~application~~ forme linéaire sur E non nulle.

~~B libre dans~~

$\forall x \in H \quad \exists\ \alpha_1, \dots \alpha_n \ /$

$x = \alpha_1 e_1 + \dots \alpha_n e_n$

$f(x) = \alpha_1 f(e_1) + \dots \alpha_n f(e_n)$

$\forall x \in E / H$

$x = \beta . e_1$ et $x \neq 0_E$

Copie 5 (groupe 3)

Analyse

Les étudiants donnent une écriture ensembliste de f et expriment l’image d’un vecteur x de H tenant compte de H=Kerf. Ils représentent ce travail dans un schéma qui donne l’impression qu’il y a une certaine confusion entre les notions de complémentaire et supplémentaire.

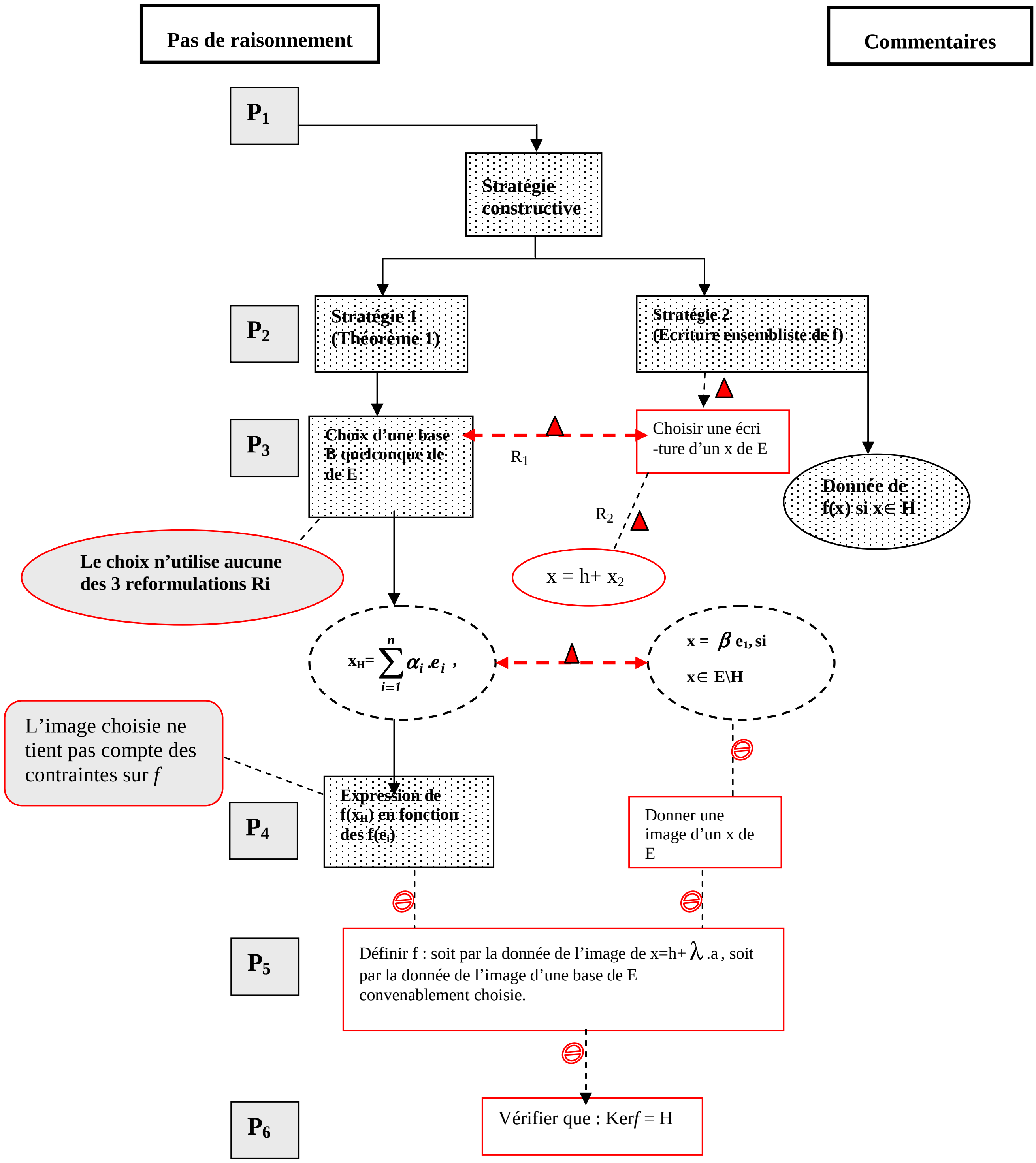
Les étudiants fixent ensuite une base B = (e_1, … , e_n) quelconque de E et remarquent que B est génératrice de H, mais n’est pas une famille libre car dimH = n-1. Cette remarque est fausse, car les vecteurs e_1, … , e_n ne sont pas nécessairement tous dans H, de plus la famille B ne peut pas être libre dans E et liée dans H[77]. Toutefois, il serait correct d’exprimer un vecteur de H comme combinaison linéaire des vecteurs e_1,…, e_n. Ce que les étudiants utilisent pour caractériser les vecteurs de H.

Admettant implicitement l’existence d’une forme linéaire f non nulle sur E, les étudiants écrivent f(x) comme combinaison linéaire des vecteurs f(e_1) … , f(e_n).

A la fin, les étudiants caractérisent tout vecteur x de E\H par : x = $\beta.e_1$, et $x \neq 0_E$. Ceci suppose que les étudiants ont choisi (arbitrairement) e_1 comme un vecteur de E\H, ce qui est en contradiction avec le fait que e_1 est dans H.

Le graphe ci-dessous récapitule le travail de ce groupe et localise les difficultés et blocages constatés.

[77] Par définition, on ne parle de famille génératrice et de famille libre d’un espace vectoriel que pour une famille de vecteurs de cet espace vectoriel. Car sinon, nous pouvons tomber sur des résultats contradictoires. Par exemple, si nous adoptons la définition suivante de famille génératrice : (Jean-Marie Monier (2000), Algèbre I ; Dunod) *Une famille G d’un K-ev E est dite génératrice de E si et seulement si : VectG = E*, nous obtenons, dans notre cas, H = VectG = E, ce qui est absurde. D’un autre côté, la notion de famille libre est, par définition, une notion intrinsèque, c’est à dire dépend de la famille des vecteurs et non de l’espace auquel appartiennent ces vecteurs. Autrement dit, une famille ne peut être libre dans un espace et liée dans un autre (tant que ces deux espaces sont définis sur le même corps de scalaires).



Organigramme 4

Désigne un blocage

Désigne une difficulté

Ce graphe met en évidence plusieurs difficultés et points de blocage rencontrés par ce groupe. Les états établis dans la stratégie adoptée sont inadaptés aux contraintes du problème. La non prise en considération de la décomposition de E en somme directe a entraîné l'absence de connexion entre le travail dans H et celui dans E\H (due aussi, semble-t-il, à une confusion entre complémentaire et supplémentaire). Ceci a conduit les étudiants vers des impasses.

Commentaire

Les étudiants de ce groupe adoptent une stratégie constructive pour montrer l'existence de f. Leur travail est caractérisé par des tentatives de recherche non structurées. N'arrivant pas à exprimer les relations entre H et E d'une façon opératoire, les étudiants font intervenir une base de E avec l'idée, peut être, que pour définir une application linéaire, c'est quelque chose d'utile. Mais ils échouent à établir une connexion avec ce qu'ils savent de H et aboutissent à des contradictions dimensionnelles. A la fin, on note une petite percée, même s'il y a confusion entre E/H et supplémentaire de H, car la dimension 1 apparaît et sous une forme qui permettrait d'avancer s'ils considéraient ensuite que $e_2 \ldots e_n$ forment une base de H. Mais le travail s'arrête là.

Groupe 4 (composé par : E_{12} > **M**) :

Le travail présenté par l'étudiant E_{12} est donné dans les deux pages qui suivent :

E un K-espace vectoriel / $\dim E = n$
H un sous-espace vectoriel / $\dim H = n-1$
mq qu'il existe $f : E \to K$ / $\mathrm{Ker} f = H$

Il faut construire une application tel que
si $x \in H$ alors $f(x) = 0_K$
si $x \notin H$ alors $f(x) \neq 0_K$
(~~comme~~) H est sev de dimension finie donc il possède un supplémentaire
$E = H \oplus H_1$ avec $\dim H_1 = 1$
$\forall x \in E \quad x = x_H + x_{H_1}$; $x_H \in H$ et $x_{H_1} \in H_1$
soit $(e_1 \ldots e_{n-1})$ une base de H
$x = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i e_i + x_{H_1}$
$f(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i f(e_i) + f(x_{H_1})$
Il suffit de prendre $f(e_i) = 0_K$ ~~En effet~~
~~si $x \in H$ alors $f(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i f(e_i) = 0$~~

Copie 6 (groupe 4, page 1)

et $\forall x \notin H$ on pose $f(x) = f(x_{H_1}) \neq 0_K$
~~Verifions que f est lineaire~~
~~$x, y \in E$, $\lambda \in K$~~
~~$f(\lambda x + y) = f(\lambda(\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n) + a_1 e_1 + \ldots$~~
~~soit $e_n \in H$ tel que $(e_1 \ldots e_n)$ soit une base de E~~
~~(cette base existe car on peut trouver e_n qui n'est pas combinaison linéaire de $(e_1 \ldots e_{n-1})$)~~
~~$f(\lambda x + y) = f(\lambda(\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n) + (a_1 e_1 + \ldots + a_n e_n))$~~
~~$\mathrm{Im} f = f(H_1) \Rightarrow \dim \mathrm{Im} f = 1$~~
~~$\Rightarrow \dim \mathrm{Ker} f = \dim E - \mathrm{rg} f = n - 1$~~
~~$\dim \mathrm{Ker} f = \dim H$~~
si $x \in H$ alors $f(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i f(e_i) = 0_K$
d'où $H \subset \mathrm{Ker} f$ (1)
$\mathrm{Im} f = f(H_1)$

Copie 7 (groupe 4, page 2)

Analyse

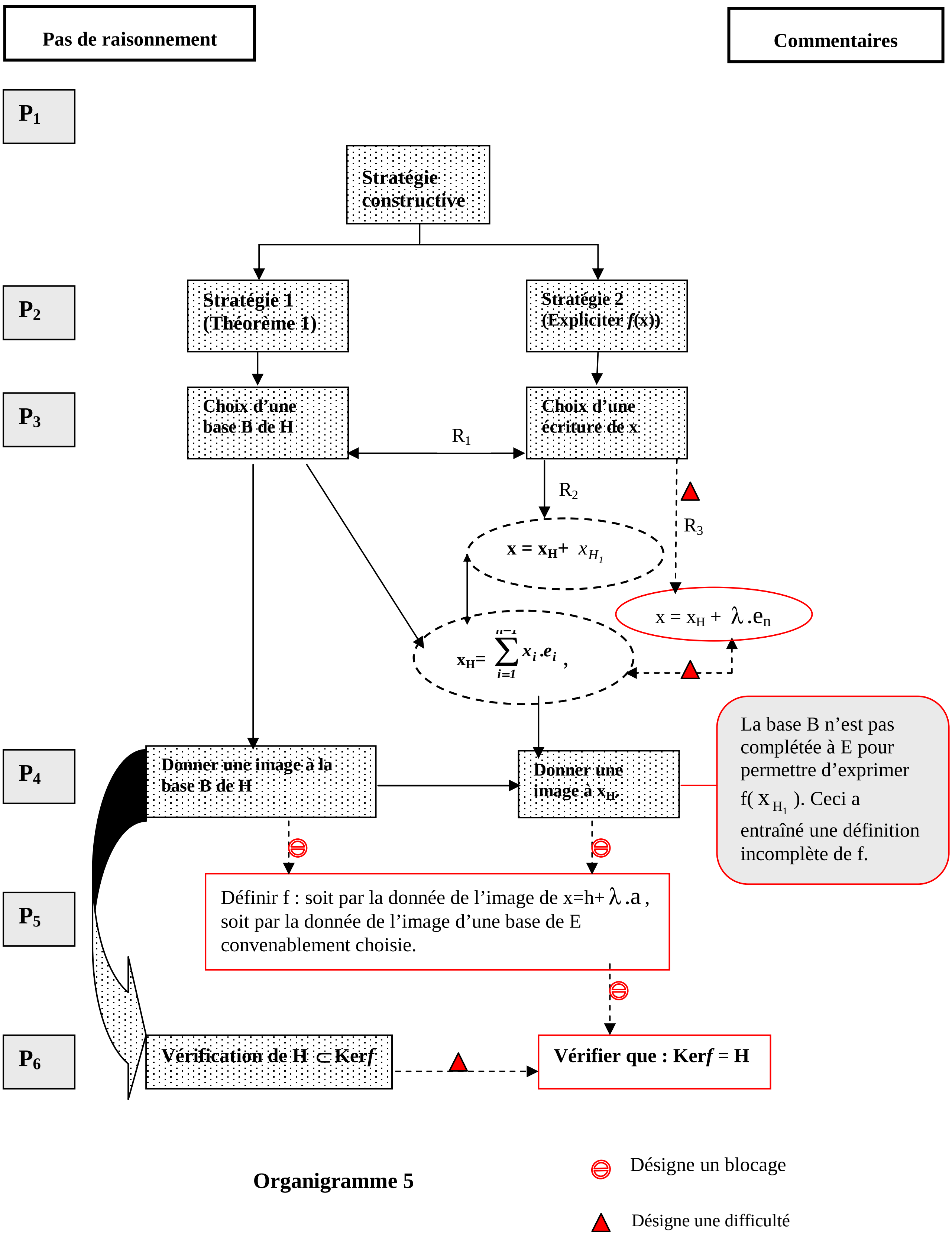
Au départ, l'étudiant donne une reformulation de Kerf=H qui met en évidence les deux inclusions de cette égalité ensembliste. Il obtient ainsi une première définition de f(x) : si $x \in H$, $f(x) = 0_K$ et si $x \notin H$, $f(x) \neq 0_K$. Pour calculer l'image d'un élément x n'appartenant pas à H, l'étudiant reformule l'hypothèse : « H hyperplan de E » par : « $E=H \oplus H_1$ » et décompose tout vecteur x de E sur cette somme directe. Il fixe ensuite une base ($e_1, \dots, e_{n-1}$) de H et exprime, dans l'écriture de x, la composante x_H comme combinaison linéaire de $e_1, \dots, e_{n-1}$. Utilisant la linéarité de f et le fait que f s'annule sur H, il finit par écrire $f(x) = f(x_{H_1}) \neq 0_K$, pour les x n'appartenant pas à H. L'étudiant s'arrête à cette étape dans la définition de l'application f. Il lui restait à préciser la valeur de $f(x_{H_1})$. Dans la suite, l'étudiant envisage de vérifier que l'application f ainsi définie vérifie les conditions imposées par l'énoncé.

En lisant les parties barrées de sa copie, nous remarquons que l'étudiant, pour vérifier la linéarité de f, commence par compléter la base ($e_1, \dots, e_{n-1}$) de H en une base ($e_1, \dots, e_n$) de E, il fixe ensuite un scalaire λ de **K**, deux vecteurs x et y de E et donne l'écriture de $f(\lambda.x + y)$ en exprimant x et y dans la base ($e_1, \dots, e_n$). A la fin, l'étudiant abandonne ce travail. La lourdeur du calcul entraînée par la décomposition des vecteurs x et y sur la base ($e_1, \dots, e_n$) a, semble-t-il, conduit l'étudiant à renoncer à poursuivre le calcul.

L'étudiant passe ensuite à la vérification de l'égalité Kerf=H. Pour cela, il essaye d'établir l'égalité des dimensions. Il remarque au début que Imf = $f(H_1)$ et il en déduit que dim(Imf)=1. Utilisant ce dernier résultat avec le théorème du rang il obtient que $\dim \mathrm{Kerf} = n - 1$. Ce travail est aussi barré par l'étudiant. A la fin, l'étudiant justifie l'inclusion $H \subset \mathrm{Kerf}$ et reprend l'écriture de l'égalité : Imf=$f(H_1)$.

Nous remarquons ici une tendance à travailler dans le registre symbolique non-intrinsèque (développement de x_H dans une base de H pour le calcul de f(x), et développement de x et y dans une base de E lors de la vérification de la linéarité de f). Ceci a entraîné des difficultés pour réaliser la tâche relative à la linéarité de f.

Le graphe suivant récapitule le travail de l'étudiant.



Organigramme 5

L'état de stratégie relative à l'écriture de x_{H_1} dans une base de H_1 n'est pas établi. Ceci a donné à la fin une définition incomplète de f.

Commentaire

L’étudiant adopte dans son travail une stratégie constructive. Les démarches de raisonnement entreprises sont bien organisées, les connaissances sont convenablement utilisées et les résultats obtenus sont correctement justifiés. La rédaction est aussi conforme, hormis certain implicites qui caractérisent généralement la phase de recherche. Toutefois, nous notons que la base $(e_1,\ldots,e_{n-1})$ de H n’a pas permis d’avancer dans le travail, c’est plutôt l’expression des vecteurs x_{H_1} en fonction d’un vecteur générateur de H_1 qui manque pour obtenir une définition complète de f. Il y a là un "état" qui manque dans la stratégie adoptée par l’étudiant. Celui-ci tombe à la fin dans la même situation que les étudiants des autres groupes. Nous pouvons nous demander si les étudiants, (et particulièrement E_{12}) sont bien conscients de la nécessité d’expliciter $f(x_{H_1})$ pour terminer la définition de f.

V. 2. 3. Période de discussion

A travers des discussions collectives entre professeur et étudiants à propos des travaux de ces derniers, nous essayons notamment de dévoiler et de comprendre les origines des difficultés rencontrées par les étudiants auxquelles nous n’avons pas pu y accéder par l’analyse de leurs copies. Ces discussions sont recueillies via des enregistrements audio.

L’examen des copies des étudiants fait apparaître une certaine similitude dans les travaux des groupes 2 et 4, et aussi dans les travaux des groupes 1 et 3. Pour cette raison, nous rapprochons dans nos discussions les travaux des étudiants selon ces deux couples de copies (2, 4) puis (1,3).

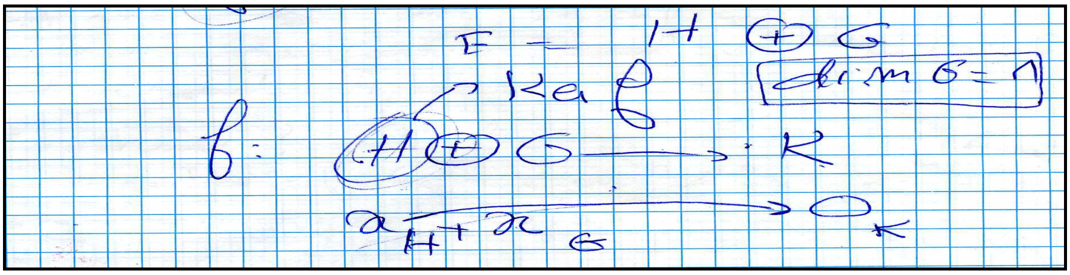
Dans le protocole qui suit, « P » désigne le professeur.

L’étudiant E_{10}, du groupe 2, passe au tableau pour présenter le travail de son groupe.

P : essaie de récapituler le travail de ton groupe

E_{10} : pour montrer l’existence de f, on a voulu construire cette application.

"f " est une forme linéaire sur E, donc elle va de E vers K. H est un hyperplan de E, on a donc écrit : (E_{10} reproduit au tableau ce qui est écrit sur la copie de son groupe)



on a utilisé que H=Kerf pour donner l'image de x_H. Il reste à chercher l'image de x_G. On n'a pas pu avancer car on n'a pas trouvé ce qui caractérise les images des x_G

[1] P : vous avez aussi donné une écriture des x de H. Ecris-la au tableau.

E_{10} copie au tableau :

$x \in H$

$x = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i e_{iH}$

$f(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i f(e_{iH})$

[2] P : qu'est ce que vous désignez par e_{iH} ?

[3] E_{10} : une base de H

[4] P : pour donner l'image des x de H, vous avez commencé par regarder ce qui caractérise les x, est-ce qu'on ne peut pas faire de même pour les x_G ?

[5] E_{10} : H est le noyau de f, mais G !

[6] P : qu'est ce qu'on sait sur G ?

[7] E_{10} : dimension de G est égal à 1

[8] P : et donc ?

[9] E_{10} : on peut écrire les x_G dans une base de G, mais pas calculer l'image.

[10] P : votre camarade E_{12} a fait un travail qui ressemble un peu au vôtre, voici ce qu'il a écrit :

$E = H \oplus H_1$ avec $\dim H_1 = 1$ élémentaire

$\forall x \in E$ $x = x_H + x_{H_1}$; $x_H \in H$ et $x_{H_1} \in H_1$

soit $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ une base de H

$x = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i e_i + x_{H_1}$

$f(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i f(e_i) + f(x_{H_1})$

Il suffit de prendre $f(e_i) = 0_K$

et $\forall x \notin H$ on pose $f(x) = f(x_{H_1}) \neq 0_K$

[11] P : est-ce que ce travail termine la définition de f ?

[12] E_{10} : il n'a pas donné l'image de x_{H1}

[13] E_{12} : oui, mais c'est suffisant pour prouver que f existe et non nulle. Et on a aussi $\text{Kerf} = H$

[14] P : je peux poser alors $f(x_{H1}) = 1_K$, pour tous les x_{H1}?

[15] E_{12} : non, f ne sera pas linéaire

[16] P : il faut donc préciser $f(x_{H1})$, sinon f peut ne pas vérifier certaines contraintes

Un moment de réflexion…

[17] E_{12} : H_1 est de dimension 1, donc les x_{H1} s'écrivent λ.e avec e base de H_1, donc $f(x_{H1}) = \lambda.f(e)$

[18] E_{10} : on n'a pas avancé, $f(x_{H1})$ ou f(e)… f n'est pas encore totalement définie

[19] P (s'adresse aux étudiants) : vous êtes d'accord ?

Certains étudiants confirment l'avis de E_{10}, d'autres semblent hésitants.

[20] E_{12} : Non, e est une base de H_1, il est donc fixe, alors que x_{H1} change avec x.

[21] P (s'adresse aux étudiants) : est-ce que ceci est clair ?

Certains étudiants semblent ne pas être convaincus

[22] P : (s'adresse à E_{12}) : Peux-tu nous expliquer ça au tableau ?

E_{12} passe au tableau et écrit :

$E = H \oplus G \Leftrightarrow \forall x \in E, \exists x_H \in H$ et $\exists x_{H1} \in H_1$ tq $x = x_H + x_{H1}$

Dans ce cas, $f(x) = f(x_H) + f(x_{H1}) = f(x_{H1})$ (1)

[23] E_{10} : Il faut ajouter "unique" pour x_H et x_{H1}.

E_{12} rectifie

[24] E_{12} : Utilisons maintenant la base e de G

E_{12} écrit : $E = H \oplus G \Leftrightarrow \forall x \in E, \exists ! x_H \in H$ et $\exists ! x_{H1} \in H_1$, $x_{H1} = \lambda.e$ tq $x = x_H + \lambda.e$

donc : $f(x) = f(x_H) + \lambda.f(e) = 0_K + \lambda.f(e) = \lambda.f(e)$ (2)

Dans (1) $f(x_{H1})$ change avec f(x), alors que dans (2) f(e) est toujours le même car e est fixe.

[25] P : Qu'est ce qui change alors dans (2) ?

[26] E_{12} : C'est λ.

[27] P : il varie avec quoi ?

[28] E_{12} : avec x

[29] P : si tu poses f(e) = k

[30] E_{12} : alors $f(x) = \lambda.k$

[31] P : fais apparaître la variation de l'image avec celle de x

E_{12} écrit : $f : x = x_H + \lambda.e \mapsto f(x) = \lambda.k$

[32] P : Est-ce que f est bien définie de cette façon ?

[33] E_{10} : oui

[34] E_6 : il manque k

[35] P : est-ce qu'il est nécessaire de donner une valeur à k ?

[36] E_{12} : c'est une constante

[37] P : peux-tu expliquer ?

Pas de réponse…

[38] P : En fait, si on donne une valeur à k, par exemple $f(e) = 1_K$, on aurait terminé. Dans ce cas $f(x) = \lambda$, pour tout $x = x_H + \lambda.e$ de E. Mais il n'y a pas une valeur particulière qu'il faut prendre pour f(e). Quelqu'un d'autre peut fixer une autre valeur pour k. On obtient alors une autre expression de f(x).

[39] E_6 : donc elle n'est pas constante

[40] P : pour une application f donnée, si on pose f(e)=k, alors $f(x) = f(x_H + \lambda.e) = \lambda.k$, f(x) varie avec x, et k est le même pour tous les x. la valeur de k est constante pour une application f donnée. Et k change avec f, c'est un paramètre, on peut noter f par f_k.

[41] E_{10} : il y a donc plusieurs f qui répondent à la question ?

[42] P : effectivement, f n'est pas unique, elle dépend de k. Peut-on exprimer une solution en fonction d'une autre ?

La réponse ne semble pas évidente. Le professeur demande aux étudiants d'essayer sur leurs copies. E_{12} écrit au tableau :

si f(e)=k alors f(x) = λ.k

si f(e)=k' alors f(x) = λ.k'

[43] P : si tu changes l'image de e, c'est que tu as changé l'application, donc tu la notes autrement

E_{12} rectifie : g(e)=k' alors g(x) = λ.k'

k' non nul, on peut donc écrire : λ=g(x).(k')$^{-1}$. Donc, f(x)= g(x).(k')$^{-1}$k

[44] P : on peut donc écrire : f = (k')$^{-1}$k.g.

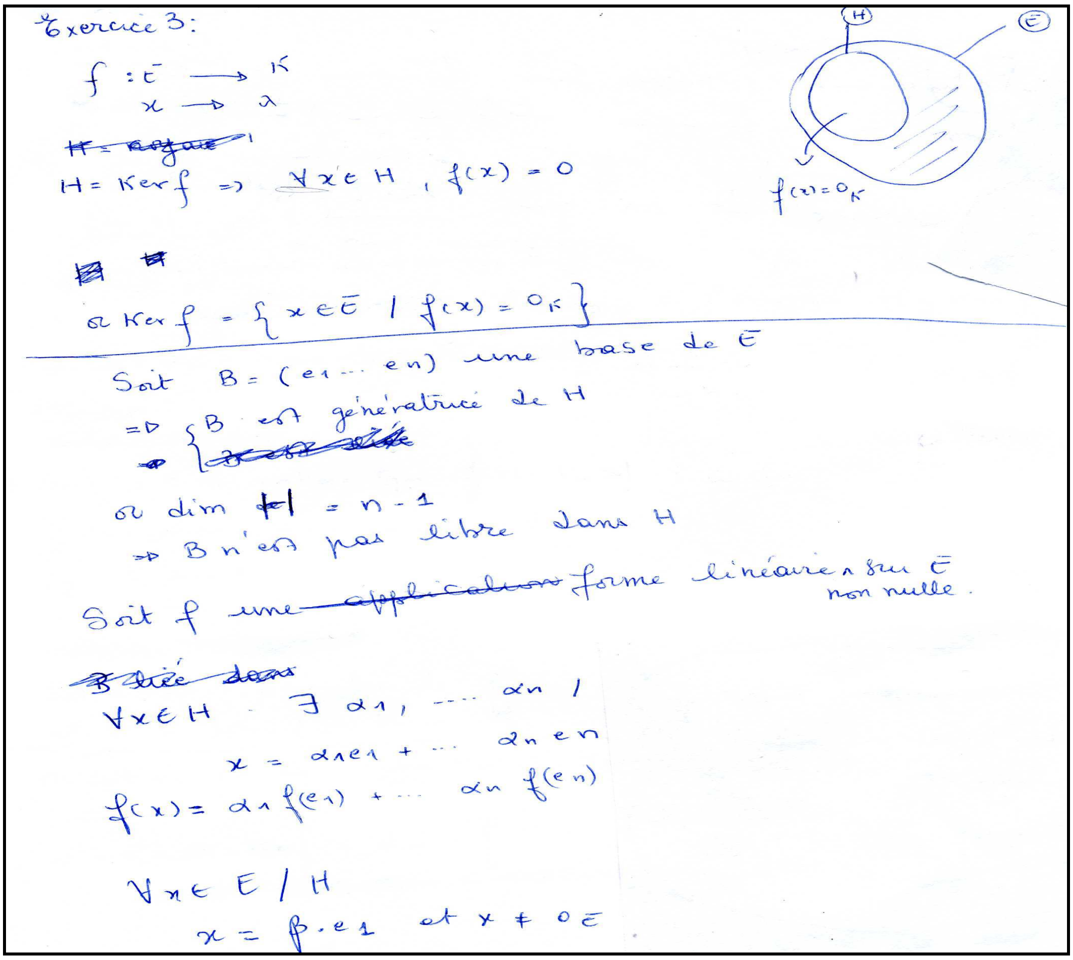
f et g sont donc égaux à une constante multiplicative non nulle près. On dit que la solution est définie à un facteur non nul près. Est-ce qu'on a terminé comme ça ?

[45] E_{12} : Il faut voir si les conditions sur f sont vérifiées ou non ?

[46] P : Je vous laisse terminer ce travail chez vous. Passons à la deuxième idée de résolution utilisée par les groupes 1 et 3.

L'étudiant E_7 du groupe 3 passe au tableau. L'enseignant lui donne la copie du groupe 3 et lui demande de résumer au tableau le travail fait par le groupe relatif à la détermination de f.

Voici ce que nous lisons sur la copie :


Exercice 3 :

$f : E \to K$

$x \to \lambda$

~~H = noyau~~

$H = \mathrm{Ker} f \Rightarrow \forall x \in H, f(x) = 0$

or $\mathrm{Ker} f = \{x \in E \mid f(x) = 0_K\}$

Soit $B = (e_1 \dots e_n)$ une base de E

$\Rightarrow$ { B est génératrice de H

or dim H = n − 1

$\Rightarrow$ B n'est pas libre dans H

Soit f une ~~application~~ forme linéaire sur E non nulle.

~~B liée dans~~

$\forall x \in H$ $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n$ /

$x = \alpha_1 e_1 + \dots \alpha_n e_n$

$f(x) = \alpha_1 f(e_1) + \dots \alpha_n f(e_n)$

$\forall x \in E / H$

$x = \beta . e_1$ et $x \neq 0_E$

[47] P : (s'adressant à E_7) peux-tu nous expliquer l'idée de votre groupe ?

[48] E_7 : on veut f linéaire, donc il suffit de connaître l'image d'une base de E. Pour les x dans H, on n'a pas de problème, puisqu'on connaît leurs images, donc on n'a pas donné les images de $f(e_1),\ldots,f(e_n)$. Nous nous sommes intéressés alors aux x de E\H.

[49] P : pourquoi vous écrivez : $x = \beta .e_1$ pour les x dans E\H ?

[50] E_7 : c'est le supplémentaire de H, donc dimE\H = 1.

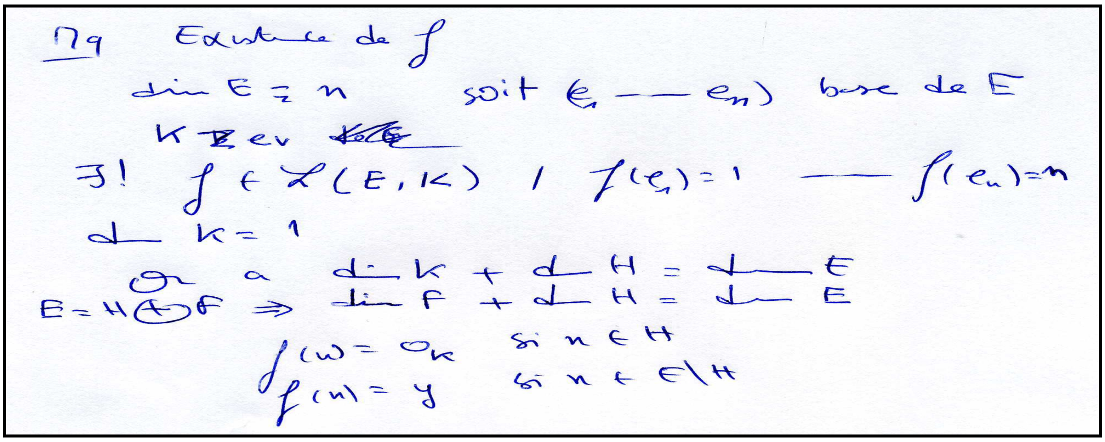
[51] P : êtes-vous d'accord ?

[52] E_{10} : non, E\H est le complémentaire de H

[53] P : mais e_1 est dans H, comment vous l'utilisez pour écrire les vecteurs de E\H

[54] E_7 : non, c'est pas le même vecteur. On peut le noter e'_1

[55] P : vos camarades du groupe 1 ont fait un travail qui ressemble au vôtre. Voici ce qu'ils ont écrit :



M9 Existence de f

dim E = n soit $(e_1 \text{——} e_n)$ base de E

K ev ~~Kdiff~~

$\exists!\ f \in \mathcal{L}(E,K)\ /\ f(e_1)=1$ —— $f(e_n)=n$

$\dim K = 1$

On a $\dim K + \dim H = \dim E$

$E = H \oplus F \Rightarrow \dim F + \dim H = \dim E$

$f(x) = 0_K$ si $x \in H$

$f(x) = y$ si $x \in E\backslash H$

[56] P (s'adresse aux étudiants du groupe 1) : vous avez fixé des images pour la base $(e_1,\ldots,e_n)$. Pouvez-vous expliquer votre idée ?

[57] E_8 : on sait que pour x dans H, $f(x)= 0_K$ et on cherche l'image y d'un x dans E\H. On a essayé avec une base de E. On a donné des images quelconques pour les vecteurs e_i, puis on voudrait les changer pour que f vérifie les conditions... On n'est pas arrivé à écrire les x de E\H dans cette base.

[58] P : et pourquoi ?

[59] E_8 : on a voulu partir d'une base de E\H puis la compléter à E. On a travaillé sur les dimensions pour connaître la dimension de E\H. Mais E\H n'est pas un sev, car il ne contient pas 0_E.

[60] P (s'adresse aux étudiants des groupes 1 et 3) : d'après ce qu'on a fait au début, pouvez-vous terminer votre travail ?

Le professeur accorde un moment aux étudiants pour travailler ensemble.

Après quelques minutes :

[61] E_8 : on fixe une base e de F (supplémentaire de H dans E). on complète (e) en une base $(e,e_1, \ldots ,e_{n-1})$ de E. On pose alors $f(e_i) =0_K$, pour i=1 à n-1, et f(e)=k avec k non nul. On définit comme ça une forme linéaire non nulle sur E et qui est nulle sur H.

[62] P : est-ce qu'on retrouve le résultat obtenu avec la première méthode.

[63] E_8 : oui

[64] P : comment ?

E_8 écrit au tableau :

Si $x \in E$. $x = \lambda.e + \lambda_1.e_1 + ... + \lambda_{n-1}.e_{n-1}$, donc $f(x) = \lambda.f(e) + \lambda_1.f(e_1) + ... + \lambda_{n-1}.f(e_{n-1}) = \lambda.f(e) = \lambda.k$

[65] Après, il faut vérifier les conditions sur f. Je vous laisse terminer ceci chez vous.

Fin de la séance

Analyse et commentaire

Les interventions de l'étudiant E_{10} au début de la séance de discussion, confirment la constatation faite lors de l'analyse de la copie de son groupe (groupe 2) concernant la difficulté d'exploiter l'hypothèse : dimG =1 pour déterminer l'image de x_G.

> [2] E_{10} : …Il reste à chercher l'image de x_G. On n'a pas pu avancer car on n'a pas trouvé ce qui caractérise les images des x_G.
>
> [6] P : pour donner l'image des x de H, vous avez commencé par regarder ce qui caractérise les x, est-ce qu'on ne peut pas faire de même pour les x_G ?
> [7] E_{10} : H est le noyau de f, mais G !
> [8] P : qu'est ce qu'on sait sur G ?
> [9] E_{10} : dimension de G est égal à 1
> [10] P : et donc ?
> [11] E_{10} : on peut écrire les x_G dans une base de G, mais pas calculer l'image.

De plus, les commentaires de E_{10} à propos du travail de l'étudiant E_{12}, montrent que les étudiants du groupe 2 se sont fixés, implicitement, des contraintes supplémentaires pour l'application f (comme l'unicité, ou une application sans paramètre) et qu'ils ne semblent pas avoir une idée précise quant à l'image $f(x_G)$ à déterminer. Ceci a empêché, peut être, de voir l'utilité de l'hypothèse : dimG =1 pour avancer dans le travail.

> [14] E_{10} : il n'a pas donné l'image de x_{H1}
> [20] E_{10} : on n'a pas avancé, $f(x_{H1})$ ou f(e)… f n'est pas encore totalement définie

L'étudiant E_6 (qui est dans le même groupe que E_{10}) a aussi une idée similaire :

> [36] E_6 : il manque k
> [37] P : est-ce qu'il est nécessaire de donner une valeur à k ?
> [38] E_{12} : c'est une constante
> [39] P : peux-tu expliquer ?
> Pas de réponse…

L'étudiant E_{12}, quant à lui, a fait une mauvaise estimation du résultat qu'il a obtenu par rapport à la réponse attendue. Mais, il a su rectifier convenablement son travail dès qu'il a constaté l'erreur commise.

> [14] E_{10} : il n'a pas donné l'image de x_{H1}
> [15] E_{12} : oui, mais c'est suffisant pour prouver que f existe et non nulle. Et on a aussi Kerf =H
> [16] P : je peux poser alors $f(x_{H1}) = 1_K$, pour tous les x_{H1}?
> [17] E_{12} : non, f ne sera pas linéaire
> [18] P : il faut donc préciser $f(x_{H1})$, sinon f peut ne pas vérifier certaines contraintes
> Un moment de réflexion…
> [19] E_{12} : H_1 est de dimension 1, donc les x_{H1} s'écrivent λ.e avec e base de H_1, donc $f(x_{H1}) = \lambda.f(e)$

D'un point de vue stratégique, bien que les étudiants de ces deux groupes aient réussi à fixer le but à atteindre dans cette première étape de l'exercice (définir une forme linéaire f sur

E), et soient arrivés à accomplir (à des degrés différents) une partie du travail à réaliser, ils se sont heurtés à la fin de leur travail au problème de validation. Car, bien que l'exercice donne les moyens pour vérifier la pertinence de la réponse, il ne contraint pas le sujet à en faire usage (la condition H=Kerf peut être vérifiée sans la donnée de l'image des x_G). D'un autre côté, la formulation de la question pourrait évoquer chez l'étudiant le problème de l'unicité de la solution, ce qui rend l'existence d'un paramètre dont dépend la solution une source éventuelle de difficulté.

Il s'ensuit que l'exploitation incomplète ou inappropriée des données de l'exercice par ces étudiants ne semble pas être inhérente seulement à la non disponibilité de connaissances ou à un traitement inadéquat des formulations symboliques, elle relève aussi de facteurs liés au milieu, se rapportant précisément à la validation et à l'interprétation des consignes de l'exercice.

Pour les groupes 1 et 3, la stratégie adoptée consiste à définir f à partir de la donnée d'une base de E. Les étudiants ne sont pas arrivés à trouver une base convenable leur permettant de terminer la définition de f .

[50] E_7 : on veut f linéaire, donc il suffit de connaître l'image d'une base de E. Pour les x dans H, on n'a pas de problème, puisqu'on connaît leurs images, donc on n'a pas donner les images de $f(e_1),\ldots,f(e_n)$. Nous nous sommes intéressés alors aux x de E\H.

[51] P : pourquoi vous écrivez : $x = \beta .e_1$ pour les x dans E\H ?

[52] E_7 : c'est le supplémentaire de H, donc dimE\H = 1.

[55] P : mais e_1 est dans H, comment vous l'utiliser pour écrire les vecteurs de E\H

[56] E_7 : non, c'est pas le même vecteur. On peut le noter e'_1

[59] E_8 : on sait que pour x dans H, f(x)= 0_K et on cherche l'image y d'un x dans E\H. On a essayé avec une base de E. On a donné des images quelconques pour les vecteurs e_i, puis on voudrait les changer pour que f vérifie les conditions... On n'est pas arrivé à écrire les x de E\H dans cette base.

[60] P : et pourquoi ?

[61] E_8 : on a voulu partir d'une base de E\H puis la compléter à E. On a travaillé sur les dimensions pour connaître la dimension de E\H. Mais E\H n'est pas un sev, car il ne contient pas 0_E.

Ces interventions montrent que les étudiants traitent le problème de la construction de f par étapes séparées : les images des x de H étant déterminées, cette étape est classée, il faut après focaliser le travail sur la recherche des images des x dans E\H. Pour le groupe 3, le vecteur e_1 de E\H, n'est pas celui qui est utilisé pour écrire les vecteurs de H. Pour le groupe 1, les étudiants, voulant exprimer les vecteurs de E\H dans la base choisie, ne se sont pas rendus compte de l'intérêt de choisir une base qui convienne avec la décomposition : $E=H\oplus F$, établie auparavant. En procédant de cette manière, les étudiants se sont trouvés (consciemment ou inconsciemment) avec des résultats contradictoires et/ou incompatibles avec les données de l'exercice. Ceci explique sans doute, partiellement au moins, les déconnexions entre les états de résolution mises en évidences lors de l'analyse des stratégies de travail de ces deux groupes.

Nous déduisons de ces observations que les difficultés rencontrées par les étudiants des groupes 1 et 3 pour adopter des reformulations convenables et opérationnelles des données de l'exercice, découlent aussi bien d'une représentation inadéquate de la notion de somme directe de sous espaces vectoriels que d'un manque dans la mise en relation des différentes étapes de résolution du problème. Prenant conscience de ces lacunes, les étudiants sont arrivés à la fin à apporter les modifications nécessaires pour que leur stratégie aboutisse au résultat attendu.

V. 3. Conclusion pour la première séance diagnostique

Le début de cette séance était caractérisé par des difficultés ressenties par la majorité des étudiants concernant l'appropriation des données de l'exercice et la compréhension des consignes. Ceci a résulté d'une lecture rapide de l'énoncé entraînant une saisie vague et imprécise des informations fournies. En accordant plus de temps et de concentration pour analyser et s'approprier ces informations, les étudiants sont arrivés à fixer des stratégies de travail et à mobiliser les connaissances qu'ils ont trouvées indispensables pour aborder l'exercice. Dans la suite, tous les étudiants se sont heurtés au problème de détermination des images des vecteurs de E, autres que x_H. Ceci résultait principalement de difficultés dans la mise en évidence d'une reformulation convenable de l'hypothèse dimG=1, pour rendre la décomposition de E en somme directe ($E = H \oplus G$) opérationnelle et permettre en conséquence la détermination des images des x_G. Plusieurs facteurs (selon les groupes) ont contribué (et se sont parfois conjugués) pour rendre invisible une telle démarche de travail. Nous citons ceux que nous avons constatés suite à nos analyses antérieures :

Le premier facteur concerne l'influence du milieu, et plus précisément l'absence d'un élément de rétroaction et l'interprétation de la consigne relative à l'existence de f. Le manque d'un élément contraignant, permettant la validation du résultat obtenu ou la mesure de son écart part rapport à une solution appropriée ou attendue, a privé certains étudiants d'indices pour contrôler leur travail ou orienter autrement leurs réflexions, les mettant devant des obstacles qu'ils ne sont pas arrivés à surmonter. Ceci pourrait aussi résulter d'un manque de familiarité avec ce genre de problème, exigeant généralement des auto-évaluations, des vérifications et souvent la nécessité d'effectuer des modifications dans la stratégie de travail. D'un autre côté, la formulation donnée pour la question pouvait suggérer la recherche d'une solution unique, ce qui ajoute à l'exercice une contrainte non imposée et donc à estimer que l'image $f(x_G)= \lambda .f(e)$, ne répond pas à l'attente de l'exercice.

Le deuxième facteur concerne le mode de travail de la stratégie de résolution. L'exécution d'une stratégie de travail suivant des séquences isolées, sans le retour aux actions accomplies et aux résultats obtenus et sans la mise en relation des différentes phases de la stratégie a entraîné certains étudiants dans des contradictions passées inaperçues et les a empêchés d’apercevoir l’intérêt de changement de reformulations pour dépasser les difficultés rencontrées.

Finalement, les conceptions des notions mises en jeu, le traitement des formulations symboliques et la nécessité d’articuler les dimensions sémiotique et conceptuelle dans la décomposition de E en une somme directe ont constitué des obstacles pour les étudiants pour adopter des méthodes de travail appropriées et/ou permettre une bonne exploration de l’espace de résolution. Néanmoins, comme nous l’avons remarqué ci-dessus, ceci ne peut être renvoyé aux seules connaissances mathématiques des étudiants, elles sont inhérentes aussi à la situation-problème et à la façon d’exécuter la stratégie de résolution.

VI. Deuxième séance diagnostique

L’exercice proposé dans cette séance contient quatre tâches, une tâche de construction et trois tâches de démonstrations.

VI. 1. Analyse a priori de l’exercice

Exercice

Soient E et F des ***K****-espaces vectoriels et soit f une application linéaire de E dans F. On rappelle que le graphe de f est l’ensemble* $G=\{(x,y)\in E\times F \ / \ y = f(x)\}$

1) Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $E\times F$ *isomorphe à E.*

2) Montrer que l’application f est injective si et seulement si $(G\cap E\times\{0_F\})=\{0_{E\times F}\}$

Analyse a priori

a) Objectif

L’objectif visé par cet exercice est d’étudier les possibilités des étudiants à résoudre des questions de démonstration et de les comparer avec leurs possibilités de traiter les problèmes d’existence et de construction. La première séance nous a permis de mettre en évidence certaines difficultés que pouvaient rencontrer les étudiants lors de la résolution d’un exercice de construction. Aussi, la première question de cet exercice, nous donnera-t-elle l’occasion de voir si, pour montrer que G est un sous-espace vectoriel (sev) de $E\times F$, les étudiants vont privilégier une stratégie constructive ou une stratégie démonstrative.

Dans l’analyse a priori que nous menons ci-dessous nous présentons les différentes stratégies et méthodes possibles pour résoudre chacune des deux questions de l’exercice et nous précisons les facteurs et les connaissances dont dépend le développement de chacune de ces méthodes.

b) Stratégies de résolution et analyse praxéologique

L’exercice comprend deux questions indépendantes. L’ordre de leur traitement n’intervient donc pas dans la résolution

Première question

La première question comprend deux tâches :

Tâche 1 : Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $E\times F$

Tâche 2 : Montrer que G est isomorphe à E

Deux stratégies sont possibles pour réaliser ces deux tâches.

❖ **Stratégie 1 (constructive)**

Cette stratégie permet de réaliser les deux tâches en même temps. Elle consiste à construire un morphisme bijectif permettant de transporter la structure d'espace vectoriel de E à G, ce qui montrera que G est un sev de $E\times F$ isomorphe à E. Nous donnons ci-après deux méthodes de résolution pour cette stratégie.

Méthode 1 : On définit l'application φ de E dans $E\times F$ par : $\varphi(x)=(x,f(x))$, pour tout x dans E. On vérifie que φ est linéaire et que G=Imφ (image de E par φ). On obtient ainsi que G est un sev de $E\times F$ et que φ induit une application linéaire surjective de E sur φ(E)=G. En montrant que φ est aussi injective, on obtient que G est isomorphe à E.

Méthode 2 : On définit l'application φ de E dans G par : $\varphi(x)=(x,f(x))$, pour tout x dans E. On commence par montrer que φ est bijective, puis on montre que φ vérifie les propriétés de linéarité. Le théorème sur le transfert des structures algébriques permet alors de conclure que G est un espace vectoriel (et donc un sev de $E\times F$) et qu'il est isomorphe à E.

Remarquons qu'on peut aussi appliquer cette méthode en construisant une application de G dans E. On peut, par exemple, utiliser l'application ψ définie par : $\psi(x,f(x))$ = x, pour tout x dans E. Cette application demande une réécriture convenable de l'ensemble G, n'utilisant pas la notation "y".

On peut aussi considérer la projection p de $E\times F$ sur E, qui est linéaire et surjective. La restriction de p à G définit un isomorphisme de G sur E.

Techniques de résolution

➢ **Pour la méthode 1 :**

On considère l'application φ définie de E dans $E\times F$ par : $\varphi(x)=(x,f(x))$, pour tout x dans E.

(i) L'application φ est linéaire

Pour montrer que φ est linéaire, soit on vérifie les deux propriétés de linéarité séparément, soit on les établit par combinaison linéaire : $\forall$ $(x,y)\in E^2$ et $\forall$ $k\in$ **K**, $\varphi(k.x+y)=k.\varphi(x)+\varphi(y)$

(ii) G=Imφ

On a : $G=\{(x,y)\in E\times F \ / \ y = f(x)\}$

Et par définition de $\mathrm{Im}\,\varphi$, on a : $\mathrm{Im}\,\varphi=\varphi(E)=\{\varphi(x), x\in E\}=\{(x,f(x)), x\in E\}=G$

Cette technique demande une réécriture de l'ensemble G n'utilisant pas l'élément y. D'autres techniques sont aussi possibles pour montrer cette égalité. Comme par exemple : établir la double inclusion, ou procéder par équivalence : $x\in G \Leftrightarrow x\in \mathrm{Im}\,\varphi$.

Cette tâche permet de conclure (en utilisant un théorème du cours) que G est un sev de $E\times F$.

(iii) L'application φ est injective

φ étant linéaire, il suffit alors de montrer que $\mathrm{Ker}\,\varphi=\{0_E\}$. Pour cela, on se contente généralement d'établir l'inclusion : $\mathrm{Ker}\,\varphi \subset \{0_E\}$ (car la deuxième inclusion est toujours vérifiée du fait que toute application linéaire envoie le vecteur nul de l'espace de départ sur le vecteur nul de l'espace d'arrivée). Il s'agit alors de montrer que si $\varphi(x)=0_{E\times F}$, alors $x = 0_E$. Ceci découle immédiatement de la définition de f(x), de celle de $0_{E\times F}$ et de l'égalité entre deux couples. En effet : $\varphi(x)=0_{E\times F}$, s'écrit aussi : $(x,f(x)) = (0_E, 0_F)$ ce qui donne que $x = 0_E$.

Il est aussi possible de montrer que φ est injective en utilisant l'un des énoncés qui définissent l'injection d'un point de vue ensembliste. Par exemple : on montre que pour tout x_1 et x_2 dans E, $\varphi(x_1)=\varphi(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$. Ceci découle immédiatement de l'égalité de deux couples.

(iv) G et E sont isomorphes

Pour cela, il suffit de remarquer que l'application linéaire φ de E dans $E\times F$ étant injective, elle induit alors un isomorphisme de E sur $\varphi(E)=G$. D'où G et E sont isomorphes.

- **Pour la méthode 2 :**

On considère l'application φ définie de E dans G par : $\varphi(x)=(x,f(x))$, pour tout x dans E.

(i) φ est bijective

Il faut utiliser l'un des énoncés qui définissent une bijection d'un point de vue ensembliste. On montre par exemple que φ est injective et surjective. Pour l'injectivité, on peut utiliser la méthode ensembliste décrite ci-dessus (dans (iii)). La surjectivité découle immédiatement du choix de l'ensemble d'arrivée de φ qui coïncide avec $\varphi(E)$. Il est aussi possible de montrer que φ est bijective en montrant l'existence et l'unicité de l'antécédent pour tout élément de G.

(ii) φ vérifie les propriétés de linéarité

On peut faire comme dans (i) de la méthode 1. Remarquons que pour cette méthode, on ne peut pas parler d'application linéaire de E dans G, car ceci suppose que G soit un espace vectoriel, ce qui n'est pas encore établi à ce stade.

(iii) G est un sev de E$\times$F, isomorphe à E

En utilisant les propriétés (i) et (ii), le théorème sur le transfert de la structure d'espace vectoriel permet de transporter la structure d'espace vectoriel de E à l'ensemble G. Et comme G est une partie de $E\times F$, c'est donc un sev de $E\times F$. De plus (i) et (ii) donnent aussi que G et E sont isomorphes.

❖ **Stratégie 2**

Cette stratégie traite les tâches 1 et 2 de façon indépendante. Pour la première tâche, on montre que G est un sev de E$\times$F en utilisant la définition d'un sev. Pour la deuxième tâche, on construit une application de G dans E (ou de E dans G) et on montre qu'elle définit un isomorphisme de G dans E.

Techniques de résolution

(i) G est un sev de E$\times$F

Il s'agit de montrer que G est non vide et qu'il est stable pour les lois de l'espace vectoriel E$\times$F. Pour G non vide, on peut remarquer que le couple $(0_E,0_F)$ est dans G, car f étant linéaire, on a $f(0_E)=0_F$. La stabilité des lois peut être établie soit séparément soit par combinaison linéaire.

(ii) G et E sont isomorphes

Il s'agit de construire une application de E dans G (ou de G dans E) et de montrer qu'elle est linéaire et bijective.

De façon naturelle, on peut construire l'application φ définie de E dans G par : $\varphi(x) = (x, f(x))$, pour tout x dans E. Pour montrer que G et E sont isomorphes, on procède alors comme dans (i) et (ii) de la méthode 2 ci-dessus.

On peut aussi définir cette application φ de E dans E$\times$F, montrer qu'elle est linéaire et injective (comme dans la méthode 1 ci-dessus) puis conclure qu'elle définit un isomorphisme de E sur $\varphi(E) = G$.

D'après la formulation de la question donnée dans l'exercice : « Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $E\times F$ isomorphe à E », où G précède E, nous nous attendions à ce que certains étudiants utilisent l'application ψ définie de G dans E par : $\psi(x, f(x)) = x$, pour tout x dans E.

Processus heuristiques de raisonnement

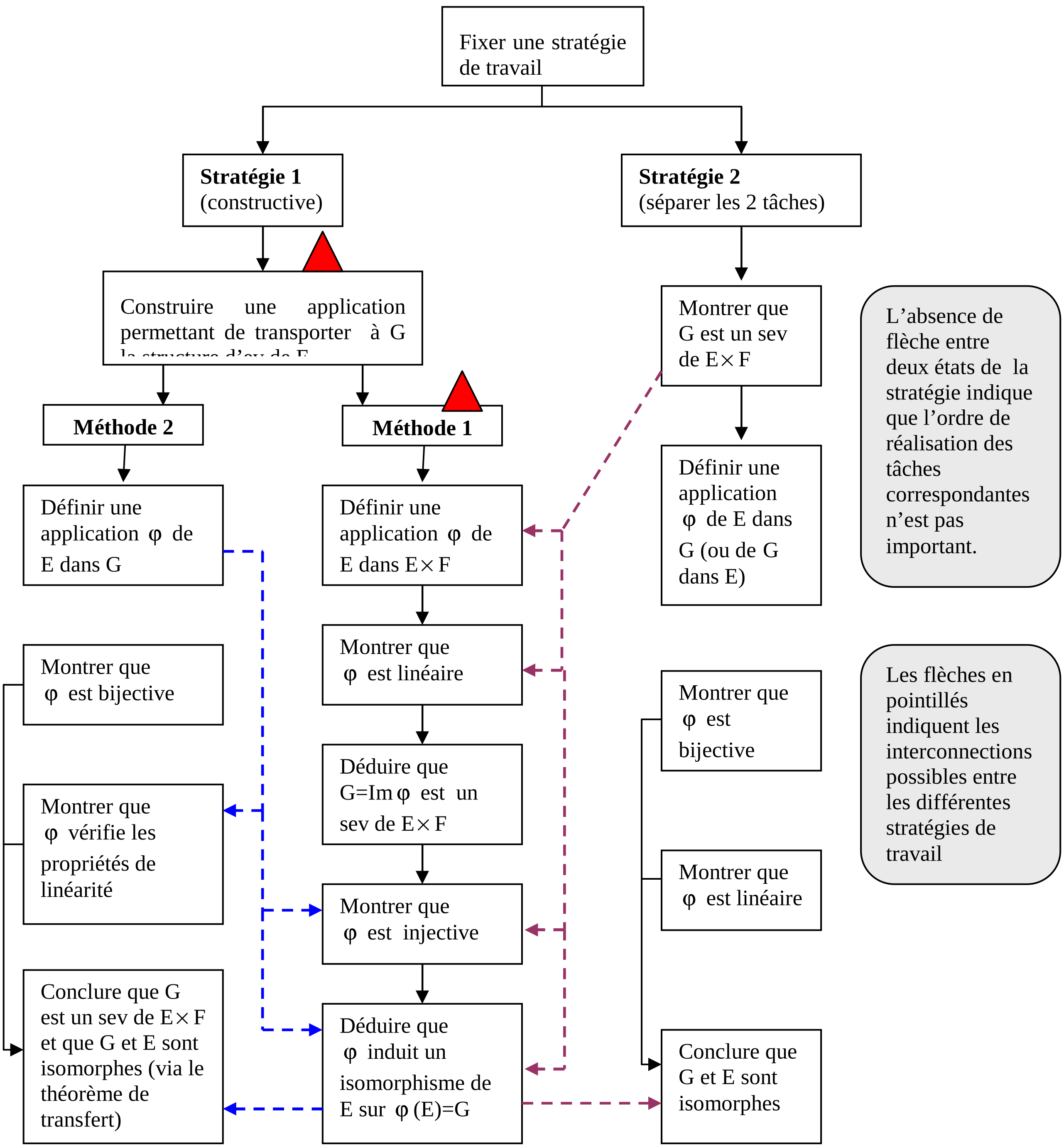
Nous résumons dans le tableau ci-dessous les étapes heuristiques essentielles qui peuvent orienter le choix des stratégies et méthodes de résolution pour cette première question de l'exercice. Comme nous l'avons souligné dans V. 1 (lors de l'analyse de la première séance), il s'agit là d'une structure de référence qui nous permettra d'orienter nos analyses concernant les raisonnements susceptibles d'être impliqués dans la résolution de la question.

Tableau 3 : Pas de raisonnement pour la question 1

Pas de raisonnement		Rôle
P_1	Identifier les deux tâches que comprend la question	Chercher une stratégie de travail
P_2	Fixer une stratégie de travail **Stratégie 1** : réaliser les deux tâches en même temps **Stratégie 2** : réaliser les deux tâches séparément	Organiser le travail
P_3	Choisir une technique de travail pour chacune des tâches à réaliser	Exécution de la stratégie choisie

Structuration des stratégies et méthodes de résolution de la question 1

Tenant compte des organisations possibles des stratégies 1 et 2 et des techniques de réalisation des différentes tâches constituant chacune de ces deux stratégies, nous présentons dans ce qui suit une structuration sommaire des démarches que pourrait entreprendre un sujet lors de sa résolution de la question 1. Cette structuration fait apparaître les points de convergence et de divergence entre les différentes stratégies et méthodes de travail, ainsi que les interconnexions possibles. Nous précisons en même temps les choix qui pourraient être sources d'obstacles et/ou de difficultés lors de la résolution de la question.



Organigramme 6

Désigne une difficulté

Commentaire

La stratégie 1 requiert une bonne disponibilité de la notion d'isomorphisme et particulièrement de son rôle comme transporteur de propriétés et de structures. Bien que les étudiants soient amenés dans la stratégie 2 à construire une application entre G et E (ce qui, a priori, ne posera pas de problème, vu la définition de l'ensemble G), l'objectif de cette construction sera limité à prouver que G et E sont isomorphes, ce qui ramène le problème à une tâche démonstrative. D'un autre côté, la méthode 2 de la stratégie 1 nous semble moins accessible pour les étudiants qui choisissent une stratégie constructive. Car, partir d'une application φ prenant ses valeurs dans $E\times F$ (et non dans G, comme le suggère la question), suppose une anticipation sur un retour à G comme partie de $E\times F$ et aussi comme image de E par l'application φ, d'une part pour justifier que G est un sev de $E\times F$, d'autre part pour obtenir l'isomorphisme entre E et G. Ceci, à notre avis, requiert du sujet un schéma conceptuel faisant intervenir plusieurs items de la théorie des ensembles et de l'algèbre linéaire, dont les liens internes (Tall, 2005) devraient être suffisamment appropriés par le sujet. Pour cela, il nous semble que la stratégie 2, devrait être plus accessible pour la plupart des étudiants.

Deuxième question

La deuxième question consiste à montrer que deux propriétés sont équivalentes :

Propriété 1 : L'application linéaire f est injective

Propriété 2 : $G\cap E\times\{0_F\}=\{0_{E\times F}\}$

(i) Condition nécessaire

Soit f une application linéaire injective de E vers F.

Il faut montrer que $G\cap E\times\{0_F\}=\{0_{E\times F}\}$

f étant linéaire, alors $f(0_E)=0_F$. Par suite $(0_E,0_F)\in G\cap E\times\{0_F\}$.

Ceci montre que $\{0_{E\times F}\}\subset G\cap E\times\{0_F\}$.

Réciproquement,

$(x,y)\in G\cap E\times\{0_F\} \Rightarrow x\in E$, $y=f(x)$ et $y=0_F$

$\Rightarrow x\in E$, $y=0_F$ et $f(x)=0_F$

$\Rightarrow x\in \mathrm{Ker}f$ et $y=0_F$

$\Rightarrow x=0_E$ et $y=0_F$ (car $\mathrm{Ker}f=\{0_E\}$, puisque f est injective).

$\Rightarrow (x,y)=(0_E,0_F)$

Ceci montre que $G\cap E\times\{0_F\}\subset\{0_{E\times F}\}$.

Des deux inclusions, on déduit l'égalité demandée.

Remarquons que dans la troisième ligne, on peut remplacer : $x \in Kerf$ par $f(x)=f(0_E)$, ce qui donne aussi que $x = 0_E$, du fait que f est injective.
Par ailleurs, il est aussi possible de montrer l'égalité des deux ensembles par équivalence. Il suffit pour cela de remplacer les implications précédentes en des équivalences.

(ii) Condition suffisante

f est une application linéaire de E dans F. On suppose que $G \cap E \times \{0_F\} = \{0_{E \times F}\}$.
Il faut montrer que f est injective.
Pour cela, on peut procéder en utilisant la définition d'une injection :
x_1 et x_2 désignent deux éléments de E,

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(x_1 - x_2) = 0_F$ (car f est linéaire)

$\Rightarrow (x_1 - x_2, 0_F) \in G \cap E \times \{0_F\}$

$\Rightarrow (x_1 - x_2, 0_F) = (0_E, 0_F)$

$\Rightarrow x_1 - x_2 = 0_E$

$\Rightarrow x_1 = x_2$

Par suite f est injective
On peut aussi montrer que $Kerf = \{0_E\}$:

$x \in Kerf \Leftrightarrow x \in E$ et $f(x) = 0_F$

$\Leftrightarrow (x, f(x)) \in G \cap E \times \{0_F\}$

$\Leftrightarrow (x, f(x)) = (0_E, 0_F)$

$\Leftrightarrow x = 0_E$

Ceci montre que $Kerf=\{0_E\}$, et par suite f est injective

Processus heuristiques de raisonnement

Le tableau ci-dessous résume les pas de raisonnement susceptibles d'être impliqués dans la résolution de cette deuxième question de l'exercice.

Tableau 4 : Pas de raisonnement pour la question 2

Pas de raisonnement		Rôle
P_1	Identifier la condition nécessaire et la condition suffisante de l'équivalence	Organiser le travail
P_2	Pour la condition nécessaire : - reformuler l'hypothèse que f est linéaire et injective - reformuler l'égalité à démontrer	Choisir les techniques de réalisation des différentes tâches
P_3	Pour la condition suffisante : - reconnaître l'élément $0_{E \times F}$ de $E \times F$ - reformuler la propriété d'injectivité de f	Choisir les techniques de réalisation des différentes tâches

Structuration des stratégies de résolution de la question 2

Tenant compte des organisations possibles des différentes tâches constituant la condition nécessaire et la condition suffisante de l'équivalence à démontrer, nous présentons dans l'organigramme suivant une structuration sommaire des démarches que pourrait entreprendre un sujet lors de sa résolution de la question 2.

Condition nécessaire :
Hypothèse : f est linéaire et injective

Méthode 1

Montrer que $\{0_{E\times F}\} \subset G \cap E \times \{0_F\}$

Montrer que $G \cap E \times \{0_F\} \subset \{0_{E\times F}\}$

Déduire l'égalité des deux ensembles

Méthode 2

Montrer (par équivalence) que $\{0_{E\times F}\} = G \cap E \times \{0_F\}$

L'absence de flèche entre deux états de la stratégie indique que l'ordre de réalisation des tâches correspondantes n'est pas important.

Condition suffisante :
Hypothèse : f linéaire **et** $\{0_{E\times F}\} = G \cap E \times \{0_F\}$

↓

Choisir une reformulation de : f injective

↓

Montrer que f est injective selon la reformulation choisie

Organigramme 7

Commentaire

Selon cet organigramme, l'identification des tâches (et/ou sous-tâches) qui constituent l'équivalence à démontrer ne présente pas une difficulté en soi. A notre avis, les difficultés éventuelles que pourrait poser cette question pour les étudiants se situent surtout au niveau de la réalisation de ces tâches ; particulièrement, dans l'utilisation des connecteurs logiques d'implication et d'équivalence, dans la formulation et l'utilisation des égalités ensemblistes, et au niveau de la rédaction et de la justification de l'enchaînement du raisonnement déductif.

VI. 2. L'expérimentation

La séance d'expérimentation s'est déroulée dans une après-midi libre pour les étudiants, elle a durée environ deux heures, et les douze étudiants et étudiantes présents à la première séance y ont participé.

VI. 2. 1. Période de réflexion

Déroulement

Dans la période de réflexion, les étudiants se sont répartis selon les groupes de la première séance, que nous rappelons ci-dessous :

Groupe 1 : Elèves E_1, E_3, E_8 (E_1, E_3 **<** **M** et E_8 **=** **M**)[78]

Groupe 2 : Elèves E_6, E_9, E_{10}, E_{11} (E_6**<** **M**, E_9 **=** **M** et E_{10}, E_{11}**>** **M**)

Groupe 3 : Elèves E_2, E_4, E_5, E_7 (E_2, E_4, E_5**<** **M** et E_7 **=** **M**)

Groupe 4 : Elève E_{12} (E_{12} **>** **M**)

Au début, les étudiants des différents groupes ont pris un moment pour lire et comprendre l'exercice. Après environ cinq minutes, les étudiants entament leur travail écrit, ils ne semblent pas avoir de difficultés concernant la compréhension des données ou des consignes fournies par l'énoncé. En nous rapprochant des différents groupes, nous observons les étudiants en train de travailler avec une certaine aisance si l'on compare avec la première séance. Des discussions se déroulent de temps à autres entre les étudiants. Ils ne sollicitent pas notre aide pour expliquer ou éclaircir des points de l'énoncé. Nous avons alors choisi de laisser les étudiants poursuivre leur travail sans notre intervention.

Après environ quarante minutes, chacun des quatre groupes nous a remis une copie qui représente le travail collectif des étudiants du groupe. Nous procédons ci-dessous à l'analyse de ces copies.

[78] Abréviation : E_i < M (resp. E_i = M, E_i > M) désigne que l'élève E_i est dans la catégorie « en dessous de la moyenne » (resp. moyenne, au dessus de la moyenne)

VI. 2. 2. Analyse des copies des étudiants

Vu que les deux questions sont indépendantes, nous proposons d'effectuer une première analyse relative à la première question, et une deuxième analyse relative à la deuxième question.

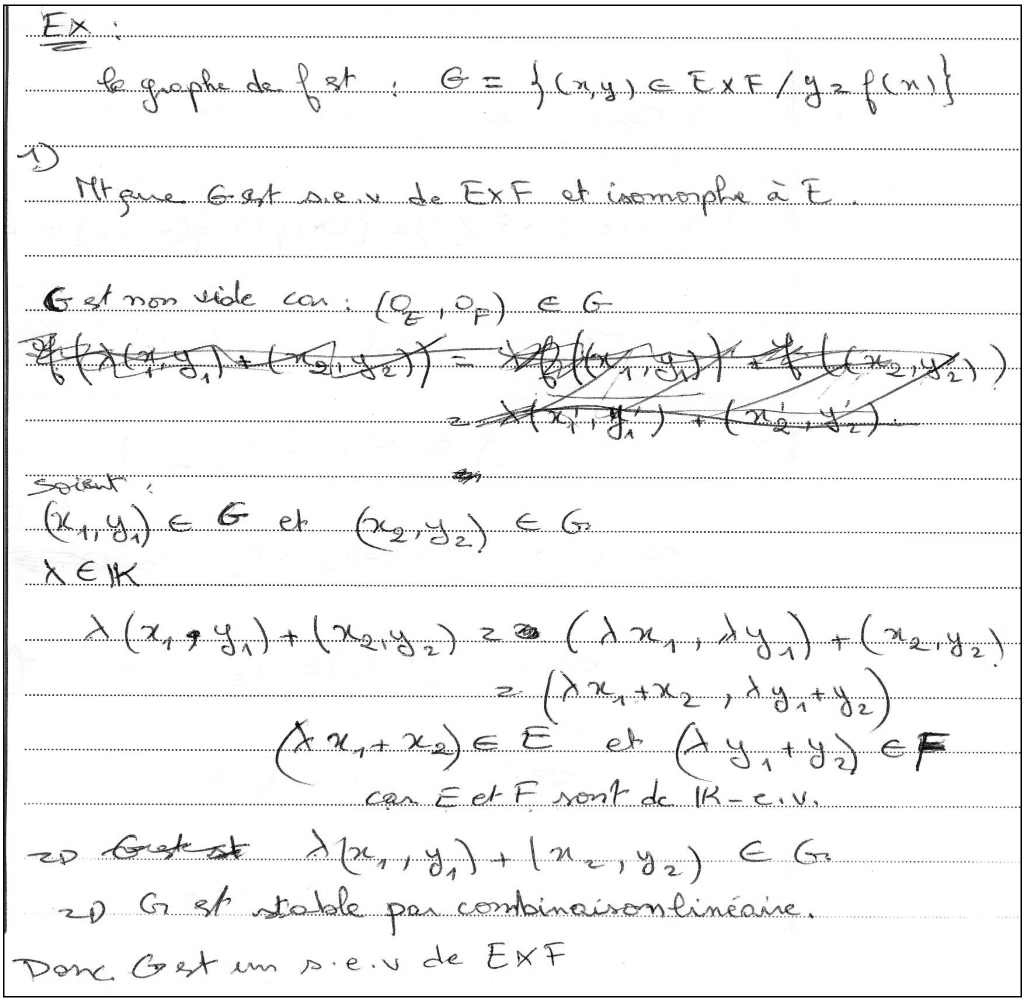
A. Analyse de la première question

*Soient E et F des **K**-espaces vectoriels et soit f une application linéaire de E dans F. On rappelle que le graphe de f est l'ensemble $G=\{(x,y)\in E\times F \,/\, y = f(x)\}$*

1) Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $E\times F$ isomorphe à E.

Groupe 1 (composé par : E_1, E_3 **< M** et E_8 **= M**) :

Nous donnons ci-dessous, la partie de la copie relative à la réponse des étudiants à la question 1.


Ex :

le graphe de f est : $G = \{(x,y) \in E\times F / y = f(x)\}$

1)

Mq que G est s.e.v de $E\times F$ et isomorphe à E.

G est non vide car : $(0_E, 0_F) \in G$

$\cancel{f(\lambda(x_1,y_1)+(x_2,y_2)) = \lambda f(x_1,y_1) + f(x_2,y_2)}$

$\cancel{= \lambda(x_1',y_1') + (x_2',y_2')}$

Soient :

$(x_1,y_1)\in G$ et $(x_2,y_2)\in G$

$\lambda \in \mathbb{K}$

$\lambda(x_1,y_1)+(x_2,y_2) = (\lambda x_1, \lambda y_1)+(x_2,y_2)$

$= (\lambda x_1+x_2, \lambda y_1+y_2)$

$(\lambda x_1+x_2)\in E$ et $(\lambda y_1+y_2)\in F$

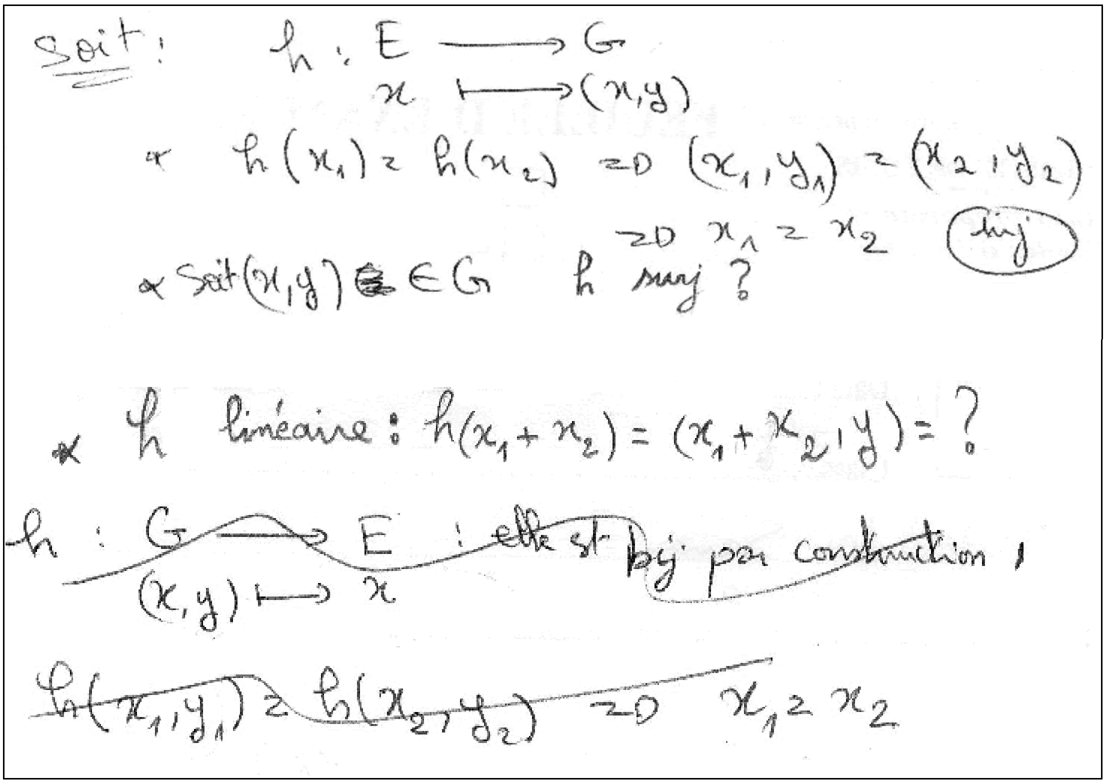
car E et F sont de $\mathbb{K}$-e.v.

$\Rightarrow$ ~~G est~~ $\lambda(x_1,y_1)+(x_2,y_2) \in G$

$\Rightarrow$ G est stable par combinaison linéaire.

Donc G est un s.e.v de $E\times F$

Copie 1 (groupe 1)


<u>Soit</u> : $h : E \longrightarrow G$

$x \longmapsto (x,y)$

* $h(x_1) = h(x_2) \Rightarrow (x_1,y_1) = (x_2,y_2)$

$\Rightarrow x_1 = x_2$ inj

* Soit $(x,y) \in G$ h surj ?

* h linéaire : $h(x_1 + x_2) = (x_1 + x_2, y) = ?$

~~$h : G \longrightarrow E$: elle est bij par construction~~ ,

~~$(x,y) \longmapsto x$~~

$\cancel{h(x_1,y_1) = h(x_2,y_2)} \Rightarrow x_1 = x_2$

Copie 2 (groupe 1)

Analyse

Pour démontrer que G est un sev de E×F, les étudiants choisissent d'utiliser la définition. Ils montrent que G est non vide, en écrivant (sans justification) que $(0_E,0_F) \in G$, et envisagent ensuite de montrer que G est stable par combinaison linéaire. Ils effectuent un calcul correct utilisant une combinaison linéaire d'éléments de G et de **K**. Mais à la fin, ils n'arrivent pas à justifier correctement que le couple obtenu par combinaison linéaire est dans G.

Pour montrer que G et E sont isomorphes, les étudiants construisent l'application h de E dans G qui, à tout élément x de E associe le couple (x,y) de G, où l'élément y n'est pas spécifié. Les étudiants montrent correctement que h est injective. Ils veulent ensuite étudier la surjectivité de h ; ils choisissent alors un élément (x,y) de G, mais n'arrivent pas à lui associer un antécédent par h. Il semble que l'ostensif y choisi, véhiculant l'idée d'une valeur arbitraire, et donc impuissant à exprimer sémiotiquement la relation qui lie les deux composantes x et y (y est l'image de x par f, comme l'indique la définition de l'ensemble G), a constitué pour eux un obstacle. Le même problème s'est posé lorsque les étudiants ont voulu vérifier la linéarité de h.

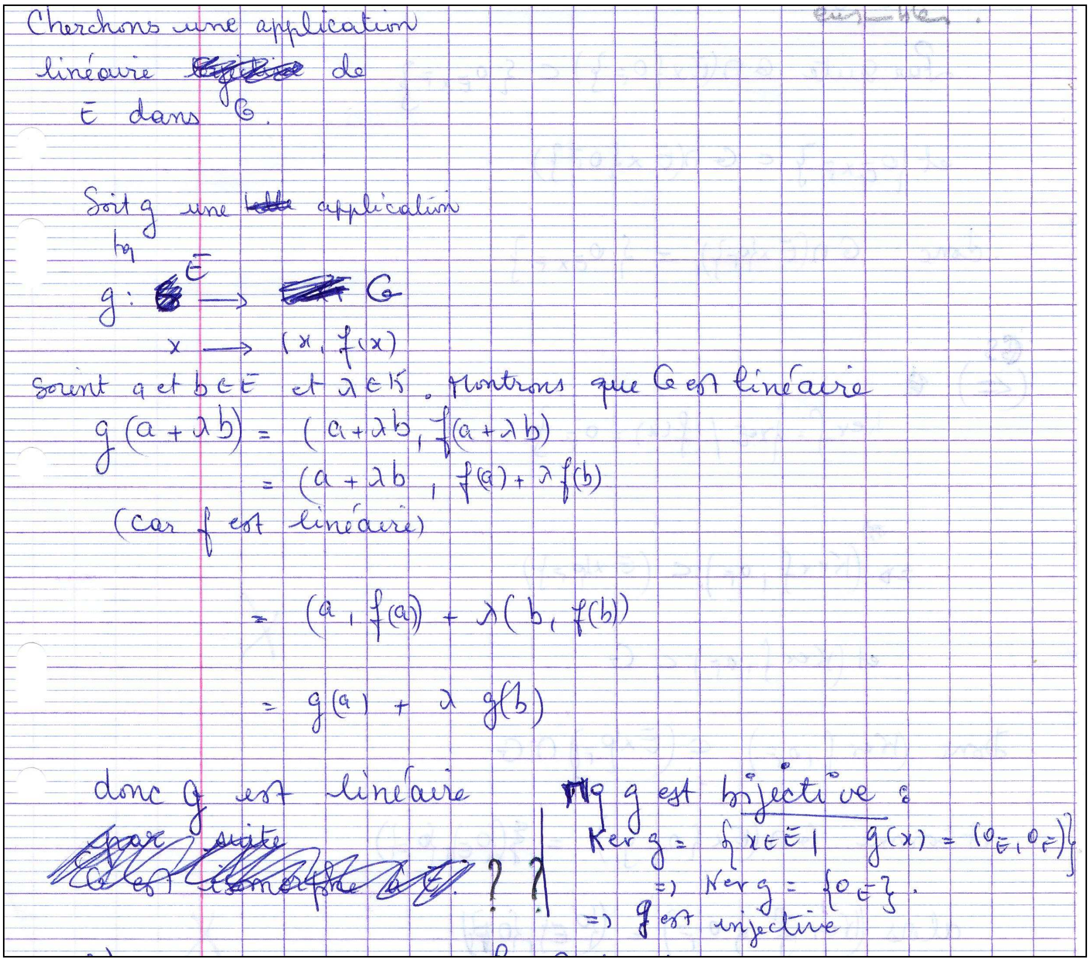
Dans la partie barrée de leur travail, il semble que les étudiants ont essayé de surmonter cette difficulté. Ils ont alors redéfini l'application h en inversant les rôles des ensembles de départ et d'arrivée. Ils écrivent dans ce cas que cette application h est bijective par construction. Ils abandonnent à la fin leur essai.

Commentaire

Les étudiants de ce groupe ont choisi de répondre à chacune des deux parties de la question de façon séparée. Leur travail est bien organisé. Les connaissances mathématiques sous-jacentes à la résolution de la question (sous-espace vectoriel, application linéaire, injection, surjection, espaces vectoriels isomorphes) semblent bien connues. Le problème qu'ils ont rencontré se situe au niveau de l'exploitation de la définition de l'ensemble G. Dans tout leur travail, la condition y=f(x) n'est pas prise en considération. Leurs calculs marquent une relation possible entre x et y, au plus de façon indicielle, quand ils introduisent les notations "y_i" et "x_i". Et, encore peut-on supposer que l'introduction des indices est ici portée par la routine de preuves de stabilité par combinaison linéaire faites dans des exercices antérieurs plutôt que par la volonté de marquer une dépendance. Quoi qu'il en soit, cette expression sémiotique de la liaison entre x et y n'est pas suffisante. Elle conduit à une justification erronée de la stabilité de G pour les lois de E×F, et à une définition incomplète de l'application h. La non spécification de l'élément "y" dans la définition de h et précisément de sa dépendance de x, a donc constitué un obstacle pour démontrer que h est surjective et aussi linéaire. Si "y" était choisi arbitrairement pour une valeur de x donnée, aucune de ces deux propriétés ne serait vérifiée. Résoudre la question posée suppose que le lien entre x et y se matérialise de façon ostensive et opérationnelle au niveau des calculs, et que f(x) puisse être substitué à y. Or, visiblement, pour ces étudiants, ceci pose problème.

Groupe 2 (composé par : E_6**< M**, E_9 **= M** et E_{10}, E_{11}**> M**) :

La partie de la copie relative à la réponse à la question 1 de ce groupe est donnée ci-dessous :



Cherchons une application linéaire de E dans G.

Soit g une ~~telle~~ application tq

$g : E \longrightarrow G$

$x \longrightarrow (x, f(x))$

Soient a et $b \in E$ et $\lambda \in K$, Montrons que G est linéaire

$g(a+\lambda b) = (a+\lambda b, f(a+\lambda b))$

$= (a+\lambda b, f(a)+\lambda f(b))$

(car f est linéaire)

$= (a, f(a)) + \lambda(b, f(b))$

$= g(a) + \lambda g(b)$

donc g est linéaire

~~par suite G est isomorphe à E~~ ??

Mq g est bijective :

$Ker\, g = \{x \in E \mid g(x) = (0_E, 0_F)\}$

$\Rightarrow Ker\, g = \{0_E\}$.

$\Rightarrow g$ est injective

Copie 3 (groupe 2)

Analyse

Les étudiants commencent par chercher une application de E dans G. Ils définissent l'application g qui à tout élément x de E associe le couple (x,f(x)) de G. Ils montrent convenablement que g est linéaire. Après, ils envisagent de montrer que g est bijective. Ils montrent, par des égalités ensemblistes, que Kerg $=\{0_E\}$, ce qui leur permet de conclure que g est injective. La surjectivité de g n'est pas abordée. Nous lisons dans une partie rayée de la réponse: « G est isomorphe à E » (suivie d'un point d'interrogation), ce qui laisse à penser que l'objectif des étudiants par ce travail était seulement de montrer que G et E sont isomorphes et non d'en déduire aussi que G est un sev de E×F. D'ailleurs, dans leur réponse, les étudiants ne font aucune allusion à cette partie de la question.

Commentaire

Le travail accompli par les étudiants de ce groupe est convenablement présenté. L'application g qu'ils définissent reproduit (par l'expression de g(x)) les caractéristiques des éléments de G, ce qui leur permet de bien justifier la linéarité de l'application g. Après une reformulation correcte de l'ensemble Kerf, les étudiants sont également arrivés à établir l'égalité : Kerf = $\{0_E\}$ et ils en ont déduit que g est injective. Leur travail montre donc qu'ils ont réussi à rendre opérationnelle l’écriture caractérisant l’ensemble G. Cependant, ils ne sont pas arrivés à montrer la surjectivité de g. Aucun indice sur la copie ne nous permet de comprendre ce qui les a empêchés de terminer leur travail. La désignation de g(x) a peut être constitué un obstacle pour déterminer les antécédents des couples (x,f(x)). Pour la question relative à la structure de G, il nous semble que les étudiants n’ont pas perçu que la structure de sous-espace vectoriel de G était à démontrer et qu’ils se sont seulement posés la question de l’isomorphisme entre G et E.

Groupe 3 (composé par : E_2, E_4, E_5**< M** et E_7 **= M**)

Nous donnons ci-dessous, la partie de la copie relative à la réponse des étudiants à la question 1.

$G = \{(x,y) \in E \times F \mid y = f(x)\}$. $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

1) G st sev de $E \times F$?

. soit $(x,y) \in G$, (x',y'), $\lambda \in K$.

$(x,y) \in G \Rightarrow y = f(x)$.

. $\lambda(x,y) = (\lambda x, \lambda y) \in G$ car $\lambda x \in E$ et $\lambda y \in F$.

. si $(x,y) \in G$ et $(x',y') \in G$ alors
$(x,y) + (x',y') = (x+x', y+y') \in G$
car $(x+x') \in E$ et $(y+y') \in F$.

. G st non vide $f(0_E) = 0_F$
~~car $(0_E, 0_F) \in G$~~ donc $(0_E, 0_F) \in G$

Ainsi G st un sev de $E \times F$

2) G st isomorphe à E ?

soit $g : G \longrightarrow E$ montrons que g st bijective.
$(x,y) \longmapsto g(x) = y$.

si $x \in \ker f$
$f(x) = 0_F$
$x = 0_E$

$\ker g = \{(x,y) \in G \mid g(x,y) = 0_E\}$.

Soit $(x,y) \in \ker g \Rightarrow g((x,y)) = f(x) = y = 0_E$
$\Rightarrow f(x) = 0_E \Rightarrow$
$y = 0_E$

. G st isomorphe à E ?

on pose $g : G \longrightarrow E$
$(x,y) \longmapsto x$

Copie 4 (groupe 3)

Analyse

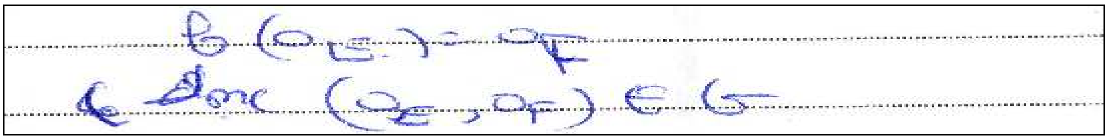
Pour montrer que G est un sev de E×F, les étudiants commencent par vérifier que G est stable pour chacune des lois de E×F. Le calcul de la somme de deux éléments de G et du produit d'un élément par un scalaire est effectué de façon correcte. Mais les étudiants n'arrivent pas à justifier correctement que les éléments obtenus par ces calculs sont dans G. Ils montrent ensuite convenablement que G est non vide.

Pour montrer que G est isomorphe à E, les étudiants construisent en premier temps la projection g de G sur E selon la deuxième composante (qui est dans F et non dans E). Ils ont peut être considéré que f est un endomorphisme de E. Mais, dans ce cas, l'injectivité de g serait liée à celle de f. C'est ce que les étudiants ont apparemment constaté lorsqu'ils ont voulu montrer que Kerg = {0_E} pour prouver que g est injective. Constatant que leur choix de l'application g ne permet pas d'aboutir au résultat demandé, les étudiants changent alors la définition de g et considèrent la projection de E sur G selon la première composante. Leur travail s'arrête malheureusement à cette étape.

Commentaire

Les étudiants ici ont choisi de répondre à chacune des deux parties de la question de façon séparée. Dans la partie relative à « G sev de E×F », le passage d'un couple simple à la composée d'un couple avec un autre ou avec un scalaire fait perdre aux étudiants la propriété caractéristique des éléments de G. En effet, alors que les étudiants formulent cette propriété correctement pour un couple (x,y) de G et aussi pour le couple (0_E,0_F) :


(x,y) ~~Est~~ $\in G \Rightarrow y = f(x)$.


$f(0_E) = 0_F$
donc $(0_E, 0_F) \in G$

ils n'arrivent pas à étendre cette caractérisation des éléments de G pour vérifier la stabilité de G pour les lois de E×F. De même, la première application de G vers E donnée par les étudiants, montre aussi la difficulté qu'ils éprouvent pour adapter la réalisation de tâches routinières à la situation particulière de l'exercice donné. Ceci nous conduit à réfléchir quant à l'effet du travail routinier en mathématiques sur les possibilités d'adaptation au contexte de la situation dans la résolution de problèmes qui pourtant peuvent apparaître, au vu de leur énoncé, très proches de questions de cours.

Groupe 4 (composé par : E_{12} > **M**) :

La partie de la copie relative à la réponse de l'étudiant E_{12} à la question 1 est donnée ci-dessous :

1) MQ que G est sev de $E\times F$ isomorphe à E

$G \neq \emptyset$ car $f(0_E) = 0_F \Rightarrow (0_E, 0_F) \in G$

soit $(x_1;y_1) \in, (x_2, y_2) \in G^2$ et $\lambda \in K$

mq que $\lambda.(x_1,y_1) + (x_2,y_2) \in G$

En effet

$\lambda(x_1, y_1) + (x_2, y_2)$

$= (\lambda x_1 + x_2 ; \lambda y_1 + y_2)$

or $(x_1, y_1) \in G \Leftrightarrow y_1 = f(x_1)$

de même $y_2 = f(x_2)$

d'ou $f(\lambda x_1 + x_2) = \lambda f(x_1) + f(x_2)$ car f morphisme

$= \lambda y_1 + y_2$

d'ou $(\lambda x_1 + x_2 ; \lambda y_1 + y_2) \in G$

Par suite G est un K-sev de $E\times F$

~~soit~~ montrons que G isomorphe à E

soit $\varphi : G \longrightarrow E$

$(x, y) \longmapsto x$

$\varphi(\lambda(x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = \varphi((\lambda x_1 + x_2, \lambda y_1 + y_2)) = \lambda x_1 + x_2$

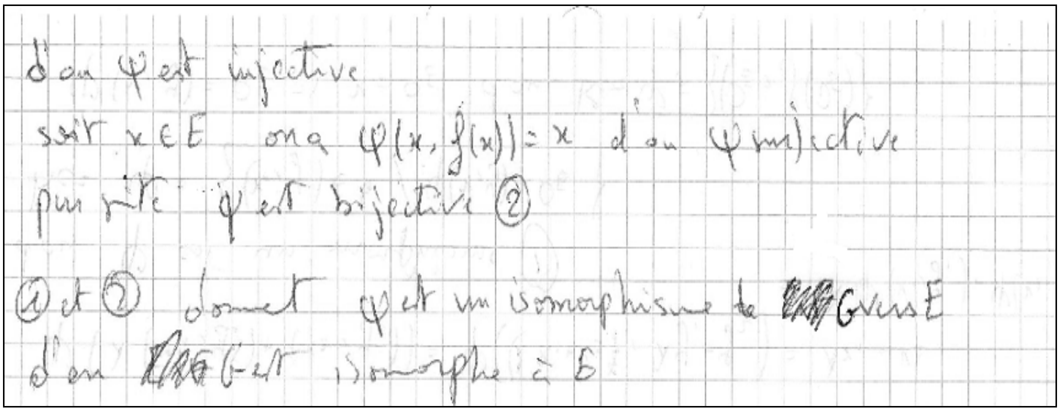
$= \lambda \varphi(x_1, y_1) + \varphi(x_2, y_2)$

d'ou φ est un morphisme (1)

$\text{Ker}\, \varphi = \{(x;y) \in G \,/\, \varphi(x,y) = 0_E\}$

$\varphi(x,y) = 0_E \Rightarrow x = 0_E$ d'ou $\text{Ker}\, \varphi = \{(0_E ; f(0_E))\}$

Copie 5 (groupe 4, page 1)



d'où φ est injective

soit $x \in E$ on a $\varphi(x, f(x)) = x$ d'où φ surjective

par suite φ est bijective ②

① et ② donnent φ est un isomorphisme de G vers E

d'où G est isomorphe à E

Copie 6 (groupe 4, page 2)

Analyse

L'étudiant commence par montrer que G est un sev de E×F en utilisant la définition. Il montre, avec des calculs corrects et convenablement justifiés, que G est non vide et stable par combinaison linéaire. Il construit ensuite l'application ψ de G dans E qui, à tout couple (x,y) de G associe l'élément x de E, et montre que cette application est linéaire, ce qui lui permet d'utiliser la méthode du noyau pour établir que ψ est injective. En utilisant la définition d'une surjection, il prouve que ψ est surjective. Remarquons que dans la propriété d'injectivité de ψ, le travail que fait l'étudiant permet en fait de montrer seulement que $\mathrm{Ker}\psi \subset \{0_E\}$ comme anticipé dans l'analyse a priori de cet exercice. A la fin, l'étudiant récapitule son travail et conclut que G et E sont isomorphes.

Commentaire

L'étudiant répond à chacune des deux parties de la question de façon séparée. Son travail est bien organisé, les calculs sont bien rédigés et les justifications sont conformes. Le détail de cette production nous montre cependant bien la finesse des raisonnements et du jeu entre ostensifs et non ostensifs nécessaire à la résolution de cet exercice, et l'on conçoit mieux comment des étudiants qui apparemment connaissent bien leur cours et savent exprimer à la fois les données du problème et ce qu'ils veulent démontrer peuvent échouer à cette question.

B. Analyse de la deuxième question

Soient E et F des ***K****-espaces vectoriels et soit f une application linéaire de E dans F. On rappelle que le graphe de f est l'ensemble* $G=\{(x,y)\in E\times F \;/\; y = f(x)\}$

2) Montrer que l'application f est injective si et seulement si $G\cap(E\times\{0_F\})=\{0_{E\times F}\}$

Groupe 1 (composé par : E_1, E_3 **< M** et E_8 **= M**) :

Nous donnons ci-dessous la partie de la copie relative à la réponse des étudiants à la question 1.

Mtq que f est inj. ssi $G \cap (E \times \{0_F\}) = \{0_{E\times F}\}$

$\{(x,y) \in E\times F \,/\, y = f(x)\} \cap \{(x, 0_F) \in E\times F\} \overset{?}{=} \{0_{E\times F}\}$

(⇒) Supposons que f est inj :

• soit $(x_1, x_2) \in G \cap (E\times\{0_F\})$

⇔ $f(x_1)=x_2$ et ~~f(...)~~ $x_2 = 0_F$

⇔ $f(x_1) = x_2$ et $f(0_E) = x_2$

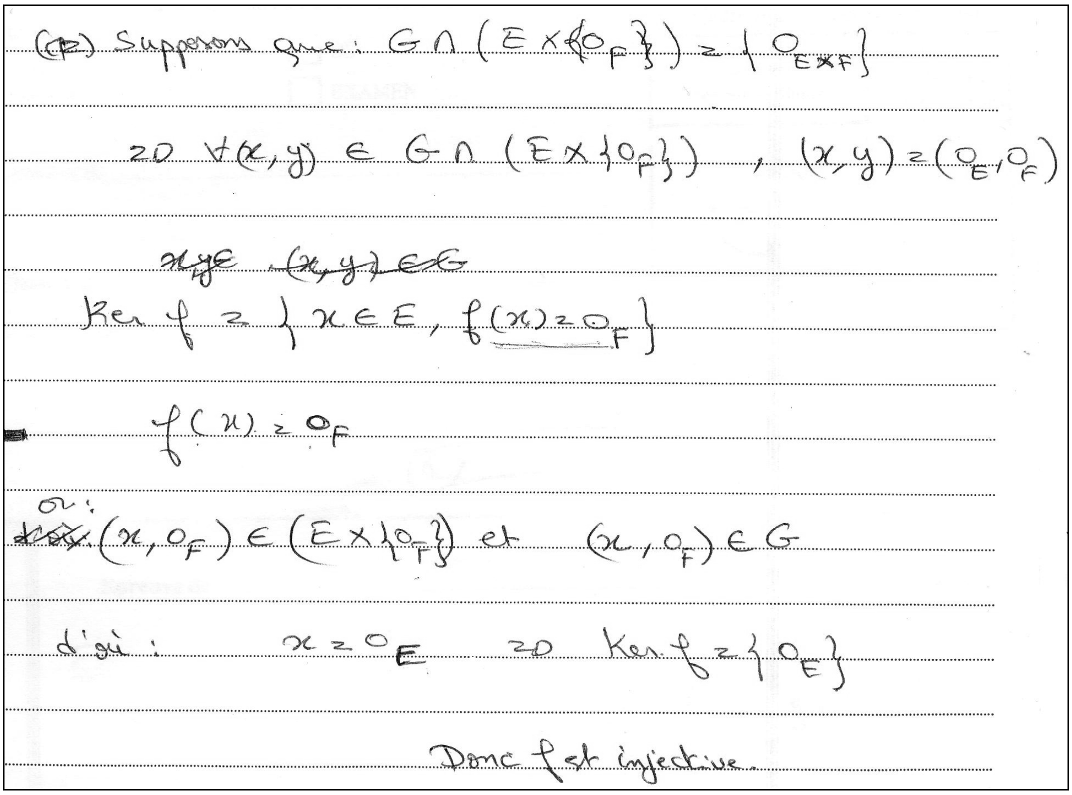
⇔ $f(x_1) = f(0_E)$ or f est injective

⇒ $x_1 = 0_E$

D'où :

$G \cap (E\times\{0_F\}) = \{(0_E, 0_F)\} = \{0_{E\times F}\}$

Copie 7 (groupe 1, page 1)



(⇐) Supposons que : $G\cap(E\times\{0_F\})=\{0_{E\times F}\}$

$\Rightarrow \forall (x,y)\in G\cap(E\times\{0_F\})$, $(x,y)=(0_E,0_F)$

~~$x,y\in$ $(x,y)\in G$~~

$\mathrm{Ker}\, f=\{x\in E,\ f(x)=0_F\}$

$f(x)=0_F$

or : ~~$x\in$~~ $(x,0_F)\in(E\times\{0_F\})$ et $(x,0_F)\in G$

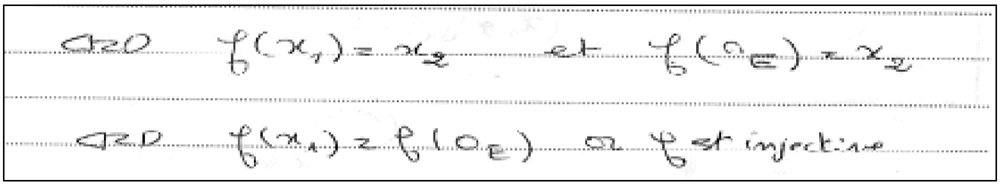
d'où : $x=0_E \Rightarrow \mathrm{Ker}\, f=\{0_E\}$

Donc f est injective.

Copie 8 (groupe 1, page 2)

Analyse

Les étudiants identifient bien les deux conditions (nécessaire et suffisante) de l'équivalence à démontrer. Pour la condition nécessaire, ils commencent par donner une écriture de l'intersection $G\cap(E\times\{0_F\})$ qui leur permet d'apercevoir les caractéristiques des éléments de cette intersection. Ils prennent ensuite un élément (x,y) dans $G\cap(E\times\{0_F\})$, montrent que $x=0_E$ et $y=0_F$ et concluent que $G\cap E\times\{0_F\}=\{0_{E\times F}\}$. Nous remarquons que, dans la dernière équivalence :



$\Leftrightarrow f(x_1)=x_2$ et $f(0_E)=x_2$

$\Leftrightarrow f(x_1)=f(0_E)$ or f est injective

le sens réciproque n'est pas vérifié, car x_2 disparaît dans la dernière ligne. (Notons que pour établir que f est injective, il suffit cependant de travailler par condition nécessaire). D'un autre côté, le travail accompli par les étudiants ne permet d'établir que l'inclusion $G\cap(E\times\{0_F\})\subset\{0_{E\times F}\}$. Il est possible que la deuxième inclusion soit considérée par les étudiants comme évidente, compte tenu des écritures de G et de $E\times\{0_F\}$ données au début. A travers ces dernières, on voit facilement que le couple $(0_E,0_F)$ est dans chacun des deux ensembles de l'intersection.

Pour établir la condition suffisante, les étudiants reformulent l'égalité $G \cap E \times \{0_F\} = \{0_{E \times F}\}$ et en déduisent qu'un élément x de Kerf est nécessairement nul. Ils concluent alors que Kerf est égal à $\{0_E\}$, puis que f est injective.

Commentaire

Mis à part l'erreur dans l'utilisation de l'équivalence, la tâche de démonstration peut être considérée comme soigneusement accomplie par ce groupe d'étudiants. Contrairement à leur réponse à la première question (où l'ensemble G et la caractéristique de ses éléments ont constitué des obstacles à leur travail), les étudiants ici sont arrivés à reformuler convenablement les ensembles en jeu et leurs caractéristiques, et ont réussi à utiliser de façon appropriée ces reformulations pour répondre à la question posée. En examinant de plus prés les réponses des étudiants aux deux questions, nous constatons que les difficultés apparues dans la première question sont liées à la réalisation de tâches routinières dans un ensemble produit (stabilité d'opérations, égalité entre couples, linéarité). Dans cette première question, les étudiants (emportés peut être par les notations indicielles des couples de $E \times F$ et par le calcul routinier dans $E \times F$) semblent ne pas être conscients encore des caractéristiques de l'ensemble G. Par contre, la reformulation de l'intersection $G \cap E \times \{0_F\}$ au début de leur travail dans la deuxième question, leur a permis de mettre en évidence la spécificité de chacun des ensembles G et $E \times \{0_F\}$ et de les utiliser convenablement.

Groupe 2 (composé par : E_6< **M**, E_9 **= M** et E_{10}, E_{11}> **M**) :

La partie de la copie relative à la réponse des étudiants à la question 2 est donnée ci-dessous :

2) ($\Rightarrow$) supposons que f est injective

~~$\Rightarrow$ Ker f = {0_E}~~

Soit $(x,y) \in G \cap E\times\{0_F\}$

$\Rightarrow (x,y) = (x, 0_F) = (x, f(x))$

or $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$ car f est injective

donc $f(x) = 0_F \Leftrightarrow x = 0_E$

D'où $(x,y) = (0_E, 0_F)$

Par suite $G \cap (E\times\{0_F\}) \subset \{0_{E\times F}\}$

et $\{0_{E\times F}\} \subset G \cap (E\times\{0_F\})$

donc $G \cap (E\times\{0_F\}) = \{0_{E\times F}\}$.

($\Leftarrow$)

$\operatorname{Ker} f = \{x\in E \,/\, f(x) = 0_F\}$

$\Rightarrow (\operatorname{Ker} f, 0_F) \subset (E\times\{0_F\})$

et $(\operatorname{Ker} f, 0_F) \subset G$

Donc $(\operatorname{Ker} f, 0_F) \subset (E\times\{0_F\}) \cap G$

et comme $G \cap (E\times\{0_F\}) = \{(\{0_E\}, \{0_F\})$

alors $(\operatorname{Ker} f, 0_F) = (\{0_E\}, \{0_F\})$

D'où $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$

par suite f est injective.

Copie 9 (groupe 2)

Analyse

Les deux conditions, nécessaire et suffisante, de l'équivalence à démontrer sont identifiées par les étudiants. Pour la condition nécessaire, les étudiants démontrent convenablement l'inclusion : $G \cap (E \times \{0_F\}) \subset \{ 0_{E \times F} \}$ et indiquent qu'ils ont aussi l'inclusion réciproque. Ils en déduisent l'égalité demandée.

Pour la condition suffisante, le travail effectué peut être considéré comme valable d'un point de vue heuristique. Toutefois, nous observons des glissements de notations entre couples et produit cartésien d'ensembles, et entre un élément et un singleton.

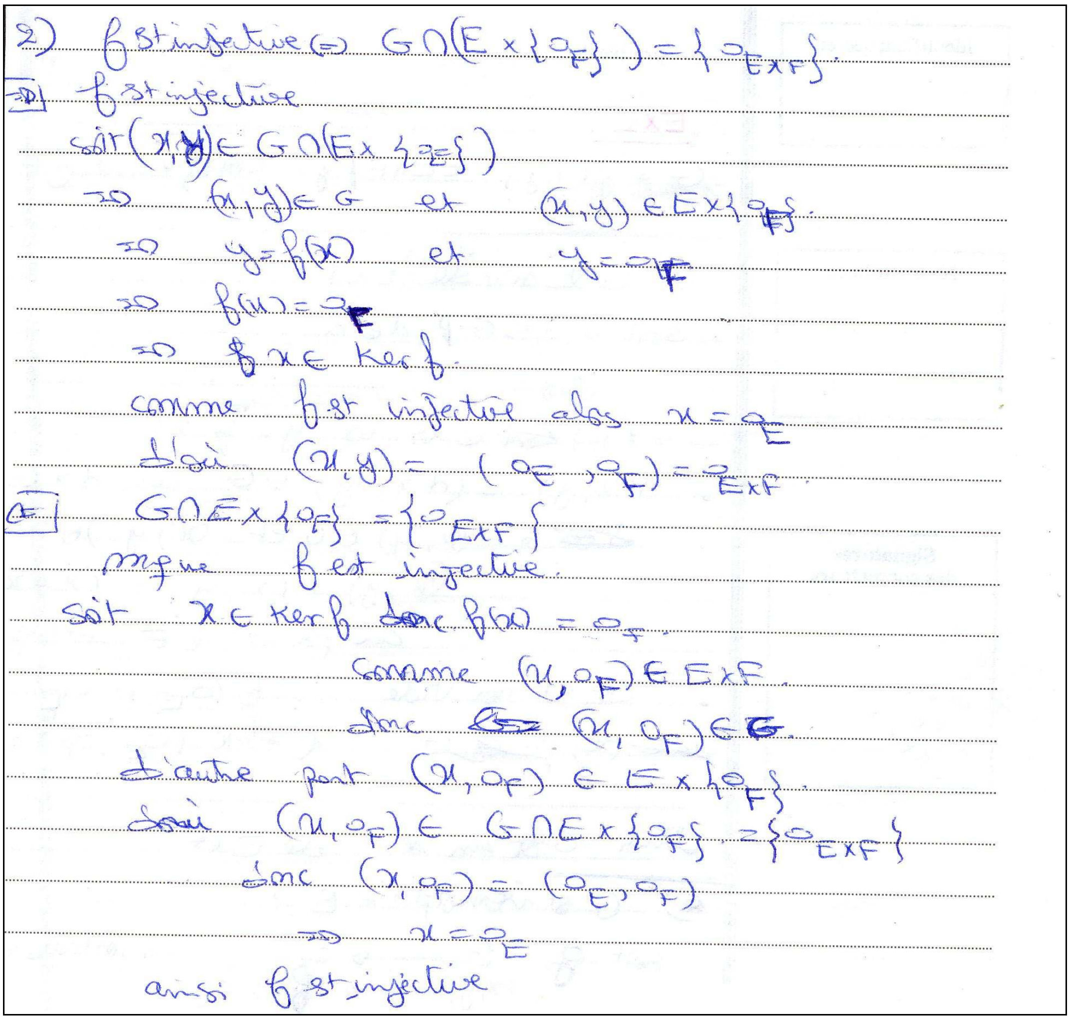
Commentaire

Nous remarquons ici, qu'une désignation approximative[79] des objets manipulés n'a pas empêché les étudiants de produire une preuve qui a permis d'aboutir au résultat attendu. Notons aussi que, comme pour le premier groupe, les étudiants ici ont réussi à rendre opérationnelle la définition de G tout au long de la résolution de la deuxième question.

[79] Autrement dit, une désignons non conforme, mais qui garde a priori une vision non erronée des objets désignés.

Groupe 3 (composé par : E_2, E_4, E_5**< M** et E_7 **= M**)

Nous donnons ci-dessous, la partie de la copie relative à la réponse des étudiants à la question 2.


2) f st injective $\Leftrightarrow$ $G\cap(E\times\{0_F\}) = \{0_{E\times F}\}$.
$\Rightarrow$) f st injective
soit $(x,y) \in G\cap(E\times\{0_F\})$
$\Rightarrow$ $(x,y) \in G$ et $(x,y) \in E\times\{0_F\}$.
$\Rightarrow$ $y=f(x)$ et $y=0_F$
$\Rightarrow$ $f(x)=0_F$
$\Rightarrow$ $x \in \mathrm{Ker} f$.
comme f st injective alors $x=0_E$
d'où $(x,y) = (0_E, 0_F) = 0_{E\times F}$
$\Leftarrow$) $G\cap E\times\{0_F\} = \{0_{E\times F}\}$
mq f est injective.
soit $x \in \mathrm{Ker} f$ donc $f(x) = 0_F$.
comme $(x, 0_F) \in E\times F$.
donc $(x, 0_F) \in G$.
d'autre part $(x, 0_F) \in E\times\{0_F\}$.
donc $(x, 0_F) \in G\cap E\times\{0_F\} = \{0_{E\times F}\}$
donc $(x, 0_F) = (0_E, 0_F)$
$\Rightarrow$ $x = 0_E$
ainsi f st injective

Copie 10 (groupe 3)

Analyse

Les deux conditions, nécessaire et suffisante, de l'équivalence à démontrer sont identifiées par les étudiants. Pour la condition nécessaire, ceux-ci montrent convenablement qu'un élément (x,y) de $G\cap(E\times\{0_F\})$ est nécessairement nul. Ils n'ont pas donné de conclusion pour ce travail, ni fait allusion à l'inclusion réciproque. Ils ont apparemment considéré qu'ils ont effectué le travail essentiel qui permet d'obtenir l'égalité à démontrer.

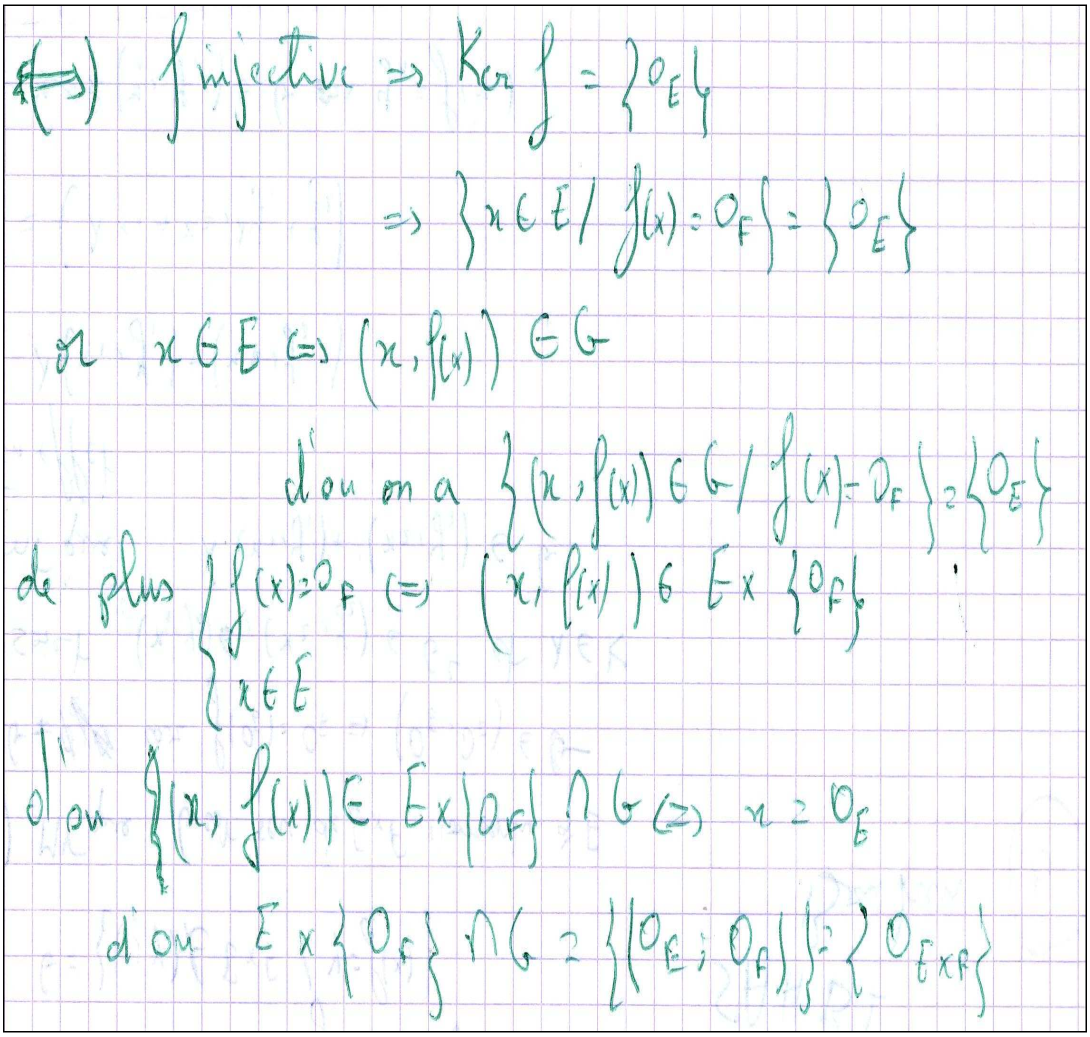
Pour la condition suffisante, les étudiants montrent que si x est un élément de Kerf, alors le couple $(x,0_F)$ est nécessairement dans l'ensemble $G\cap E\times\{0_F\}=\{0_{E\times F}\}$. Ils en déduisent que $x=0_E$, puis que f est injective.

Commentaire

Contrairement à leur réponse à la première question, où les étudiants semblaient être portés par la routine de calcul dans un produit cartésien d'ensembles, ils ont soigneusement démontré l'équivalence proposée dans la question 2. Ils ont particulièrement reformulé et manipulé de façon convenable et cohérente, l'égalité $G \cap E \times \{0_F\} = \{0_{E \times F}\}$.

Groupe 4 (composé par : E_{12} > **M**) :

La partie de la copie relative à la réponse de l'étudiant E_{12} à la question 2 est donnée ci-dessous :


$(\Leftarrow)$ f injective $\Rightarrow \operatorname{Ker} f = \{0_E\}$

$\Rightarrow \{x \in E / f(x) = 0_F\} = \{0_E\}$

or $x \in E \Leftrightarrow (x, f(x)) \in G$

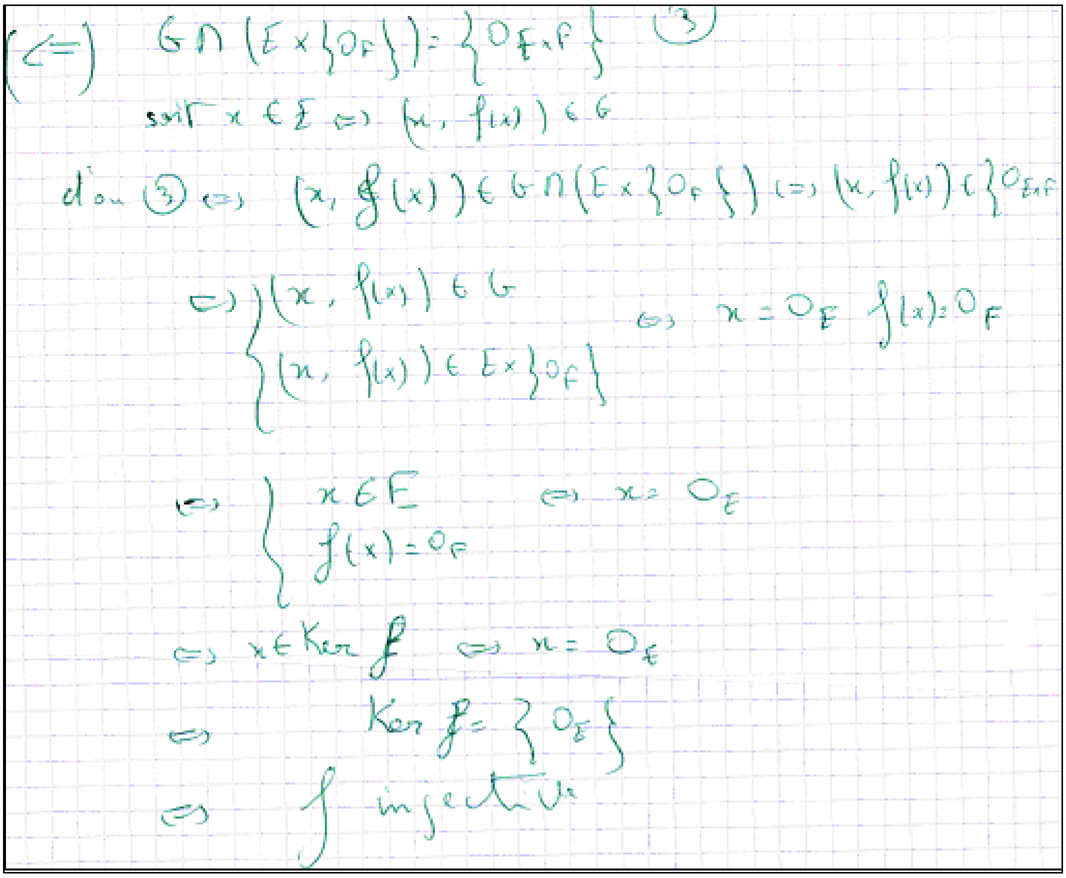
d'où on a $\{(x, f(x)) \in G / f(x) = 0_F\} = \{0_E\}$

de plus $\begin{cases} f(x) = 0_F \\ x \in E \end{cases} \Leftrightarrow (x, f(x)) \in E \times \{0_F\}$

d'où $\{(x, f(x)) \in E \times \{0_F\} \cap G \Leftrightarrow x = 0_E$

d'où $E \times \{0_F\} \cap G = \{(0_E ; 0_F)\} = \{0_{E \times F}\}$

Copie 11 (groupe 4, page 1)



$(\Leftarrow)$ $G\cap(E\times\{0_F\})=\{0_{E,F}\}$ (3)

soit $x\in E \Leftrightarrow (x, f(x))\in G$

d'ou (3) $\Leftrightarrow (x, f(x))\in G\cap(E\times\{0_F\}) \Leftrightarrow (x, f(x))\in\{0_{E,F}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}(x, f(x))\in G\\ (x, f(x))\in E\times\{0_F\}\end{cases} \Leftrightarrow x=0_E \quad f(x)=0_F$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x\in E\\ f(x)=0_F\end{cases} \Leftrightarrow x=0_E$

$\Leftrightarrow x\in \mathrm{Ker}\, f \Leftrightarrow x=0_E$

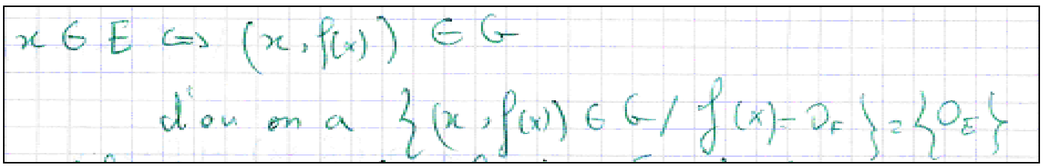
$\Leftrightarrow \mathrm{Ker}\, f=\{0_E\}$

$\Leftrightarrow$ f injective

Copie 12 (groupe 4, page 2)

Analyse

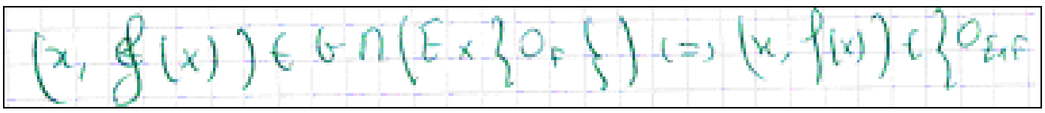
L'étudiant a bien identifié les conditions nécessaire et suffisante de l'équivalence à démontrer. Dans la condition nécessaire, pour obtenir l'égalité : $G\cap(E\times\{0_F\})=\{(0_E,0_F)\}$, l'étudiant reformule les ensembles en jeu, parfois par des égalités entre ensembles et parfois en donnant une propriété équivalente à celle qui caractérise l'ensemble en question. Dans ce travail, l'étudiant fait un glissement entre les deux techniques, ce qui l'a entraîné dans l'erreur d'écriture suivante :



$x\in E \Leftrightarrow (x, f(x))\in G$

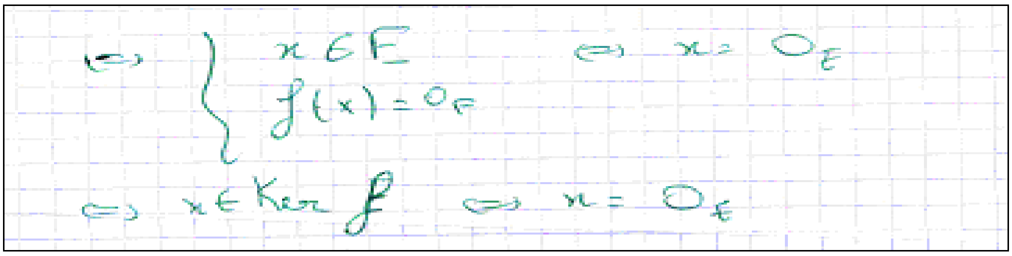
d'ou on a $\{(x, f(x))\in G \,/\, f(x)=0_F\}=\{0_E\}$

Dans la condition suffisante, l'étudiant montre que Kerf $=\{0_E\}$ et en déduit que f est injective. Il reformule pour cela, par des équivalences, la phrase logique:



$(x, f(x))\in G\cap(E\times\{0_F\}) \Leftrightarrow (x, f(x))\in\{0_{E,F}$

L'absence de parenthèses regroupant chacune des propositions de cette équivalence et des propositions qui en découlent entraîne une ambiguïté dans la lecture du texte de démonstration :



$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in E \\ f(x) = 0_F \end{cases} \Leftrightarrow x = 0_E$$

$$\Leftrightarrow x \in Ker\, f \Leftrightarrow x = 0_E$$

Commentaire

Mis à part les erreurs de rédaction que nous venons de soulever, l'étudiant est arrivé à démontrer l'équivalence demandée, et ceci en manipulant de façon appropriée les ensembles et les équivalences mis en jeu dans la question. Il est à noter toutefois que cet étudiant, qui produit jusqu'à maintenant des solutions relativement soignées par rapport à ses collègues, donne ici la solution la plus discutable sur le plan de la rédaction.

VI. 2. 3. Période de discussion

Nous essayons dans cette période, comme lors de la première séance, de comprendre les origines des difficultés rencontrées par les étudiants que nous n'avons pas pu repérer dans l'analyse des productions écrites.

Dans le protocole qui suit, « P » désigne le professeur.

L'étudiant E_3, du groupe 1, passe au tableau.

[1] P : Pour montrer que G est non vide, vous avez écrit : $(0_E,0_F)\in G$. peux-tu justifier ?

[2] E_3 : on a $(0_E,0_F)\in E\times F$ et on sait que $0_F = f(0_E)$ donc $(0_E,0_F)\in G$

[3] P : et pour justifier que $(\lambda.x_1+x_2, \lambda.y_1+y_2)\in G$, vous avez écrit : $\lambda.x_1+x_2 \in E$ et $\lambda.y_1+y_2 \in F$. Est-ce suffisant ?

[4] E_3 : oui, puisque E et F sont des espaces vectoriels, donc ils sont stables

[5] P : mais pour $(0_E,0_F)$ vous avez utilisé en plus la condition y=f(x) ?

[6] E_3 : elle est vérifiée ici, car on prend $y_1=f(x_1)$ et $y_2=f(x_2)$

Le professeur s'adresse aux étudiants du groupe 3, qui ont fait un travail similaire à celui du groupe 1

[7] P : vous, vous avez écrit : (le professeur reproduit au tableau le travail du groupe 3 concernant la stabilité de G)

$$(x,y) \in G \Rightarrow y = f(x).$$
$$\lambda(x,y) = (\lambda x, \lambda y) \in G \text{ car } \lambda x \in E \text{ et } \lambda y \in F$$
$$\text{si } (x,y) \in G \text{ et } (x',y') \in G \text{ alors}$$
$$(x,y) + (x',y') = (x+x', y+y') \in G$$
$$\text{car } (x+x') \in E \text{ et } (y+y') \in F.$$

Vous trouvez ceci suffisant pour justifier que G est stable ?

[8] E_7 : oui !

[9] P : mais pour le couple nul, vous avez écrit : $f(0_E)=0_F$, donc $(0_E,0_F)\in G$

[10] E_7 : oui, car pour un couple il faut la condition y=f(x), mais pour G stable, le problème est dans les opérations.

[11] P : Et si on prend le même ensemble G, avec f non linéaire. Le travail que vous avez fait reste valable dans ce cas, et donc vous pouvez conclure que G est stable dans ce cas aussi.

Les étudiants réfléchissent à la remarque

Le professeur revient à E_3 :

[12] P : pour toi, puisque $y_1=f(x_1)$ et $y_2=f(x_2)$, alors la condition sur l'image est vérifiée. Comment ?

E_3 essaye de vérifier au tableau. Il écrit :

$\lambda.y_1 + y_2 = \lambda f(x_1)+f(x_2) = f(\lambda.x_1 + x_2)$

[13] P : qu'est ce qui te permet d'écrire la deuxième égalité ?

[14] E_3 : la linéarité de f

[15] P : ce n'est donc pas seulement parce que les y_i sont les images des x_i que l'on a $\lambda.y_1 + y_2 = f(\lambda.x_1 + x_2)$. Finalement de quoi résulte la stabilité de G ?

[16] E_3 : de la stabilité de E et F et de f linéaire.

[17] P : bien. Passant à l'isomorphisme entre G et E. Qu'elle application vous avez définie entre G et E ?

E_3 écrit au tableau :

$$h : E \longrightarrow G$$
$$x \longmapsto (x,y)$$

[18] P : vous prenez comme image de x, le couple (x,y) de G ; ça définie bien une application ?

[19] E_3 : oui, chaque x de E a une seule image dans G, h est donc bien définie, et on a montré qu'elle est injective

E_3 écrit au tableau :

$$h(x_1) = h(x_2) \Rightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$$
$$\Rightarrow x_1 = x_2 \quad (\text{inj})$$

[20] P : et pour la surjectivité ?

[21] E_3 : pour h surjective, on a trouvé un problème avec les y, si on prend x antécédent de (x,y), il faut que h(x) donne (x,y), avec le même y.

[22] P : regardons l'application qu'ont définie vos camarades du groupe 3

Le professeur s'adresse aux étudiants du groupe 3 :

[23] P : vous avez considéré l'application suivante :

$$g : G \longrightarrow E$$
$$(x, y) \longmapsto x$$

Mais vous n'avez pas montré que c'est un isomorphisme.

[24] E_5 : nous avons essayé d'abord avec l'application g de G dans E, qui à (x,y) associe y =f(x), mais ça n'a pas marché, pour l'injectivité. On a alors changé l'image par x.

Et on n'a pas terminé…

[25] P : mais y est dans F, c'est pour ça que la première application n'a pas marché. Peux-tu montrer que cette application g est bijective ?

E_5 passe au tableau et écrit:

$g(x_1,y_1)= g(x_2,y_2) \Rightarrow x_1=x_2$, donc g est injective

[26] P : comment ? que faut-il avoir pour que g soit injective ?

[27] E_5 : ah, oui ! il faut que $(x_1,y_1) = (x_2,y_2)$. Il faut donc avoir aussi $y_1=y_2$

Un autre étudiant lui répond.

[28] E : mais y=f(x), donc, si $x_1=x_2$, alors $f(x_1)=f(x_2)$, donc $y_1=y_2$

Le professeur s'adresse à E_5

[29] P : tu es d'accord ?

[30] E_5 : oui, en effet, on obtient comme ça : $(x_1,y_1) = (x_2,y_2)$

[31] P : et pour la surjectivité, comment tu fais ?

[32] E_5 : l'antécédent de x est (x,y), donc elle est surjective. Et elle est linéaire, c'est facile à vérifier

[33] P : faut-il préciser quel (x,y) ?

[34] E_5 : Non, même s'il y a plusieurs (x,y), elle est surjective, mais pas injective.

[35] P : mais dans notre cas, est-ce qu'il y en a plusieurs ?

[36] E_5 : non, si non elle ne serait pas bijective. Il doit être unique, c'est (x,f(x))

[37] E_{11} : on peut aussi remarquer que h est une projection, donc elle est linéaire et surjective

[38] P : bien

Le professeur revient à E_3

[39] P : et toi, est ce que tu peux corriger ce que vous avez fait ?

[40] E_3 : si on écrit, h(x)=(x,f(x)), l'antécédent de (x,f(x)) est x, il est unique, donc h est bijective, et pour la linéarité,

E_3 écrit au tableau :

$h(\lambda.x+y)=(\lambda.x+y\,,\,f(\lambda.x+y))=(\lambda.x+y\,,\lambda.f(x)+f(y))$ (il commente : car f linéaire)

$=\lambda.(x, f(x))+(y, f(y))=\lambda.h(x)+h(y)$, d'où h est linéaire

Le professeur s'adresse après aux étudiants du groupe 2 qui n'ont pas démontré que G est un sev, ni que l'application g qu'ils ont définie entre E et G, [par g(x)=(x,f(x))] est surjective.

[41] P : vous, vous n'avez pas démontré que G est un sev

[42] E_{11} : oui on l'a oublié

[43] P : Et la surjectivité de g ?

[44] E_{11} : on a voulu démontrer que g(E) = G, mais on n'a pas terminé. Mais c'est plus facile de travailler avec l'antécédent, comme E_3.

[45] P : Bien, essayes tout de même de montrer au tableau que g(E) = G

E_{11} passe au tableau et écrit :

par construction, on a $g(E)\subset G$. Soit $z=(x,y)\in G$, alors y=f(x), donc z=(x,f(x))=g(x) et $x\in E$, donc $z\in g(E)$, d'où $G\subset g(E)$. Conclusion : g(E) = G

[46] P : bien. Peut-on utiliser l'application g pour déduire que G est un sev de $E\times F$, au lieu d'utiliser la définition ?

Après un moment de réflexion :

[47] E_{11} : G est l'image d'un espace vectoriel par une application linéaire, c'est donc un espace vectoriel

[48] P : pas exactement, car parler d'une application linéaire, suppose que G est déjà un ev. Il faut donc changer un peu la formulation de la réponse

[49] E_{12} : g est bijective et c'est un morphisme pour les lois de E et de G, on utilise alors le théorème du transfert

[50] P : voilà, on peut faire comme ça.

Fin de la séance de discussion

Pour la deuxième question, vu que les réponses fournies par les étudiants étaient dans leur ensemble satisfaisantes, nous avons préféré discuter avec chacun des quatre groupes, de façon séparée, les insuffisances et/ou les erreurs que nous avions remarquées et que nous avons précisées lors de l'analyse de leurs copies. Les étudiants sont arrivés facilement à apporter les modifications et/ou les justifications nécessaires.

Analyse et commentaire

Les explications données par E_3 et E_7 concernant la stabilité de G, montrent que les étudiants des groupes 1 et 3 lient la stabilité de G, à celle de E et de F pour leurs lois respectives

[3] P : et pour justifier que $(\lambda.x_1 + x_2, \lambda.y_1 + y_2) \in G$, vous avez écrit : $\lambda.x_1 + x_2 \in E$ et $\lambda.y_1 + y_2 \in F$. Est-ce suffisant ?

[4] E_3 : oui, puisque E et F sont des espaces vectoriels, donc ils sont stables

[5] P : mais pour $(0_E,0_F)$vous avez utilisé en plus la condition y=f(x) ?

[6] E_3 : elle est vérifiée ici, car on prend $y_1=f(x_1)$ et $y_2=f(x_2)$

[9] P : mais pour le couple nul, vous avez écrit : $f(0_E)=0_F$, donc $(0_E,0_F)\in G$

[10] E_7 : oui, car pour un couple il faut la condition y=f(x), mais pour G stable, le problème est dans les opérations.

Ceci reflète une conception erronée de la notion de stabilité. Cette conception pourrait résulter du travail d'un certain type d'exercices ou de démonstrations de propriétés qui utilisent cette technique pour justifier la stabilité. Plusieurs exemples de ce genre ont été traités en classe. Nous citons à titre d'exemples les propriétés suivantes qui sont démontrés dans le cours :

- L'intersection d'une famille de sev est un sev

- la somme de deux sev est un sev

- l'ensemble des combinaisons linéaires d'une famille de vecteurs est un sev

Dans ces trois propositions, la stabilité du sev en question découle de la stabilité de (ou des) ensemble(s) qui l'engendre(nt).

Cette technique a été également utilisée dans plusieurs autres situations, lors de la correction de la série d'exercices sur le chapitre « Espaces vectoriels et Applications linéaires » travaillée avec les étudiants dans les séances de travaux dirigés.

Néanmoins, les étudiants sont arrivés à apercevoir l'insuffisance de leur travail et à y apporter les corrections nécessaires. Ceci confirme ce que nous avons anticipé lors de l'analyse des copies des étudiants à propos de l'influence d'une pratique routinière dans le travail des étudiants sur les possibilités d'adaptation à de nouvelles situations.

Concernant l'isomorphisme entre G et E, les justifications données par les étudiants des groupes 1 et 3 à propos des applications qu'ils ont définies montrent que ces étudiants, s'attachent, dans les constructions données, à une conception de correspondance entre les ensembles de départ et d'arrivée plutôt qu'à une conception de dépendance entre les éléments de ces ensembles.

[18] P : vous prenez comme image de x, le couple (x,y) de G ; ça définie bien une application ?

[19] E_3 : oui, chaque x de E a une seule image dans G, h est donc bien définie, et on a montré qu'elle est injective

[20] P : et pour la surjectivité ?

[21] E_3 : pour h surjective, on a trouvé un problème avec les y, si on prend x antécédent de (x,y), il faut que h(x) donne (x,y), avec le même y.

[31] P : et pour la surjectivité, comment tu fais ?

[32] E_5 : l'antécédent de x est (x,y), donc elle est surjective. Et elle est linéaire, c'est facile à vérifier

[33] P : faut-il préciser quel (x,y) ?

[34] E_5 : Non, même s'il y a plusieurs (x,y), elle est surjective, mais pas injective.

[35] P : mais dans notre cas, est-ce qu'il y en a plusieurs ?

[36] E_5 : non, si non elle ne serait pas bijective. Il doit être unique, c'est (x,f(x))

Si l'on tient compte du sens de l'ostensif "y" donné dans l'écriture de l'ensemble G, les applications h et g données par les étudiants restent bien définies. Seulement, les écritures qui les désignent réduisent leur potentiel instrumental et sémiotique et empêchent leur intégration dans d'autres manipulations techniques (nécessitant la dépendance de y avec x) ou théoriques (vérification de certaines propriétés de ces applications).

D'un autre côté, les interventions susmentionnées, montrent que les étudiants se sont posés avec pertinence les questions relatives à l'injectivité et à la surjectivité des applications qu'ils ont définies, ce qui reflète une bonne connaissance de ces notions de leur part (notons aussi dans ce contexte le travail de E_{11} en [45]). Cependant, il a fallu l'intervention du professeur pour que ces étudiants arrivent à mettre en évidence la nécessité de la dépendance entre x et y pour l'étude des propriétés des applications h et g. Et, à la fin, c'est aussi avec l'aide du professeur que les étudiants ont réalisé la possibilité de transmettre la structure d'espace vectoriel à G à partir de celle d'un autre espace, via une application convenablement choisie. Ces remarques attestent d'un certain niveau d'acquisition de connaissances mathématiques et en même temps de difficultés pour affronter de façon individuelle certains obstacles liés à la pratique mathématique. Comme nous l'avons remarqué lors de l'analyse de la première séance, le problème de la validation et la confrontation avec un milieu a-didactique pourraient aussi être impliqués dans les difficultés rencontrées par les étudiants.

VI. 3. Conclusion pour la deuxième séance diagnostique

Trois points essentiels caractérisent les productions des étudiants dans cet exercice :

1) Le premier point concerne l'utilisation du symbolisme mathématique.

Dans chacun des trois premiers groupes, nous observons des niveaux d'adaptation variables de la part des étudiants aux notations et désignations intervenant dans l'exercice. Ceci se produit parfois lors du passage d'une question à une autre et parfois même dans la réponse à une même question. Cette variabilité d'adaptation selon les tâches réalisées permet d'éliminer l'hypothèse de non connaissance du sens des ostensifs mis en jeu. L'examen des caractéristiques de ces tâches, du point de vue routine et moments de réalisation, nous incite plutôt à attribuer les erreurs des étudiants à des manipulations plus ou moins conscientes des formulations symboliques utilisées. Plus précisément, dans la première question, la plupart des étudiants, se trouvant au début de l'exercice en présence de tâches routinières (calcul dans $E\times F$), n'ont pas pris conscience des caractéristiques spécifiques de la situation (ou, peut être aussi, n'ont pas trouvé nécessaire de s'en occuper), vu que la tâche à réaliser ne nécessitait pas, au départ, l'utilisation des caractéristiques de G. Mais, ils ont tous buté quelque part, lorsqu'ils ont voulu établir l'isomorphisme entre G et E. Portés, semble-t-il, par les questions d'injectivité et de surjectivité, ils n'ont pas, encore une fois, pris conscience de la nécessité de revenir à la définition de G pour dépasser leurs difficultés. Dans la deuxième question, par contre, pour démontrer l'équivalence donnée, les étudiants se sont trouvés contraints, dés le début, de procéder à un examen des caractéristiques des ensembles mis en jeu pour pouvoir entamer leur travail. Chose qui leur a permis à la fin de réussir la tâche. Ceci pose la question de l'impact de la routine du travail mathématique sur les possibilités de prise de conscience des caractéristiques d'un problème, et aussi sur les possibilités d'exploration du champ des solutions lors de sa résolution

2) Le deuxième point concerne la production écrite des étudiants.

Les preuves produites par les étudiants dans la deuxième question, malgré les quelques imprécisions et/ou ambiguïtés qu'elles contiennent sur le plan de la formulation linguistique et des représentations sémiotiques, apparaissent cependant convaincantes et relativement acceptables. Ces productions donnent une impression d'une certaine maîtrise, de la part des étudiants, des règles qui régissent le raisonnement déductif et d'une certaine habilité à utiliser le symbolisme mathématique, qui, bien qu'elle reste en deçà de ce qu'attend l'institution sur le plan de la transcription, autorise, semble-t-il, un traitement approprié de la situation du problème, du moins sur le plan stratégique. Ceci nous conduit à reconnaître qu'il y a toujours un décalage entre l'étudiant et l'enseignant concernant le niveau d'utilisation et d'interprétation du langage mathématique et qu'il est important, au niveau de l'enseignement, de savoir comment amener les étudiants d'atteindre progressivement un niveau de formulation qui s'accorde avec les normes requises par l'institution.

3) Le troisième point concerne la construction de l'isomorphisme entre G et E.

La plupart des étudiants semblent rencontrer des difficultés à propos de cette construction, soit au niveau du choix de l'application, soit encore au niveau de la vérification des propriétés d'isomorphisme, qui, a priori, résultent trivialement des relations structurelles qui lient E, G et l'application linéaire f. Ces difficultés découlent essentiellement d'une manipulation inappropriée des objets ostensifs mis en jeu dans cette construction.

Contrairement à la deuxième question, les désignations symboliques ici ont constitué des obstacles pour les étudiants pour poursuivre leur travail. Le choix des moyens ostensifs adéquats et leur manipulation se sont avérés déterminants pour mener à bien la tâche de construction requise. D'un autre côté, nous notons qu'aucun des quatre groupes d'étudiants n'a adopté la stratégie constructive pour montrer que G est un sev de $E\times F$ isomorphe à E. Si nous admettons que les étudiants ont agi, de façon naturelle, selon l'ordre des tâches prescrites dans la consigne (qui pouvait suggérer de traiter chacune des deux parties de la question de façon séparée), il n'en est pas moins vrai que les stratégies constructives, demandant plus de disponibilité pour les connaissances, semblent encore être difficilement accessibles aux étudiants. En même temps, ceci fait apparaître l'effet du milieu et des manières dont agit le sujet sur ce milieu (comme l'interprétation de la consigne) sur les stratégies de résolution adoptées par le sujet.

VII. Conclusion générale pour la partie diagnostique de l'ingénierie et introduction à la remédiation

Les conclusions établies à l'issue des deux séances diagnostiques font état d'une maîtrise, dans l'ensemble convenable, concernant les savoirs mis en jeu dans les exercices. Ceci est attesté par une utilisation appropriée de ces connaissances dans les réponses aux questions d'application directe et aussi par leur mobilisation dans des questions plus difficiles. Néanmoins, dans ce dernier cas, beaucoup d'étudiants ne sont pas parvenus à exploiter de façon pertinente les connaissances mobilisées. Nous notons d'un autre côté des aptitudes dans la réalisation des tâches de démonstration. Ceci pourrait être une conséquence au travail qui a été programmé le long de l'année et qui a concerné les devoirs maison et la participation des étudiants dans la présentation de séquences de cours. Par ailleurs, nos analyses confirment l’existence de difficultés résistantes, constatées déjà dans la première population d’étudiants. Elles nous permettent en outre de mieux comprendre l’origine des échecs observés et de mettre en évidence certains facteurs intervenant dans les difficultés des étudiants dans l’activité de résolution de problèmes. Les principales difficultés constatées à ce propos sont :

1) Les productions des étudiants sont rédigées de façon plus ou moins conforme. Dans les réponses aux tâches de démonstration, les erreurs de rédaction observées ne semblent pas constituer un handicap pour la réussite des raisonnements donnés, ni être nuisibles à leur compréhension, par contre, elles ont constitué des obstacles à la poursuite des raisonnements dans les tâches de construction et/ou d’existence.

2) La sensibilité aux ostensifs et la manipulation du formalisme symbolique ont aussi constitué des obstacles pour le contrôle du Milieu[80] avec lequel les étudiants interagissent. Ce contrôle s’avère déterminant dans l’exploration et la concrétisation des stratégies de résolution.

3) Les questions d’existence et de construction sont problématiques pour les étudiants. Les difficultés mises en évidence à ce propos sont le plus souvent de type heuristique : élaborer des stratégies de travail non indiquées, effectuer des choix de reformulations et des interprétations appropriés, procéder à des organisations adéquates de données et/ou de pas de raisonnement…

4) La routine de la pratique mathématique et les habitudes de travail personnel rendent parfois difficile l’adaptation aux situations nouvelles et semblent contribuer à orienter les réflexions de l’étudiant de façon inappropriée.

Il nous semble que trois facteurs principaux interviennent dans ces difficultés :

- la rigueur et la conformité aux normes requises par un texte mathématique ;

- le milieu et la manière avec laquelle il faut interagir avec lui pour exploiter les potentialités du matériau ostensif et des représentations sémiotiques qui le meublent ;

- la disponibilité des connaissances et le fonctionnement du discours technologique.

[80] « *…défini comme la collection des objets de la situation avec lesquels un sujet est en relation, éventuellement institutionnelle* » (Brousseau, 1998)

Pour le premier point, il nous semble que l'examen des productions des étudiants en situation d'apprentissage ne peut s'accomplir par comparaison aux normes reconnues par les experts, sous peine de supposer que l'objet que l'étudiant est en train d'apprendre est déjà acquis. Comme nous l'avons remarqué dans nos analyses antérieures, l'exigence d'une rigueur rigide dans les productions des étudiants, notamment au moment de la recherche d'une solution d'exercice, pourrait bloquer les démarches heuristiques de raisonnement. Sans nullement vouloir minimiser l'importance qu'il faut accorder dans l'enseignement quant à un usage approprié et conforme du symbolisme mathématique, nous pensons que ceci ne peut être séparé du processus général d'apprentissage des mathématiques et donc que son acquisition se fait de façon progressive et requiert la durée. Selon G. Arsac (1996), *« Il est bien connu historiquement, et évident pédagogiquement, qu'un certain niveau de rigueur est inaccessible avant un développement suffisant des mathématiques : il n'apparaît que lors d'un retour sur quelque chose que l'on sait déjà, en vue de le comprendre mieux, d'une réflexion a posteriori ».* On peut aussi considérer comme Chevallard (1997) qu'« *en matière de justification toutes les imperfections ou presque sont didactiquement acceptables dés lors qu'elles s'inscrivent dans une perspective de progrès épistémologiquement contrôlé* ». Ce sera notre position dans les séances de remédiation pour ce premier point.

Concernant le deuxième point, il importe de savoir comment sensibiliser les étudiants quant à l'importance du choix du matériau ostensif et à sa potentialité instrumentale (Bosch et Chevallard, 1999) dans la réalisation des tâches. Nous situant dans l'approche anthropologique, nous considérons que la connaissance naît du rapport personnel qui s'établit entre le sujet et l'objet de la connaissance, rapport qui émerge des interactions que peut entretenir le sujet avec l'objet dans une institution donnée. Or, c'est au sein des techniques que la valence instrumentale d'un ostensif se laisse opérationnaliser, et c'est à travers elles que se produisent les interactions du sujet avec les ostensifs. Les techniques praxéologiques apparaissent ainsi comme les éléments essentiels où se concrétise l'instrumentalité d'un ostensif et où se justifie sa potentialité. De ce fait, cette instrumentalité dépendra « *du nombre de techniques dans lesquelles [l'ostensif] peut intervenir et elle sera d'autant plus grande que ces techniques se montreront robustes et fiables dans l'accomplissement des tâches concernées*» (ibid., p. 108). Le travail des techniques apparaît ainsi comme la condition sine qua non qui permet de mettre en évidence le rôle que joue l'ostensif, en tant qu'instrument, dans l'activité mathématique et de justifier la pertinence du choix d'un ostensif ou du refoulement d'un autre au sein d'une praxéologie mathématique mise en œuvre dans cette activité. La question qui se pose à ce niveau est de savoir comment, au niveau de l'enseignement, amener les étudiants à prendre conscience de ce rôle et à leur permettre de comprendre l'importance des choix d'ostensifs dans les conditions de réussite et/ou d'échec des stratégies adoptées lors de la résolution de problèmes. Une prise de conscience de ce rôle fait partie de ce que Castela appelle *folklore relatif à la technique* (Castela, 2008b) ou composante pratique de la praxéologie associée. Autrement dit, il s'agit de connaissances qui ne peuvent être acquises que par la pratique et ne peuvent être forgées que dans l'expérience. Admettant que « *le processus d'élaboration des connaissances est déterminé par les interprétations successives que l'élève construit des rétroactions du milieu* » (Lahanier-Reuter, 2007, p. 55), et optant pour l'idée que « *l'enseignement a pour objectif principal le fonctionnement de la connaissance comme production libre de l'élève dans ses rapports avec un milieu adidactique* » (Brousseau, 1998, p. 302), nous postulons qu'une pratique amenant à une manipulation fiable et réfléchie des ostensifs passe par un contrôle conscient du Milieu où se manifestent ces ostensifs. Ce contrôle reste étroitement lié aux conceptions qu'ont les étudiants des processus d'exploration du milieu et aux sens qu'ils attribuent aussi bien aux rétroactions de ce milieu qu'aux ostensifs qui le meublent.

Pour le troisième point, considérant ce qui précède, nous postulons qu'une prise de conscience du fonctionnement des objets de savoir dans la résolution des problèmes est étroitement liée aux conceptions qu'ont les étudiants des processus d'exploration du Milieu, aux actions qu'ils y exercent et aux sens qu'ils attribuent aussi bien aux rétroactions de ce milieu qu'aux objets et aux ostensifs qui le constituent.

Il s'ensuit que dans l'enseignement, une action didactique au niveau du Milieu, des manières de l'explorer, des moyens d'exploiter ses composants et d'une prise de conscience quant aux usages possibles des ostensifs associés et des rétroactions que ce Milieu manifeste pourrait favoriser les apprentissages que nous visons. Ceci dit, deux précisions nous semblent nécessaires pour justifier nos choix concernant les séances de remédiation. La première précision concerne la manière dont nous interprétons l'adidacticité du Milieu pour que les situations dévolues aux étudiants arrivent à provoquer les interactions nécessaires et fassent émerger ce qui est enjeu d'apprentissage. Dans ce contexte, nous choisirons des exercices dont la résolution nécessite l'identification d'un ou plusieurs problèmes intermédiaires (ou encore des tâches *r*-convoquées, selon Castela (2008b)) et en même temps mobilisent des connaissances non nécessairement indiquées. Nous considérons qu'avec ce type de problèmes on ouvre la possibilité de moments adidactiques correspondant à l'identification de nouveaux problèmes intermédiaires ou de connaissances non indiquées.

La deuxième précision concerne l'autonomie dans le travail des étudiants. L'analyse des productions des étudiants dans la partie diagnostique de l'ingénierie montre que le contrôle du milieu est difficile à maîtriser par l'étudiant dans une position d'autonomie autodidacte, bien que ce soit vers cet objectif qu'il nous semble devoir orienter l'action didactique. Pour cette raison, nous choisissons, dans les séances de remédiation, de favoriser les interactions entre étudiants en vue de réunir des conditions propices aux apprentissages visés. Dans le paragraphe suivant, nous précisons les choix organisationnels qui s'ensuivent pour la réalisation des séances de remédiation.

VIII. Organisation générale des séances de remédiation

En cohérence avec la conception que nous venons de décrire, nous aménageons les deux premières séances de remédiation en trois périodes. La première période marque la première rencontre du sujet avec le Milieu (déterminé par le problème qui lui est dévolu) et induit ses premières interactions avec ce Milieu. Pendant cette période, il est attendu que l'étudiant se construise une première représentation du problème, fasse appel à ses connaissances pour comprendre ou reformuler (si besoin est) les données, se saisisse de la question qui lui est posée et réfléchisse à une manière d'y répondre. Il peut éventuellement commencer à faire des essais pour résoudre le problème et/ou déterminer une stratégie à adopter dans la résolution. Dans la deuxième période, deux ou plusieurs étudiants coopèrent à la résolution du problème. Il est attendu que des échanges d'informations concernant l'énoncé et les usages possibles des différentes données aient lieu, et que des conjectures, des méthodes et/ou des stratégies de résolution commencent à se former. Les possibilités d'organisation et d'exploitation des données, les éventualités et les nécessités de reformulation peuvent être discutées. Des rétroactions de la part des interlocuteurs et éventuellement du Milieu peuvent également intervenir. La répartition des étudiants dans cette période se fera de façon à ce que les étudiants au sein d'un même groupe soient d'un niveau équivalent, ceci pour éviter qu'il y ait dans certains groupes des leaders qui se chargent de faire l'essentiel du travail et que les autres se contentent de les suivre. Cette répartition se fait selon les résultats des étudiants au cours de l'année mais aussi en tenant compte de leur travail dans les expérimentations diagnostiques. Les groupes élaborés sont appelés à garder leur composition pour toutes les séances de l'ingénierie en vue d'étudier les évolutions éventuelles des aptitudes des étudiants. A l'issue de cette période, chaque groupe d'étudiant est appelé à fournir par écrit une production commune indiquant les réflexions des membres du groupe quant à la manière de résoudre l'exercice et explicitant les grandes lignes ou la stratégie qu'ils envisagent de déployer dans cette résolution. Il leur est aussi demandé d'indiquer les difficultés éventuelles qu'ils rencontrent dans leur travail. Il n'est pas demandé aux étudiants dans cette phase de développer une solution détaillée de l'exercice. L'enseignant examine les propositions données par les groupes d'étudiants et formule sur leurs copies un minimum de remarques qui, selon les cas, visent à débloquer une situation, suggèrent de changer ou de réorganiser la stratégie produite ou approuvent le travail fait. Ces remarques sont pensées de façon à ce que les étudiants arrivent à apporter les corrections nécessaires ou les modifications souhaitées à leur travail en réagissant aux rétroactions du Milieu. Dans la troisième période, les étudiants d'un même groupe sont tenus à fournir une solution au problème proprement rédigée. Les conjectures et/ou les stratégies proposées dans la deuxième période seront mises à l'épreuve. En effet, les justifications, l'enchaînement des idées et la cohérence que requiert la rédaction de la solution, vont permettre d'attester la pertinence des conjectures ou des stratégies proposées. Des failles dans le raisonnement, des contradictions et des choix inappropriés de reformulations et/ou de pas de raisonnement peuvent être mises en évidence. De nouvelles possibilités offertes par le Milieu ou par les remarques de l'enseignant peuvent aussi apparaître et être exploitées. Les discussions entre étudiants visent à renforcer ces interactions avec le Milieu. Quant à la troisième séance, elle est organisée comme les deux premières, sauf qu'étant consacrée à l'évaluation de l'ensemble de l'ingénierie, elle comprend seulement deux périodes : la période de travail individuel et le travail de groupe sans qu'il y ait intervention de l'enseignant. Nous décrivons dans les paragraphes suivants les expérimentations relatives à chacune de ces trois séances.

IX. Première séance de remédiation

IX. 1. Exercice proposé. Analyse a priori

Exercice

Soient E, F, G trois espaces vectoriels sur **R**, f une application linéaire de E vers F et h une application linéaire de E vers G.
On suppose que Ker h $\subset$ Ker f.
Montrer qu'il existe une application linéaire φ de G dans F telle f = φ o h

IX. 1. 1. Contexte d'enseignement

L'exercice se situe dans le contexte de l'étude des applications linéaires. Au niveau de l'enseignement, le chapitre « Espaces vectoriels et Applications linéaires » est étudié à la fin du premier trimestre de l'année universitaire. Il s'agit d'une partie fondamentale du programme de mathématiques des classes préparatoires. Les notions étudiées dans ce chapitre (entre autres les notions de noyau, d'image d'une application linéaire et de sous espaces supplémentaires dont il est question dans cet exercice) sont reprises dans presque tous les chapitres qui l'ont suivie et particulièrement lors de l'étude des espaces vectoriels de dimension finie. Les étudiants ont aussi eu plusieurs occasions de travailler sur ces notions dans les exercices se rapportant à d'autres chapitres (comme les chapitres sur les polynômes, les matrices, les espaces vectoriels euclidiens…). De ce fait, nous pouvons considérer que ces notions sont assez familières pour les étudiants au moment de l'expérimentation.

La question posée concerne précisément la factorisation d'une application linéaire à travers une autre. Il s'agit d'un cas particulier du résultat plus général suivant :

Théorème

Soit E,F, G trois **K**-espaces vectoriels
1) On suppose que $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(E,G)$
Il existe $w \in \mathscr{L}(G,F)$tel que $u = wov$ si, et seulement si, Ker $v \subset$ Ker u
2) On suppose que $u \in \mathscr{L}(E,G)$ et $v \in \mathscr{L}(F,G)$
Il existe $w \in \mathscr{L}(E,F)$ tel que $u = vow$ si, et seulement si, Im$u \subset$ Imv

Ce théorème, comme aussi la décomposition canonique d'une application linéaire ne sont pas traités en classe[81]. Plus généralement la « factorisation d'une application », malgré son importance en mathématiques, est un type de tâche qui intervient rarement dans le cours d'Algèbre de première année des classes préparatoires[82] et il est peu travaillé en travaux dirigés. Il s'ensuit que la question de l'exercice représente une tâche (notée *T* dans la suite) non routinière pour les étudiants.

IX. 1. 2. Analyse praxéologique

La question posée demande de prouver l'existence d'une application linéaire φ, pour que, sous certaines conditions précisées par l'énoncé, une application linéaire f donnée s'écrive comme composée de φ et d'une deuxième application linéaire h donnée.

Le Milieu de cette tâche *T*, défini par les données et la forme langagière de la question, pourrait suggérer au sujet des pistes de travail lors de son exploration de l'espace de résolution du problème. Le tableau suivant donne certaines de ces pistes et indique les possibilités éventuelles d'exploitation :

Tableau 5 : Pistes d'exploration

Données du Milieu	Pistes possibles	Commentaire
Forme langagière de la question : montrer qu'il existe…	**P_1 :** Réfléchir à l'existence sans chercher à expliciter φ	Piste peu pertinente, car le sujet ne dispose pas de moyens (un théorème par exemple) pouvant lui assurer cette existence sans l'explicitation de φ.
φ est linéaire	**P_2 :** Chercher à résoudre le problème en dimension finie et expliciter φ sur une base de G.	Si la base de G est convenablement choisie, cette piste permet d'avoir une solution du problème dans un cas particulier. Le sujet peu ensuite essayer de s'inspirer de cette solution pour traiter le cas général.
f = φ oh	**P_3 :** Supposer que h est bijective et écrire : $\varphi = f \circ h^{-1}$	Cette piste permet d'avoir une solution du problème dans un cas particulier pour h. Le sujet peut ensuite essayer de s'inspirer de cette solution pour définir φ dans le cas général.
f = φ oh	**P_4 :** Instancier pour un vecteur x de E l'égalité : f(x) = φ[h(x)]	Piste correspondant à une stratégie naturelle pour définir une application et qui peut mener dans ce cas à une solution économique (voir ci-après)

Tenant compte et du contexte d'étude et du milieu de la tâche, nous considérons que la piste 4 est celle qui mène à la solution la plus économique du point de vue des sous tâches et des techniques requises pour le développement de cette solution[83]. L'accomplissement de la

[81] De façon plus générale, la décomposition canonique d'une application (resp. d'un morphisme) f de E vers F et la bijectivité (resp. l'isomorphisme) entre la structure quotient et Imf ne figurent pas dans les programmes de première année des classes préparatoires.

[82] On la rencontre précisément dans deux occasions : à propos des théorèmes sur les applications injectives, surjectives et bijectives et à propos des théorèmes sur les matrices semblables et équivalentes, où par exemple la recherche d'une matrice inversible R vérifiant $P=RQR^{-1}$ peut dans certains cas se ramener à la recherche de l'isomorphisme associée à R. Néanmoins, les contextes de factorisation dans ces deux cas sont éloignés de celui de l'exercice, sauf peut être pour la deuxième question, si on la résout indépendamment de la première question.

[83] En fait, dans un contexte d'étude plus large (en classe de deuxième année, par exemple). Une première méthode consiste à considérer, via l'axiome du choix, une base $(g_i)_{i\in J}$ de Imh que l'on complète en une base

tâche *T* selon cette piste requiert la mise en œuvre respectivement de deux organisations (ou praxéologies) mathématiques. La première, notée OM_1, concerne la définition de la restriction $\bar{\varphi}$ de φ à Imh, quant à la deuxième, notée OM_2, elle concerne le prolongement de $\bar{\varphi}$ à G. L'identification de ces deux organisations mathématiques constitue la mise en place d'une stratégie de travail pour la résolution de l'exercice.

Nous définissons dans la suite les éléments constitutifs de chacune de ces organisations mathématiques, et nous précisons leurs niveaux d'intervention et le rôle du Milieu dans la réalisation de la tâche *T*.

Organisation OM_1

Comme nous l'avons remarqué au tableau 5, l'application d'un élément x de E à l'égalité fonctionnelle f = φoh suggère de commencer par définir la restriction $\bar{\varphi}$ de φ à Imh. Bien que le Milieu donne des indices pouvant inciter à adopter cette démarche de travail, il revient à l'étudiant de reconnaître la pertinence de cette démarche parmi un éventail d'autres pistes de travail. Il s'agit donc ici d'une OM *r-convoquée*[84]. Nous définissons les éléments T_1, τ_1, θ_1, et Θ_1 associés à OM_1 comme suit :

T_1 : Détermination de l'application $\bar{\varphi}$, restriction de φ à Imh

τ_1 : La relation fonctionnelle f = φoh donne : $\forall$ x $\in$ E, f(x) = φ[h(x)]

Donc, pour un élément z de Imh, considérer un x de E tel que z = h(x) et définir φ(z) comme f(x).

Cette technique est justifiée par la technologie suivante qui assure que la définition choisie ne dépend pas de l'antécédent choisi pour z :

θ_1 : Kerh $\subset$ Kerf , qui induit que : pour x_1 et x_2 dans E, $h(x_1) = h(x_2) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

Θ_1 : Théorie des ensembles

Remarquons que la mise en évidence du problème lié à la non injectivité de h et sa résolution via la technologie θ_1 constitue un problème intermédiaire (noté pi_1) auquel les étudiants seront confrontés lors de la réalisation de la tâche T_1. Aussi, certaines difficultés liées à l'usage du symbolisme pourraient-elles apparaître dans le travail de la tâche T_1.

$(g_i)_{i\in I}$ de G. φ sera alors définie sur la base $(g_i)_{i\in I\cup J}$ par la donnée de ses restrictions sur Imh et sur $\mathrm{Vect}(g_i)_{i\in I}$. Une autre méthode de résolution consiste à utiliser le double passage au quotient. En effet, la condition Ker h $\subset$ Kerf montre que le double passage au quotient de l'application $id : E \to E$ à $E / \mathrm{Kerh} \to E / \mathrm{Kerf}$ est possible. Or le premier espace quotient est isomorphe à Imh, le second à Imf, d'ou une application linéaire de Imh dans imf $\subset$ F que l'on prolonge en une application linéaire de G dans F.

[84] Selon Castela (2008), « si l'élève a la charge de reconnaître le type [de tâche] T_0 ou si, malgré les spécificités technologico/théoriques du problème et de son contexte, il doit choisir OM_0 parmi plusieurs OM relatives à T_0 pour mener à bien la résolution, nous dirons que l'organisation mathématique efficace OM_0 intervient au niveau *r-convoquée*, avec ou sans choix de technique suivant les cas, pour signifier que le résolveur a la responsabilité de convoquer lui-même cette OM pour résoudre le problème. Dans le cas contraire (l'énoncé mentionne explicitement le type de tâches et certains éléments de la tâche font qu'une seule technique est envisageable), nous dirons que OM_0 intervient au niveau *OM t-convoquée*, autrement dit mobilisée par la tâche elle-même. (p. 152)

Ainsi, l'étudiant doit pouvoir identifier la partie de G contenant les h(x), il doit pouvoir gérer les dépendances fonctionnelles qui existent entre les éléments des ensembles E, F et G et en particulier les ostensifs associés, comme par exemple les écritures du type $f(x)=\varphi[h(x)]$ et $\varphi(z)=f(x)$ et finalement il doit pouvoir traduire l'hypothèse $\mathrm{Ker}h \subset \mathrm{Ker}f$ de façon opérationnelle pour justifier la technique utilisée.

Remarquons par ailleurs que la linéarité des applications f et h induit naturellement la linéarité de l'application $\overline{\varphi}$. Néanmoins, le problème de linéarité peut être reporté à la fin, une fois que l'application φ est entièrement construite.

Organisation OM_2

Cette organisation, qui permet de prolonger l'application $\overline{\varphi}$ à tout l'espace G, est induite par la stratégie de travail consistant à adopter la piste P_4, comme méthode de résolution. Il s'agit là d'une OM *r-convoquée*, du moment qu'il revient à l'étudiant de fixer sa stratégie de travail et qu'il ne dispose pas de technique immédiate pour réaliser la tâche associée. Nous définissons dans ce qui suit les éléments T_2, τ_2, θ_2, et Θ_2 associés à OM_2 :

T_2 : Prolongement linéaire de $\overline{\varphi}$ à l'espace G.

τ_2 : Considérer un supplémentaire quelconque H de Imh dans G[85] puis définir arbitrairement une application <u>linéaire</u> φ_o de H dans F. (on peut prendre par exemple $\varphi_o(x)= 0_F$, $\forall x\in H$)
L'application linéaire φ telle que $\varphi_{|\mathrm{Im}\varphi} = \overline{\varphi}$ et $\varphi_{|H} = \varphi_o$ répond à la question.

θ_2 : **Théorème**

> Soit E un **K**-espace vectoriel, somme directe d'une famille finie $(E_i)_{i\in I}$, de sous-espaces vectoriels et F un **K**-espace vectoriel.
> Pour tout i de I, soit u_i une application linéaire de E_i dans F.
> Alors, il existe une unique application linéaire u de E dans F telle que, pour tout i de I, l'application u_i soit la restriction de u à l'espace E_i.

Θ_2 : Théorie des espaces vectoriels et applications linéaires

La mise en œuvre de cette organisation mathématique requiert du sujet qu'il se rende compte qu'un prolongement (ensembliste) de $\overline{\varphi}$ à G\Imh (ce qui semble le plus accessible aux étudiants) pose le problème de la linéarité de φ. Ceci définit un deuxième problème intermédiaire pi_2 que les étudiants seront appelés à identifier puis à résoudre via l'organisation OM_2.

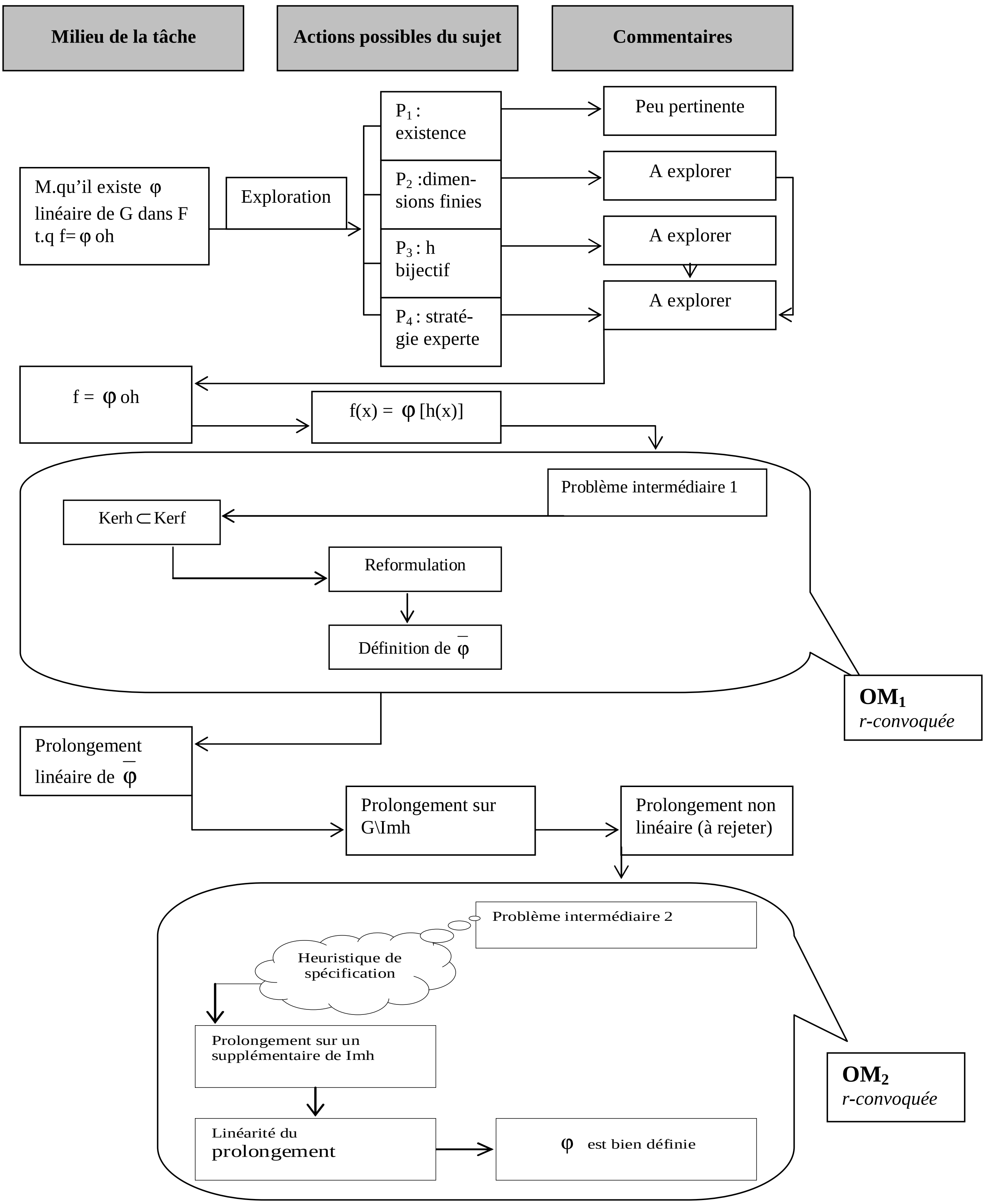
En admettant qu'un étudiant est arrivé à identifier ce problème intermédiaire pi_2, sa résolution ne semble pas évidente, surtout que le théorème cité ci-dessus n'est pas disponible pour les étudiants, étant donné qu'il ne figure pas au programme de première année des classes préparatoires. De plus, l'énoncé ici ne donne aucun indice pouvant amener l'étudiant à considérer un supplémentaire de Imh dans G. Dans cette situation, une manière de surmonter

[85] Le théorème selon lequel tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel (de dimension finie ou non), admet un supplémentaire, dont la démonstration utilise l'axiome du choix, est connu par les étudiants sans démonstration et a été utilisé dans plusieurs occasions en travaux dirigés.

la difficulté serait de se placer dans le cadre particulier d'un espace vectoriel G de dimension finie et d'envisager de définir φ sur une base de G complétant une base de Imh. Après, il revient au sujet de savoir comment passer du cas de dimension finie au cas général. Cette façon de procéder serait une occasion pour les étudiants de percevoir l'intérêt de la « spécification », comme heuristique de raisonnement, dans la résolution de certains problèmes mathématiques. Remarquons que si l'exercice proposait de résoudre au début le problème dans le cadre des espaces vectoriels de dimensions finie, puis de le traiter dans le cas général, il supprimerait plusieurs difficultés mais il priverait aussi les étudiants de plusieurs enjeux d'apprentissage concernant l'activité de résolution de problèmes, ce qui va à l'encontre de l'objectif général de notre ingénierie.

Organigramme récapitulatif de l'analyse a priori

L'organigramme suivant récapitule l'analyse a priori que nous venons d'effectuer.



Organigramme 8

Autres pistes de résolution

Piste P_2 : On commence par étudier le problème dans le cas particulier d'un espace vectoriel G de dimension finie. Puisqu'il s'agit de déterminer une application linéaire φ, il suffit alors de définir cette application sur une base de G. En notant $e_1, \ldots, e_p$, une base de Imh, tels que $e_1=h(a_1), \ldots, e_p=h(a_p)$, où $a_1, \ldots, a_p$, sont dans E, et en posant : $\varphi(e_1)=f(a_1),\ldots,$ $\varphi(e_p)=f(a_p)$, on obtient la restriction $\overline{\varphi}$ de φ à Imh. On complète ensuite $(e_1, \ldots, e_p)$ en une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de G, et on définit une application linéaire quelconque $\overline{\overline{\varphi}}$ sur le sev $Vect(e_{p+1},\ldots,e_n)$ (en posant par exemple $\overline{\overline{\varphi}}(e_{p+1})=\ldots=\overline{\overline{\varphi}}(e_n)=0_F$). L'application φ est alors déterminée par ses restrictions $\overline{\varphi}$ et $\overline{\overline{\varphi}}$, dont les espaces de départ forment une somme directe pour G. Remarquons que cette application linéaire n'est pas unique, du fait que le prolongement $\overline{\overline{\varphi}}$ est quelconque. Ceci étant, pour passer au cas général d'un espace vectoriel G quelconque, il suffit de définir φ explicitement à l'aide de ses restrictions $\overline{\varphi}$ et $\overline{\overline{\varphi}}$ respectivement sur Imh et sur un supplémentaire de Imh dans G. Ce passage du cas d'un espace vectoriel G de dimension finie au cas général, pourrait poser des difficultés au niveau du changement de points de vue. En effet, le sujet devrait savoir comment se passer de la base $(e_1, \ldots, e_n)$ si G est de dimension quelconque et devrait comprendre comment interpréter le sev $Vect(e_{p+1},\ldots,e_n)$ dans le cas général.

Piste P_3 : Cette piste consiste à commencer par étudier le cas où l'application h est bijective. Dans ce cas, la composition par h^{-1} permet d'obtenir immédiatement l'application φ ($\varphi = foh^{-1}$). Pour exploiter ce cas particulier dans l'étude du cas général, il suffit de remarquer, via l'instanciation d'un vecteur a de G dans la relation $\varphi = foh^{-1}$, que pour h bijective, l'image de tout élément z de G par φ, s'obtient en prenant l'antécédent a de z par h puis l'image de a par f. Outre la mise en évidence de cette étape de transition, le passage du cas particulier au cas général confronte le sujet à au moins deux autres difficultés, la première concerne le fait que h(E) ne recouvre plus nécessairement tout l'espace G, et la deuxième est liée à la multiplicité éventuelle des antécédents des éléments de h(E).

Conclusion

Pour aborder ce problème, les étudiants disposent de plusieurs pistes de travail leur permettant d'explorer l'espace de résolution ou d'approcher la solution. Toutefois, tenant compte du contexte d'enseignement dans lequel est proposé l'exercice, quelle que soit la stratégie de résolution adoptée par l'étudiant, celui-ci devrait être amené à un moment donné de son travail à mettre en œuvre deux organisations mathématiques *r-convoquées* : OM_1 et OM_2. La réalisation des taches associées à ces deux organisations requiert pour chacune l'identification et la résolution d'un problème intermédiaire. Le problème intermédiaire 1 concerne la définition de $\overline{\varphi}$ (restriction de φ à Imh) et est lié à la non injectivité éventuelle de h, sa résolution demande une reformulation appropriée de l'hypothèse $Kerh \subset Kerf$. Le problème intermédiaire 2 concerne le prolongement linéaire de $\overline{\varphi}$ à l'espace G. Pour satisfaire la propriété de linéarité de φ, le passage par un supplémentaire de Imh dans G est inévitable. Vu que l'énoncé ne donne aucun indice quant à l'utilisation d'une décomposition en somme directe de G, une bonne disponibilité de cette notion, et la distinction entre les notions de complémentaire et de supplémentaire d'une part et entre la situation de prolongement linéaire et celle de prolongement ensembliste, d'autre part, s'avèrent essentielles pour résoudre ce problème. Pour surmonter cette difficulté, le sujet peut envisager l'étude du problème dans le cas particulier d'espaces vectoriels de dimension finie, puis réfléchir au passage au cas général.

Toutes ces données nous permettent de considérer l'exercice proposé comme support possible d'une situation adidactique présentant plusieurs enjeux d'apprentissage, aussi bien sur le plan de l'usage des connaissances que requiert la résolution du problème que sur le plan heuristique.

Concernant l'usage des connaissances, nous notons principalement la gestion des objets du cadre d'algèbre linéaire dans lequel se situe l'exercice, avec notamment les possibilités d'exploitation de l'hypothèse $\mathrm{Kerh} \subset \mathrm{Kerf}$, la gestion des difficultés résultant de l'usage de la relation fonctionnelle : $f = \varphi o h$ et la décomposition de G en une somme directe appropriée. Pour ce qui est du côté heuristique, nous notons l'exploration de l'espace de résolution et la manière selon laquelle sera pensé le prolongement linéaire de $\overline{\varphi}$. Ces deux points constituent les composantes pratiques liées à la résolution du problème.

IX. 2 Déroulement de l'expérimentation

La séance d'expérimentation s'est déroulée dans une après midi libre pour les étudiants. Dix étudiants (parmi les douze qui ont participé aux séances diagnostiques) y ont participé. Le tableau suivant donne la répartition des étudiants selon leurs moyennes en mathématiques aux deux premiers trimestres de l'année universitaire.

Etudiant	E_2	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8	E_9	E_{11}	E_{10}	E_{12}
Moyenne 1er trimestre (sur 20)	8,79	9,18	9,56	9,68	10,08	10,52	10,99	11,72	11,03	13,22
Moyenne 2er trimestre (sur 20)	9,20	9,10	10, 09	9,89	10,53	10,40	11,34	12, 64	11,50	13,36
Groupes	**Groupe 1**				**Groupe 2**			**Groupe 3**		

Tableau 6 : Niveau institutionnel des étudiants

Comme nous l'avons indiqué dans la conception globale de l'ingénierie, la séance est partagée en trois périodes que nous décrivons ci-dessous.

Première période (moment de la première rencontre avec le problème)

Pendant cette période, il est demandé aux étudiants de réfléchir à l'exercice de façon individuelle. Ceci afin de donner à tout un chacun l'occasion de s'approprier l'énoncé de l'exercice, d'explorer les moyens possibles de l'aborder et éventuellement de déterminer une stratégie de résolution. Cette période permet ainsi à chaque étudiant d'avoir sa conception personnelle quant à la façon de résoudre le problème qu'il sera appelé à justifier et à discuter avec ses pairs lors du travail en commun. Cette période a duré environ quinze minutes.

Deuxième période (moment de mise en commun et émergence d'une procédure de résolution)

A l'issue de la première période, les étudiants sont répartis en trois groupes comme l'indique le tableau 6. Cette répartition est effectuée de façon à ce que les étudiants d'un même groupe aient des niveaux proches. Ceci dans l'objectif d'éviter qu'il y ait un sujet dominant dans un groupe, ce qui pourrait décourager certains étudiants de faire entendre leur point de vue ou de participer à l'élaboration de la solution. A la fin de cette période, chaque groupe est appelé à fournir une production commune dans laquelle seront explicitées les premières réflexions des membres du groupe, la façon avec laquelle ils envisagent de résoudre l'exercice et éventuellement les obstacles qu'ils auront rencontré pour avancer dans la résolution. Cette période a duré environ vingt minutes.

L'enseignant, après avoir examiné les productions des différents groupes, mentionne sur les copies fournies les remarques qu'il trouve nécessaires pour la poursuite du travail.

Troisième période

Dans la troisième période, les étudiants de chaque groupe reprennent leur travail et poursuivent la résolution de l'exercice, dans un milieu enrichi par les remarques formulées par l'enseignant. A la fin, chaque groupe remet à l'enseignant une copie explicitant le travail réalisé. Cette période a duré environ quarante minutes.

Après examen des différentes productions fournies par les étudiants nous avons constaté qu'en dépit des différentes méthodes utilisées, le problème du prolongement linéaire de l'application φ n'avait été résolu complètement par aucun des trois groupes. Nous avons alors trouvé utile d'organiser une discussion commune à la fin de la séance en vue de débloquer la situation. Nous rapportons cette discussion dans (IX. 4).

IX. 3. Analyse des productions des étudiants

Nous procédons dans ce paragraphe à l'analyse des deux productions fournies pendant la séance par chacun des trois groupes. Nous désignons par « Production 1 (resp. 2) » celle qui a été remise à l'issue de la première (resp. deuxième) période. Dans ces productions, les remarques de l'enseignant sont entourées d'un trait gras.

IX. 3. 1. Analyse des productions du groupe 1

a) Analyse de la production 1

$f : E \to F \qquad h : E \to G$

$\ker h = \{ x \in E \,/\, h(x) = 0 \}$

$\ker f = \{ x \in E \,/\, f(x) = 0 \}$

$\ker h \subset \ker f \Rightarrow h(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0$

$\varphi\,? \qquad f = \varphi \circ h$

1e cas : h bij donc $\varphi = f \circ h^{-1}$

2e cas : h non bij ?

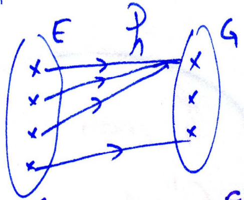
donc $\ker h \neq \{0_E\}$

$\exists\, x \neq 0_E \,/\, h(x) = 0_E$

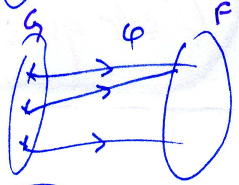
$$\varphi : \begin{array}{l} G \longrightarrow F \\ x \longmapsto \varphi(x) \end{array}$$

~~$h(\varphi(x)) =$~~

$f = \varphi \circ h \Rightarrow f(x) = \varphi(\underbrace{h(x)}_{G})$?



non bij

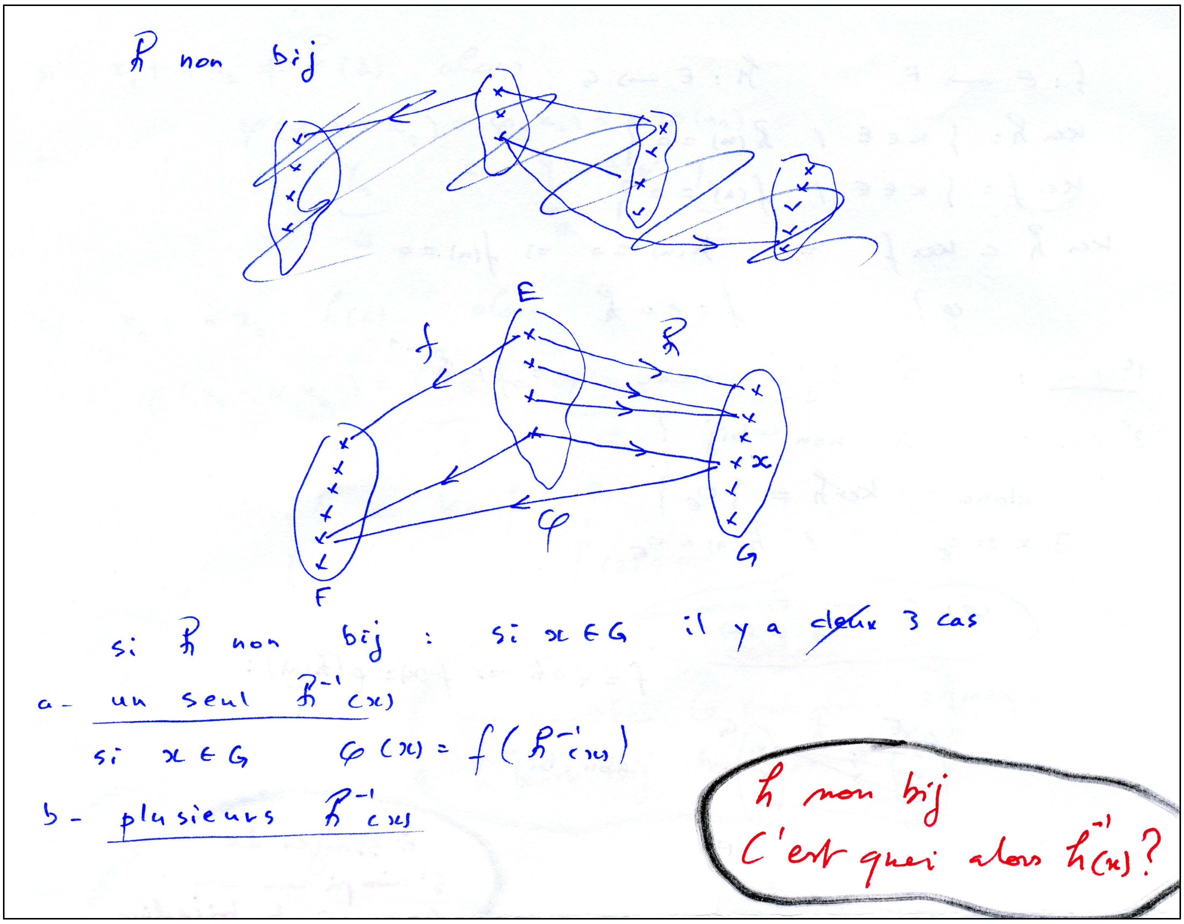


$$\begin{array}{lllll} E & \longrightarrow & G & \longrightarrow & F \\ x & \longrightarrow & h(x) & \longrightarrow & \varphi(h(x)) \end{array}$$

$x \in G$, $\varphi(x)$?

Essayer de s'inspirer du cas où h bijective pour traiter le cas général

Production 1, page 1 (Groupe 1)



Suite de la production 1 (Groupe 1)

Analyse

Dans la première page de cette production, les étudiants reprennent les données de l'exercice tout en explicitant les définitions des ensembles Kerh et Kerf et donnent une reformulation de l'hypothèse $\text{Kerh} \subset \text{Kerf}$. Ils entament ensuite la résolution de l'exercice en considérant deux cas : le cas où h est bijective et le cas où h n'est pas bijective, c'est-à-dire en empruntant la deuxième piste identifiée dans l'analyse a priori. Dans le premier cas, l'application φ est facilement obtenue par composition de f avec h^{-1} comme attendu. Dans le deuxième cas, les étudiants essayent au départ de voir les caractéristiques de la situation entraînées par la non bijectivité de h. Ils produisent ainsi une première reformulation de la non bijectivité de h correspondant à h non injective (ce qui est suffisant mais pas nécessaire. Peut être que la donnée de Kerh dans l'énoncé les a incités à interpréter ainsi la non-bijectivitié). Dans le diagramme en dessous, ils passent à une représentation ensembliste de la non bijectivité de h, toujours traduite en non injective, en considérant des ensembles finis de faible cardinal. Ils essaient ensuite de représenter dans le même registre sémiotique la composition de φ et de h. Dans toutes ces représentations, l'inscription $f = \varphi o h$ n'est pas surajoutée. Les étudiants de ce groupe se retrouvent bloqués à cette étape de leur travail, n'arrivant visiblement pas à percevoir comment ils peuvent exploiter ces représentations. Dans la deuxième page de cette production, tenant compte de la remarque qui leur a été adressée par l'enseignant, les étudiants essayent de s'inspirer du cas où h est bijective pour définir φ dans le cas où h n'est pas bijective. Dans les diagrammes correspondants, le lien entre les applications f, h et φ est établi, mais nous remarquons dans cette représentation l'absence d'images par f des deux éléments de E ayant la même image par h, qui correspond au cas le plus problématique. Néanmoins, les étudiants semblent avoir compris comment se fait l'articulation entre les trois applications pour définir l'application φ dans le cas général, et dans leur rédaction, ils indiquent bien qu'il y a trois cas à distinguer selon le nombre d'antécédents de x par h. Ils n'arrivent cependant pas à se détacher du symbolisme spécifique au cas de h bijective. Ainsi, ils continuent à employer le symbole $h^{-1}(x)$ pour désigner un antécédent de x lorsque h n'est pas bijective.

Commentaire

La reprise des données de l'exercice faite au début, tout en explicitant les définitions ou des reformulations de certaines de ces données, montre que les étudiants ont cherché, par cette expansion discursive de l'énoncé, à avoir une représentation plus claire du problème et peut être aussi à établir des liens possibles entre ces données, chose qui pourrait leur indiquer des pistes de travail. La position de φ dans la relation $f = \varphi o h$ semble être la première difficulté rencontrée. Pour la surmonter, les étudiants ont commencé par traiter le cas particulier de h bijective, lequel évacue toutes les difficultés liées au problème. En passant au cas où h n'est pas bijective, les étudiants semblent éprouver du mal à expliciter $\varphi(x)$ à l'aide de f et h. L'usage du même ostensif x dans les écritures $\varphi(x)$ et $\varphi(h(x))$, sans que celui-ci joue le même rôle dans chacun des deux cas (il est élément de G dans le premier cas et élément de E dans le deuxième) a ajouté une difficulté au problème. En s'inspirant du cas où h est bijective, et en utilisant des diagrammes traduisant de façon simplifiée le problème dans un registre graphique ensembliste, les étudiants semblent arriver à voir comment est définie l'application φ à partir de f et h, sans pour autant arriver à employer le symbolisme adéquat pour expliciter $\varphi(x)$.

Le problème intermédiaire pi_1 est ainsi mis en évidence par ce groupe. Notre remarque sur la deuxième page vise à les sensibiliser à la présence d'un problème au niveau de l'usage du symbolisme afin qu'ils apportent les rectifications nécessaires.

A cette étape de leur travail, les étudiants font preuve d'une certaine organisation dans les démarches entreprises et d'une aptitude à se représenter le problème et à lui chercher une solution à partir d'une situation particulière simple. Certaines difficultés sont cependant à noter dans les diagrammes produits dues au fait que ceux-ci, ensemblistes, ne prennent pas en compte les spécificités du cadre d'algèbre linéaire dans lequel se situe le problème. La possibilité d'exploitation du cas particulier où h est bijective pour traiter le cas général n'a pu être mise en évidence par les étudiants qu'après l'intervention de l'enseignant. Ceci traduit des difficultés liées à la composante pratique concernant l'exploration de l'espace de recherche de la solution.

b) Analyse de la production 2

a- $x \in G \quad \exists!\, y \in E \;/\; h(y) = x$

donc $\varphi(x) = f(y)$.

b- $\exists\, y_1, y_2 \in E \;/\; h(y_1) = h(y_2) = x$

donc $\varphi(x) = f(y_1) = f(y_2)$

c- $\nexists\, y \in E \;/\; h(y) = x$

on n'utilise pas f

donc $\varphi(x) = y$ quelconque

Vérifiez si φ est bien définie !

φ linéaire

- si h bij alors h^{-1} linéaire
  donc $\varphi = f \circ h^{-1}$ linéaire
- si h non bijective

$\varphi : G \longrightarrow F$

$x_1, x_2 \in G \quad , \alpha \in \mathbb{R}$

$\varphi(x_1 + \alpha x_2) = \varphi(x_1) + \alpha\, \varphi(x_2)$?

* dans a et b on sait qu'il $\exists\, y_1, y_2 \in E$ /

$h(y_1) = x_1$ et $\varphi(x_1) = f(y_1)$

$h(y_2) = x_2$ et $\varphi(x_2) = f(y_2)$

$\varphi(x_1 + \alpha x_2) = \varphi(h(y_1) + \alpha h(y_2)) = \varphi(h(y_1 + \alpha y_2))$ car h linéaire

$= f(y_1 + \alpha y_2) = f(y_1) + \alpha f(y_2) = \varphi(x_1) + \alpha\, \varphi(x_2)$

donc linéaire

* dans c $\quad \varphi(x) = y$ ~~...~~ quelconque

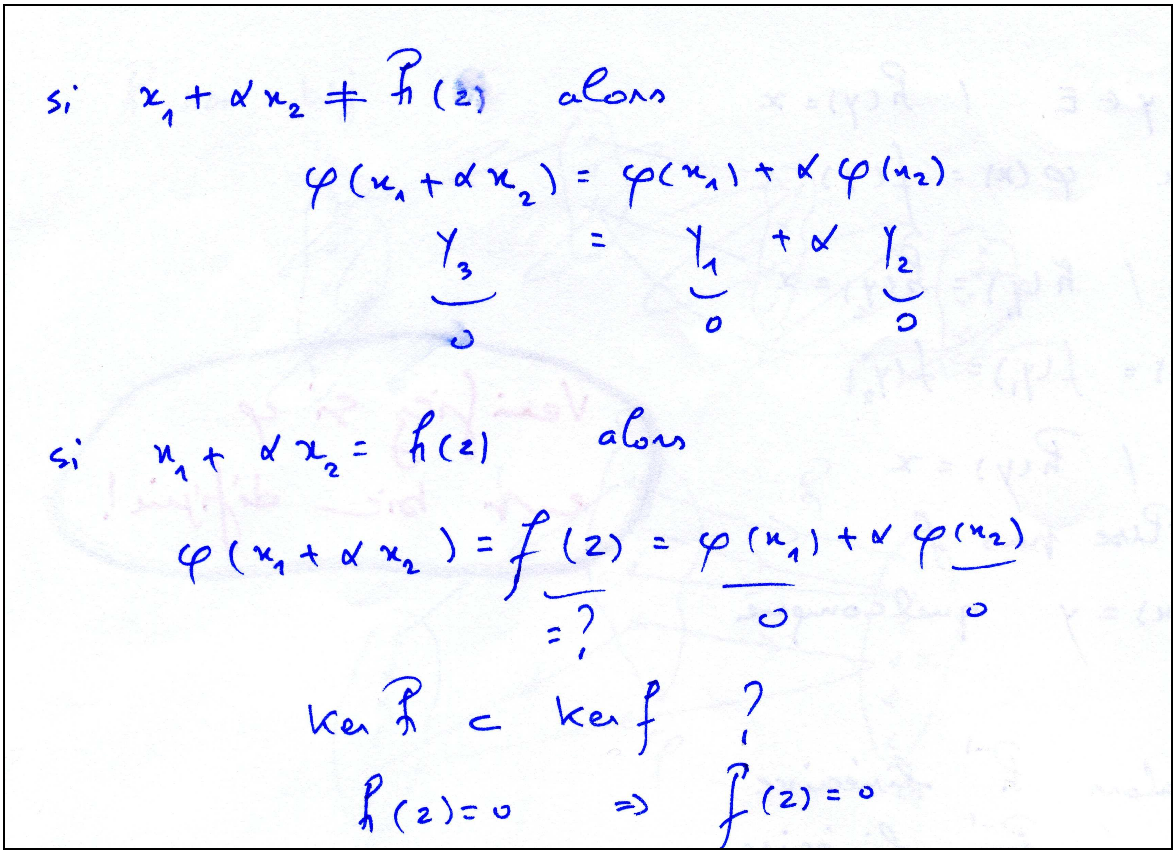
$\varphi(x_1) = y_1 \qquad \varphi(x_2) = y_2$

$\underbrace{\varphi(x_1 + \alpha x_2)}_{\in G} = ?$

$x_1 + \alpha x_2 = h(z) \Rightarrow \varphi(x_1 + \alpha x_2) = f(z)$

$x_1 + \alpha x_2 \neq h(z) \Rightarrow \varphi(x_1 + \alpha x_2) = y_3$

Production 2 (Groupe 1)



si $x_1 + \alpha x_2 \neq h(z)$ alors

$$\varphi(x_1 + \alpha x_2) = \varphi(x_1) + \alpha\, \varphi(x_2)$$

$$\underbrace{y_3}_{0} = \underbrace{y_1}_{0} + \alpha\, \underbrace{y_2}_{0}$$

si $x_1 + \alpha x_2 = h(z)$ alors

$$\varphi(x_1 + \alpha x_2) = \underbrace{f(z)}_{=?} = \underbrace{\varphi(x_1)}_{0} + \alpha\, \underbrace{\varphi(x_2)}_{0}$$

$$\mathrm{Ker}\, h \subset \mathrm{Ker}\, f \ ?$$

$$h(z) = 0 \Rightarrow f(z) = 0$$

Suite de la production 2 (Groupe 1)

Analyse

Tenant compte de la remarque de l'enseignant, les étudiants sont arrivés à adopter un langage approprié pour définir l'application φ. Dans le cas d'un x de G ayant plusieurs antécédents par h, les étudiants semblent ne pas apercevoir la nécessité de justifier que $f(y_1)=f(y_2)$. Pour un x sans antécédent, ils ne précisent pas si l'image $y = \varphi(x)$ varie avec x ou bien si elle est la même pour tous les x de ce type. Lors de la vérification de la linéarité de φ, ils désignent les images de tels x par des y différents, en adoptant une dépendance indicielle. Ensuite, pour assurer la propriété de linéarité, ils attribuent la même valeur 0 pour tous ces y_i. En cohérence avec la manière adoptée pour définir φ, la linéarité de φ est traitée dans un premier temps suivant que h soit bijective ou non, et dans un second temps, suivant les cas où x_1 et x_2 possèdent des antécédents ou non, si h n'est pas bijective. Le cas où l'un des x_i a un antécédent et l'autre non, n'est pas mentionné. La difficulté qui a bloqué le travail des étudiants est de trouver un moyen pour justifier la linéarité de φ dans le cas où x_1, x_2 n'ont pas d'antécédents mais où $x_1 + \alpha.x_2$ en possède un. Pour surmonter cette difficulté, ils reviennent à l'hypothèse $\mathrm{Kerh} \subset \mathrm{Kerf}$, qu'ils n'ont pas utilisée jusqu'à cette étape de leur travail. Mais cette tentative n'aboutit pas.

Commentaire

Le travail accompli dans cette deuxième période fait preuve d'une certaine organisation et d'une cohérence dans le développement de la solution. Nous remarquons aussi une tendance à faire usage de la méthode de disjonction de cas dans la résolution de l'exercice. Ainsi, il y a eu séparation des cas de h bijective et de h non bijective, aussi bien dans la définition de φ que dans la vérification de la propriété de linéarité, comme il y a eu aussi traitement des trois cas possibles pour l'antécédent de x lorsque h n'est pas bijective. Ceci a permis l'exploration de tous les cas de figure associés au problème de définition de φ. Seulement, dans cette définition, le problème lié à la non injectivité éventuelle de φ n'a pas été résolu et l'hypothèse $\mathrm{Kerh} \subset \mathrm{Kerf}$ n'a été invoquée que lorsque les étudiants se sont retrouvés bloqués dans la vérification de la linéarité de φ. Le problème intermédiaire pi_1, mis en évidence dans la première période, n'a donc pas été convenablement résolu. De plus, lors de l'étude de la linéarité de φ, les étudiants ne sont pas arrivés à gérer tous les cas de combinaison des éléments x_1 et x_2, et ils ne semblent pas avoir compris l'origine de la difficulté rencontrée avec la linéarité de φ. Le problème intermédiaire pi_2 est ainsi implicitement mis en évidence sans que les étudiants n'arrivent à le résoudre ou à localiser la difficulté qui lui est associée. Nous notons finalement que les étudiants n'ont pas fait usage dans leur travail de l'ensemble Imh, chose qui aurait pu leur permettre de simplifier les cas de discussion dans la définition de φ, ou lors de l'étude de sa linéarité. Ils sont restés dans des raisonnements se situant au niveau des éléments eux-mêmes, non des sous-espaces.

IX. 3. 2. Analyse des productions du groupe 2

a) Analyse de la production 1

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & F \\
G \arrow[ur, "\varphi"'] \arrow[u, bend left] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
x \arrow[r] \arrow[d] & f(x) \\
h(x) \arrow[ur] & y
\end{tikzcd}$$

$$f = \varphi \circ h$$

$$\varphi : G \longrightarrow F$$
$$y \longmapsto \varphi(y)$$

$$y \in G \quad \begin{cases} y = h(x) \\ y \neq h(x) \end{cases}$$

1) $y = h(x)$
$\varphi(y) = \varphi(h(x)) = \varphi \circ h(x) = f(x)$

2) $y \neq h(x)$ $\quad \varphi(y) = z \in F$

On cherche z pour que φ linéaire

Verifiez si φ est bien défini

Production 1 (Groupe 2)

<u>montrons que φ linéaire</u>

1) $y = h(x) \in G \qquad \varphi(y) = f(x)$

$y' = h(x') \in G \qquad \varphi(y') = f(x')$

$$\begin{aligned}\lambda \in \mathbb{R}, \quad \varphi(y+\lambda y') &= \varphi\left(h(x)+\lambda h(x')\right)\\ &= \varphi\left(h(x+\lambda x')\right) \quad (h \text{ lin})\\ &= f(x+\lambda x')\\ &= f(x)+\lambda f(x') \quad (f \text{ linéaire})\\ &= \varphi(y)+\lambda \varphi(y')\end{aligned}$$

Suite de la production 1 (Groupe 2)

Analyse

Dans cette production, les étudiants définissent l'application φ et entament la vérification de la propriété de linéarité. Pour ce faire, ils commencent par représenter un diagramme de composition traduisant la relation $f = \varphi \circ h$, puis ils distinguent de façon pertinente dans G deux types d'éléments : ceux qui sont images par h d'élément(s) de E et ceux qui ne le sont pas. Au premier type d'éléments, désignés par $y=h(x)$, ils associent $\varphi(y)=f(x)$ et au deuxième type, ils associent comme image un élément z de F non spécifié, tout en précisant que la valeur de z devra être fixée de manière à ce que l'application φ soit linéaire. Il n'est pas indiqué si z est constant ou s'il dépend de y.

Les étudiants envisagent ensuite de montrer que φ est linéaire et commencent par traiter le cas des y qui sont images par h d'éléments x de E. Ce cas est convenablement vérifié. Dans cette production, nous notons que les étudiants se situent au niveau des éléments des espaces vectoriels et non des sous-espaces. En particulier, ils n'identifient pas le sous espace Imh et le fait que la démonstration qu'ils ont faite montre la linéarité de φ sur ce sous-espace de G (si φ est bien définie).

Commentaire

Dans ce travail, les relations fonctionnelles résultantes de la relation $f=\varphi oh$ sont convenablement exploitées par les étudiants. Ceci leur a permis de bien définir les correspondances par φ entre les éléments de G et ceux de F. Les étudiants ne sont cependant pas arrivés à mettre en évidence le problème lié à la non injectivité éventuelle de h. Le problème intermédiaire pi_1 est ainsi mis en évidence sans être complètement résolu. Notre remarque vise à inciter les étudiants à apporter les précisions qui manquent.

b) Analyse de la production 2

$$F \xleftarrow{f} E \xrightarrow{h} G$$

$$f(x) \longleftarrow x \longmapsto y$$

$$f(x') \longleftarrow x' \nearrow$$

$$\varphi$$

$x' \neq x \qquad h(x) = h(x') = y$

$\varphi(y) = f(x)$

$\varphi(y) = f(x')$

il faut $f(x) = f(x')$

$f(x - x') = 0$ donc $x - x' \in \mathrm{Ker} f$

On a $\mathrm{Ker}\, h \subset \mathrm{Ker} f$?

or $h(x) = h(x') \Rightarrow h(x - x') = 0$

$\Rightarrow x - x' \in \mathrm{Ker}\, h$

$\Rightarrow x - x' \in \mathrm{Ker} f$

donc $f(x) = f(x')$.

φ est bien définie :

si $y = h(x) \in h(E)$, $\varphi(y) = f(x)$

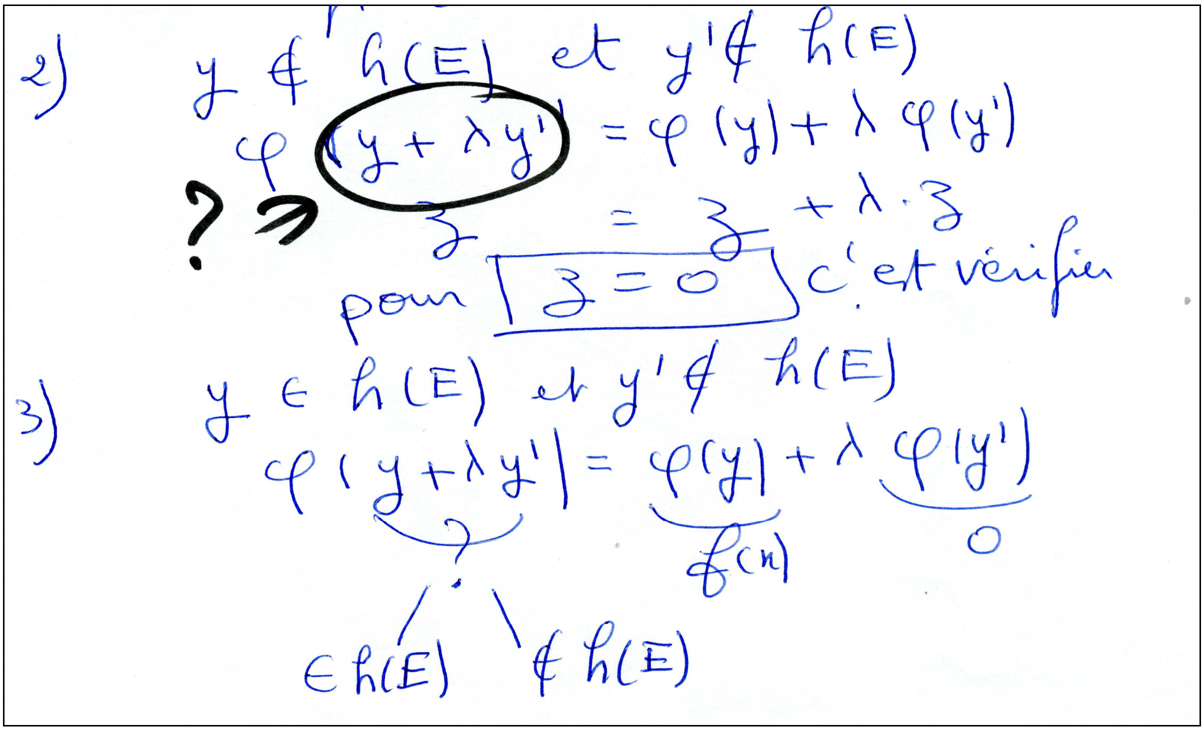
si $y \notin h(E)$, $\varphi(y) = z$

Production 2 (Groupe 2)

Analyse

Dans cette première page, les étudiants sont revenus sur la définition de φ pour répondre à la remarque de l'enseignant. Ils ont identifié le problème résultant de la non-injectivité possible de h et, en exploitant convenablement l'hypothèse $\mathrm{Ker}h \subset \mathrm{Ker}f$, ils ont réussi à justifier que φ est bien définie. Le problème intermédiaire pi_1 est ainsi correctement posé et résolu.

A la fin, les étudiants récapitulent la définition de φ en distinguant dans G les éléments qui sont dans h(E) et ceux qui ne le sont pas. Cette fois, l'appartenance à l'image de h est formalisée mais on notera qu'elle l'est dans une formulation ensembliste h(E) et non en utilisant le symbolisme propre à l'algèbre linéaire Imh qui porte, même si cela reste implicite, la structure d'espace vectoriel de l'ensemble, ce que ne fait pas la notation h(E) utilisée.



2) $y \notin h(E)$ et $y' \notin h(E)$

$\varphi(y+\lambda y') = \varphi(y) + \lambda\,\varphi(y')$

? $\quad z \quad = z + \lambda . z$

pour $\boxed{z = 0}$ c'est vérifier

3) $y \in h(E)$ et $y' \notin h(E)$

$\varphi(\underbrace{y+\lambda y'}_{?}) = \underbrace{\varphi(y)}_{f(x)} + \lambda\,\underbrace{\varphi(y')}_{0}$

$\in h(E)$ $\quad \notin h(E)$

Suite de la production 2 (Groupe 2)

Analyse

Dans cette deuxième page, les étudiants continuent la preuve de la propriété de linéarité de φ qu'ils ont commencée dans la première période. Ils considèrent ici le cas où y et y' ne sont pas dans h(E) et le cas où y est dans h(E) et y' n'y est pas. De cette façon, toutes les combinaisons possibles du choix de y et y' sont traitées. L'introduction de l'ensemble h(E) a donc permis aux étudiants de structurer l'étude des différents cas.

Dans le premier cas, les étudiants ne se posent pas la question de l'appartenance de $y+\lambda.y'$ dont dépend pourtant l'image $\varphi(y+\lambda.y')$ et arrivent à la conclusion que z, dont on voit là qu'il était supposé constant, doit être égal à 0. La preuve faite suppose en effet que $y+\lambda.y'$ n'appartient pas à h(E). Comme c'est le cas pour y et y', on peut penser que les étudiants ont fait l'inférence erronée mais tentante que c'était aussi le cas pour leurs combinaisons linéaires. Dans le deuxième cas, où y et y' appartiennent respectivement à h(E) et $h(E)^c$, le problème d'appartenance de $y+\lambda.y'$ est en revanche identifié, mais les étudiants restent bloqués à ce niveau, alors que là justement il est possible de conclure en utilisant la structure d'espace vectoriel de h(E).

Commentaire

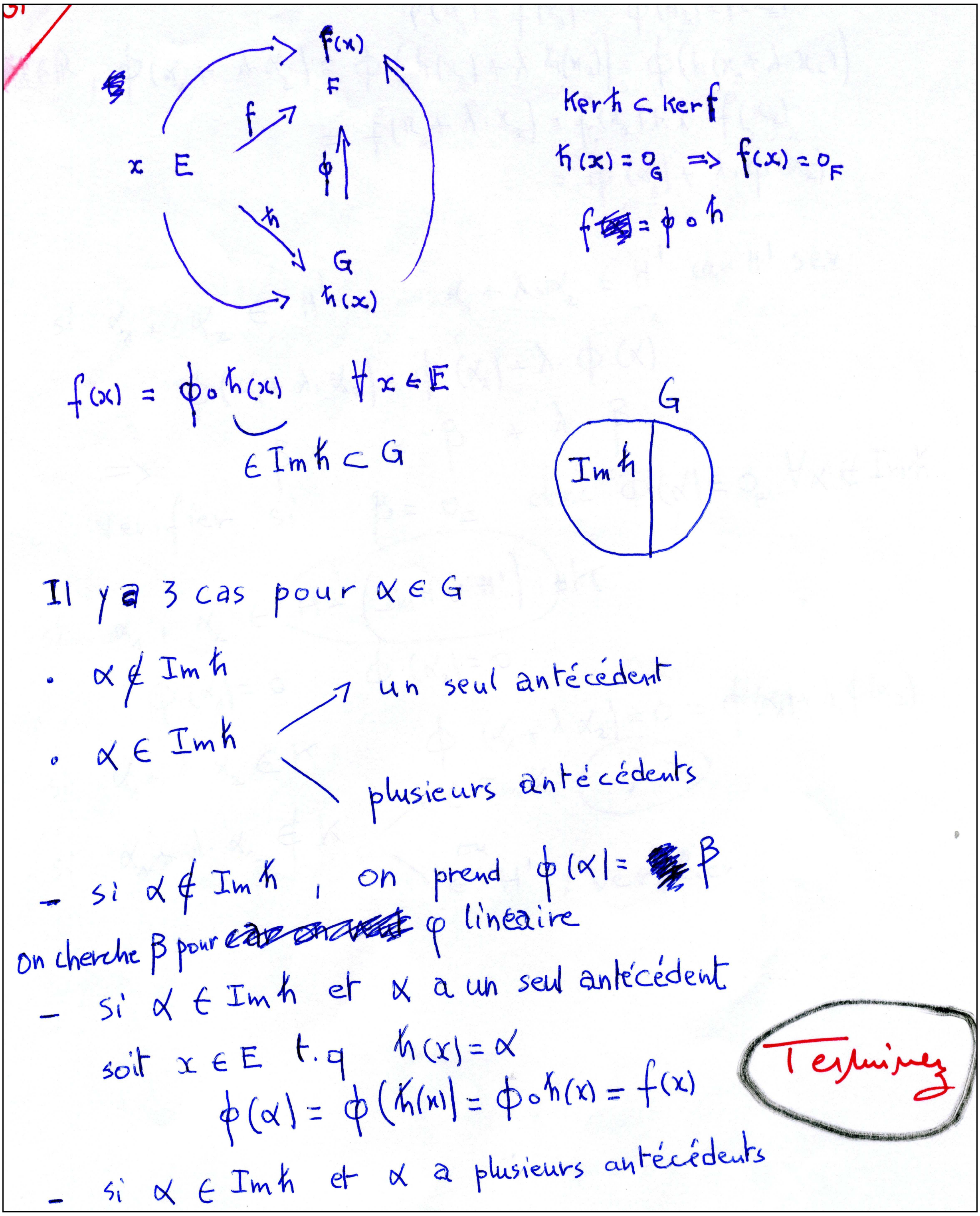
Les précisions ajoutées par les étudiants à propos de la définition de l'application φ montrent que l'erreur commise n'est pas due à un manque de connaissances concernant la définition d'une application, mais qu'ils n'avaient pas prêté attention à l'ambiguïté possible de la définition qu'ils avaient donnée. Aidés par la remarque de l'enseignant, les étudiants ont réussi par un retour sur leur travail à apporter les rectifications nécessaires.

Concernant la propriété de linéarité de φ, bien que le travail accompli fasse preuve d'une aptitude d'organisation et de discussion des différents cas qui se présentent, les étudiants ne sont pas arrivés à surmonter la difficulté. En fait, la combinatoire de cas qu'ils construisent résulte naturellement de la vision ensembliste portée par les notations qu'ils utilisent. La structure linéaire dont l'intervention est nécessaire pour résoudre le problème posé reste alors inactive, conduisant les étudiants à une situation de blocage.

En guise de conclusion, pour ce groupe, les connaissances mobilisées par les étudiants sont convenablement utilisées et la rédaction produite est cohérente et globalement conforme. Quelques imprécisions sont cependant à signaler dues, semble-t-il, à un manque de questionnements et/ou de retour à propos des démarches accomplies. Concernant les composantes pratiques liées au problème, les étudiants ont réussi à aborder l'exercice de façon appropriée et ceci par une analyse précise et une exploitation pertinente de l'égalité $f = \varphi o h$. Cependant, les étudiants ne sont pas arrivés à dépasser le contexte d'énonciation de l'exercice pour résoudre le problème du prolongement linéaire de φ, en ce sens qu'ils n'ont pas réussi à décomposer G en une somme directe appropriée et à exploiter cette décomposition dans la résolution du problème de linéarité de φ.

IX. 3. 2. Analyse des productions du groupe 3

a) Analyse de la production 1



$$\begin{tikzcd} x \quad E \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & F \\ & G \arrow[u, "\phi"'] \end{tikzcd}$$

$f(x) \in F$, $h(x) \in G$

$\operatorname{Ker} h \subset \operatorname{Ker} f$

$h(x) = 0_G \Rightarrow f(x) = 0_F$

$f = \phi \circ h$

$f(x) = \phi \circ \underbrace{h(x)}_{\in \operatorname{Im} h \subset G} \quad \forall x \in E$

G

Im h

Il y a 3 cas pour $\alpha \in G$

- $\alpha \notin \operatorname{Im} h$
- $\alpha \in \operatorname{Im} h$ → un seul antécédent ; plusieurs antécédents

– si $\alpha \notin \operatorname{Im} h$, on prend $\phi(\alpha) = \beta$

on cherche β pour ~~car on veut~~ φ linéaire

– si $\alpha \in \operatorname{Im} h$ et α a un seul antécédent

soit $x \in E$ t.q $h(x) = \alpha$

$\phi(\alpha) = \phi(h(x)) = \phi \circ h(x) = f(x)$

Terminez

– si $\alpha \in \operatorname{Im} h$ et α a plusieurs antécédents

Production 1 (Groupe 3)

Analyse

Dans cette production, les étudiants commencent par donner un diagramme de composition illustrant l'égalité $f = \varphi o h$, ils instancient cette égalité pour un élément x de E, identifient l'ensemble Imh des images h(x) pour x dans E, représentent par un diagramme ensembliste l'inclusion $Imh \subset G$ et donnent une reformulation de l'inclusion $Kerh \subset Kerf$. Les étudiants se lancent ensuite dans la définition de l'application φ en envisageant trois cas :

- le cas où $\alpha \notin$ Imh, pour lequel ils associent pour image un élément β, tout en précisant que β sera déterminée de façon à ce que φ soit linéaire.

- le cas où $\alpha \in$ Imh avec un seul antécédent x, pour lequel ils posent $\varphi(\alpha) = f(x)$

- et le cas où $\alpha \in$ Imh avec plusieurs antécédents, lequel cas n'est pas encore traité.

Commentaire

L'expansion discursive des données de l'énoncé opérée au début est conséquente et semble avoir permis aux étudiants une exploration pertinente conduisant à identifier les différentes questions qui se posent et à effectuer en conséquence un départ approprié pour poursuivre la résolution. Si l'on compare avec le groupe précédent, on voit que le problème posé par la non-injectivité de h est identifié, que l'image de h est désignée en recourant au symbolisme de l'algèbre linéaire. Pour ce qui est de l'image par φ des éléments de G qui ne sont pas dans Imh, la méthode adoptée est, semble-t-il, la même que pour le groupe 2, ce qui nous incite à penser que β est considéré comme une constante. La résolution s'arrête sur le cas critique où α a plusieurs antécédents et on ne peut donc savoir si les étudiants vont arriver à exploiter la relation d'inclusion des noyaux pour le gérer.

b) Analyse de la production 2

supposons qu'il $\exists\ x_1, x_2, \dots, x_i \in E$ t.q :

$$h(x_1) = h(x_2) = \dots = h(x_i) = \alpha$$

$$\operatorname{Ker} h \subset \operatorname{Ker} f$$

$$\{x \in E,\ h(x) = 0_G\} \subset \{x \in E,\ f(x) = 0_F\}$$

$$\left.\begin{array}{l} h(x_1) = \alpha \\ h(x_2) = \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow h(x_1) - h(x_2) = 0$$

$$\xRightarrow{h \text{ linéaire}} h(x_1 - x_2) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 - x_2 \in \operatorname{Ker} h \subset \operatorname{Ker} f$$

$$\Rightarrow f(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

Donc si $h(x_1) = h(x_2) = \dots = h(x_i) = \alpha$

alors $f(x_1) = f(x_2) = \dots = f(x_i)$

on pose $\phi(\alpha) = f(x_i)\quad \forall i$

$-\ \beta$? $\quad \alpha \in (G - \operatorname{Im} h) = H$

$\phi(\alpha) = \beta\quad$ et ϕ linéaire

donc $\phi_{|H}$ linéaire.

$\alpha_1, \alpha_2 \in H \quad \phi(\underbrace{\alpha_1 + \lambda\alpha_2}_{\in H}) = \phi(\alpha_1) + \lambda\phi(\alpha_2)$

Il faut H stable

donc H sev $\quad$ or $0_G \notin H$

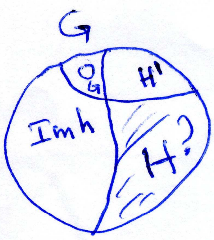
H' supplémentaire de $\operatorname{Im} h$

$$H' \oplus \operatorname{Im} h = G$$

or $H' \neq (G \setminus \operatorname{Im} h) = H$

$\cancel{H \cap G = \phi}$ $\quad$ et $\cancel{H' \cap G = \{0_G\}}$

$H \cap \operatorname{Im} h = \phi$ $\quad$ et $H' \cap \operatorname{Im} h = \{0_G\}$



Production 2 (Groupe 3)

si $\alpha_1 , \alpha_2 \in \mathrm{Im}h$ $\quad \alpha_1 = h(x_1)$ $\quad \alpha_2 = h(x_2)$

$\phi(\alpha_1) = f(x_1) \quad \phi(\alpha_2) = f(x_2)$

$\lambda \in \mathbb{R}$, $\phi(\alpha_1 + \lambda \cdot \alpha_2) = \phi\left(h(x_1) + \lambda\, h(x_2)\right) = \phi\left(h(x_1 + \lambda \cdot x_2)\right)$

$= f(x_1 + \lambda \cdot x_2) = f(x_1) + \lambda \cdot f(x_2)$

$= \phi(\alpha_1) + \lambda \cdot \phi(\alpha_2)$

si $\alpha_1 , \alpha_2 \in H'$ $\quad \alpha_1 + \lambda \cdot \alpha_2 \in H'$ car H' sev

$\phi(\alpha_1 + \lambda . \alpha_2) = \phi(\alpha_1) + \lambda \cdot \phi(\alpha)$

$\Rightarrow \quad \beta = \beta + \lambda \cdot \beta$

vérifier si $\beta = 0_F$ donc $\phi(\alpha) = 0_F \ \forall \alpha \notin \mathrm{Im}h$

si $\alpha_1 , \alpha_2 \in H - (\mathrm{Im}H \cup H') = K$

$\phi(\alpha_1) = 0 \quad \phi(\alpha_2) = 0$

$\phi(\alpha_1 + \lambda\, \alpha_2) = 0 = \phi(\alpha_1) + \lambda\, \phi(\alpha_2)$

si $\alpha_1 + \lambda \cdot \alpha_2 \in K$?

si $\alpha_1 + \lambda \cdot \alpha_2 \notin K$ $\in \mathrm{Im}h$ ou $\in H'$: vérifier.

Suite de la production 2 (Groupe 3)

Analyse

Dans cette deuxième production, les étudiants reviennent sur la définition de l'application φ et commencent par traiter le cas d'un élément α de G possédant plusieurs antécédents x_i par h. Ils justifient convenablement que l'image $\varphi(\alpha) = f(x_i)$ ne varie pas avec x_i. Ils cherchent ensuite à déterminer une valeur possible de β, image des α qui ne sont pas dans Imh. A cette étape, les étudiants sont confrontés au problème de la structure de l'ensemble H=G\Imh. Voulant conserver la propriété de linéarité à la restriction de φ à H, ils se sont rendus compte de la nécessité que H soit stable par combinaison linéaire, donc que H soit un sous-espace vectoriel de G. Constatant que H ne contient pas 0_G, et donc qu'il ne peut être muni d'une structure de sev, ils ont alors considéré H', un supplémentaire de Imh dans G et ont partagé G en trois parties : Imh, H'\{0_G} et H\H'. Ils ont après cherché à vérifier la propriété de linéarité pour φ selon cette partition de l'espace G. Dans Imh, cette vérification n’a pas posé de problème. Dans H’, elle a permis d’attribuer la valeur 0 à β, et pour les éléments qui ne sont ni dans Imh, ni dans H’, le problème de stabilité resurgit de nouveau sans que les étudiants arrivent à le résoudre.

Commentaire

Concernant la définition de l’application φ, les étudiants ont réussi à mettre en évidence le problème intermédiaire pi_1 et à le résoudre de façon convenable. A ce propos, le cas résultant de la non injectivité éventuelle de φ a été traité en supposant qu’un élément α de G possède plusieurs antécédents notés x_1, …, x_i, et l’hypothèse $Kerh \subset Kerf$ a été convenablement reformulée et exploitée. On notera à nouveau les reformulations systématiques sous diverses formes opérées par ces étudiants. Pour le problème de linéarité de φ, ce qui nous est donné à voir par ces étudiants est particulièrement intéressant. On voit d’abord que la notation Imh ne suffit pas à inscrire le problème de façon satisfaisante et que la visualitation faite de type ensembliste oriente les étudiants vers la partition de G en Imh et son complémentaire. Mais le calcul mené et la combinaison linéaire qu’il contient attire l’attention des étudiants sur la structure linéaire souhaitée des sous-ensembles considérés. On notera la succession d’écritures à travers lesquelles les étudiants marquent les distinctions entre H le complémentaire, et H’ le supplémentaire, montrant que les rapports entre l’ensembliste et le vectoriel sont encore problématiques. La résolution se poursuit ensuite avec l’étude des restrictions à Imh et H’ et l’on pourrait penser qu’alors tout est réglé puisque ces deux sous-espaces sont supplémentaires. Or c’est là que resurgit la partition ensembliste qui, en fait, n’avait pas été supplantée par la décomposition en somme directe, dans laquelle les étudiants vont s’embourber. Encore une fois, l’amalgame entre notions ensemblistes et notions d’algèbre linéaire résultant de la partition considérée de G a constitué, semble-t-il, la difficulté essentielle qui a empêché la résolution du problème intermédiaire 2, relatif au prolongement linéaire de φ. Toutefois, le travail effectué par les étudiants à la fin (deuxième page) montre des aptitudes d’organisation et de discussion des différents cas de définition de $\varphi(\alpha)$. Nous notons aussi dans ce contexte la conformité de la rédaction produite.

IX. 4. Période de discussion

Discussion préalable

L’analyse des productions fournies par les trois groupes d’étudiants à l’issue des périodes de travail en commun montre que, en dépit des méthodes adoptées pour aborder l’exercice et les démarches accomplies, la difficulté essentielle à laquelle se sont heurtées tous les étudiants était le prolongement linéaire de φ. Ce problème a été pensé par les étudiants d’un point de vue ensembliste plutôt que linéaire. Le lien nécessaire entre la linéarité de φ et la considération d’un prolongement sur un supplémentaire de Imh n’a été pleinement perçu par aucun des trois groupes d’étudiants. Pour débloquer la situation, nous avons choisi de conduire une discussion visant d’amener les étudiants à résoudre le problème dans le cadre d'un espace vectoriel G de dimension finie, puis à réfléchir au passage au cas général. Pour éviter de tomber dans un effet Topaze (Brousseau, 1998), nous avons essayé lors de la discussion de ne pas faire allusion à la notion de sous-espace supplémentaire.

Nous rapportons ci-après les discussions qui se sont déroulées entre l'enseignant (désigné dans le protocole par P) et les étudiants (désignés par E_i, i indique que l'étudiant E_i fait partie du groupe i)[86].

P : vous avez tous réussi à définir l'application φ sur Imh, puis pour prolonger φ sur G, vous avez cherché à donner une image à chaque élément de G\Imh. Mais vous avez rencontré des problèmes pour montrer que le prolongement effectué reste linéaire. Un étudiant de chaque groupe nous explique le problème rencontré par son groupe.

E_2 : il y a plusieurs cas qu'il faut discuter

E_1 : même chose, de plus il y a des cas où on ne peut pas dire si l'égalité de linéarité est vérifiée ou non

E_3 : il y a aussi le problème de stabilité

P : en fait, toutes ces difficultés reviennent au problème de stabilité, car si on dispose d'une partie stable, alors $y_1+\lambda y_2$ va rester dans la même partie que celle qui contient y_1 et y_2, or comme vous l'avez constaté, G\Imh n'est pas stable. Essayons de voir ce qui caractérise un prolongement linéaire d'un prolongement quelconque. En mathématiques, pour résoudre certains problèmes, on a parfois intérêt à se placer dans un cas particulier. Ceci nous permet de mettre en évidence des propriétés qui sont difficiles à voir directement dans le cas général. D'après vous, quel cas particulier peut-on envisager pour résoudre ce problème ?

E_2 : on prend G fini

P : qu'est ce vous connaissez comme ev fini ?

E_2 : $\{0_G\}$

P : Dans ce cas, G\Imh sera vide, puisque 0_G est déjà dans Imh. Ce cas particulier n'est pas intéressant. Il ne permet pas d'étudier le problème.

E_1 : on prend dimension de G finie

P : que serait l'intérêt dans ce cas ?

Après quelques hésitations…

E_2 : on peut travailler sur une base de G, on définit φ sur une base de G

P : bien, je vous laisse donc réfléchir sur ce cas particulier, puis voir comment peut-on revenir au cas général.

Commentaires

Nous soulevons deux remarques à propos de cette discussion. La première concerne la façon avec laquelle les étudiants interprètent les difficultés qu'ils ont rencontrées concernant le prolongement de φ. Les étudiants des groupes 1 et 2 renvoient ces difficultés au nombre de cas qu'il faut envisager et aux moyens qui permettent d'identifier si un élément du type $y+\lambda.y'$ est dans h(E). Ils considèrent de plus qu'il s'agit là d'un problème de partition de l'ensemble G et non d'un problème de stabilité de h(E), contrairement aux étudiants du

[86] Les discussions sont décrites via un enregistrement audio.

troisième groupe. Ceci confirme nos interprétations antérieures concernant la domination de la vision ensembliste chez les étudiants des deux premiers groupes, une vision qui les empêche d'identifier l'origine du blocage qu'ils rencontrent lors de l'étude de la linéarité de l'application φ. Quant à la deuxième remarque, elle concerne la possibilité d'envisager une situation particulière dans laquelle le problème pourrait être étudié. Les réponses des étudiants à ce propos montrent que ceux-ci sont peu familiers avec cette stratégie de recherche, ce qui pourrait expliquer le fait qu'aucun des trois groupes n'a essayé d'adopter cette piste de travail pour surmonter les difficultés qu'ils ont rencontrées à la fin de leur travail.

IX. 5. Analyse des productions finales

Après la séance de classe, nous avons demandé aux étudiants d'apporter chez eux les corrections nécessaires à leurs productions, en tenant compte des discussions qui se sont déroulées et aussi de nos remarques notées sur les copies. Avant la deuxième séance de remédiation, chaque groupe a remis à l'enseignant la rédaction finale de son travail. Dans ce qui suit, nous donnons nos commentaires concernant ces rédactions finales, et si nécessaire nous rapportons des extraits de ces rédactions.

Groupe 1

Dans la rédaction finale, les étudiants de ce groupe sont revenus sur la définition de l'application φ et ont justifié convenablement, en utilisant l'inclusion $\mathrm{Kerh} \subset \mathrm{Kerf}$, que si $h(y_1)=h(y_2)$ avec $y_1 \neq y_2$, alors $f(y_1)=f(y_2)$. Concernant le prolongement de l'application φ, les étudiants ont considéré un supplémentaire S de Imh dans G et ont défini l'application φ comme l'indique l'extrait suivant de leur production finale :

Soit S un supplémentaire de $\mathrm{Im}\,h$:

$$G = \mathrm{Im}\,h \oplus S$$

φ est définie par : soit $x \in G$

a- $x \in \mathrm{Im}\,h$

- si $\exists!\, y \in E \,/\, h(y) = x$ alors $\varphi(x) = f(y)$
- si $\exists\, y_1$ et $y_2 \in E \,/\, y_1 \neq y_2$ et $h(y_1) = h(y_2)$

alors $f(y_1) = f(y_2)$ donc $\varphi(x) = f(y_1)$

b- si $x \in S$, $\varphi(x) = 0$

c- si $z \in G = \mathrm{Im}\,h \oplus S$, $\exists!\, x \in \mathrm{Im}\,h$ et $\exists!\, x' \in S$

t.q $z = x + x'$

alors $\varphi(z) = \varphi(x)$

Extrait de la production 3 (Groupe 1)

Ils ont ensuite vérifié convenablement que φ est linéaire. Nous leur avons fait remarquer que pour $x \in \mathrm{Imh}$, il n'était pas nécessaire de distinguer les cas où x possède un ou deux antécédents, du moment que le problème de la multiplicité des antécédents était résolu.

Groupe 2

Pour ce groupe, le début de l'exercice a déjà été convenablement traité dans la séance de classe, seul le problème de prolongement de l'application φ restait à terminer. Pour ce faire, ils ont commencé par traiter le cas où G est de dimension finie n. Ils ont alors défini φ sur une base de Imh, puis, en complétant cette base en une base de G, ils ont terminé la définition de l'application φ. Ils sont ensuite passé au cas où G n'est pas de dimension finie et l'ont convenablement traité comme l'indique l'extrait ci-dessous.

$\dim G = n$

$\dim \operatorname{Im} h = p \quad (p \leq n)$

$(e_1, \dots, e_p)$ base de $\operatorname{Im} h$

$\forall i \in \{1, \dots, p\}, \exists a_i \in E \,/\, h(a_i) = e_i$

on pose $\varphi(e_i) = \varphi(h(a_i)) = f(a_i)$

$\varphi_{|\operatorname{Im} h}$ linéaire

d'aprés le Th de la base incomplete,

$\exists e_{p+1}, \dots, e_n \,/\, (e_1, \dots, e_n)$ base de G

On pose $\varphi(e_{p+1}) = \dots = \varphi(e_n) = 0_F$

$\varphi_{|\operatorname{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_p)}$ linéaire

et $G = \operatorname{Im} h \oplus \underbrace{\operatorname{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_p)}_{H}$

Si dim G n'est pas finie

$\exists H$ sev de $G \,/\, G = \operatorname{Im} h \oplus H$

On pose alors :

si $y = h(x) \in \operatorname{Im} h$, $x \in E$, $\varphi(y) = f(x)$

si $y \in H \qquad \varphi(y) = 0_F$

et pour tout $x \in E$, $x = y_1 + y_2$ avec

$y_1 \cancel{\in} = h(x_1) \in \operatorname{Im} h$ et $y_2 \in H$

$\varphi(x) = \varphi(y_1) = f(x_1)$

Extrait de la production 3 (Groupe 2)

Remarquons que les étudiants n'ont pas vérifié à la fin que l'application φ qu'ils ont définie est linéaire. Ils ont peut être suivi le cas de G de dimension finie, où la linéarité est établie dés que l'application φ se trouve définie sur une base de G. En fait, dans le cas général aussi, la linéarité de φ est établie dés que les restrictions de φ sur deux sous-espaces supplémentaires de G se trouvent être linéaires, mais les étudiants ne disposent pas de ce résultat et la linéarité de φ devrait donc normalement être vérifiée.

Groupe 3

Le début de l'exercice a déjà été convenablement traité par les étudiants de ce groupe dans la séance de classe. Dans la rédaction finale, ils ont repris le problème de prolongement de l'application φ comme l'indique l'extrait suivant de leur copie.

$\mathrm{Im}\,h$ sev de G

$\mathrm{Im}\,h$ possède au moins un supplémentaire dans G

soit H un supplémentaire de $\mathrm{Im}\,h$ dans G

$$G = \mathrm{Im}\,h \oplus H$$

$$\forall\, \alpha \in G \quad \exists!\ (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathrm{Im}\,h \times H \,/\, \alpha = \alpha_1 + \alpha_2$$

$$\alpha_1 \in \mathrm{Im}\,h \Rightarrow \alpha_1 = h(x)\ ,\ x \in E$$

$$\text{et } \phi(\alpha_1) = f(x)$$

$$\phi(\alpha_2) = 0_F$$

$$\text{et } \phi(\alpha) = \phi(\alpha_1 + \alpha_2) = \phi(\alpha_1) = f(x)$$

Extrait de la production 3 (Groupe 3)

Ils ont après vérifié convenablement que l'application φ ainsi définie est linéaire.

Commentaire

Les solutions apportées par les trois groupes d'étudiants concernant le prolongement linéaire de φ, sont bien développées et convenablement rédigées. Nous sommes conscients du fait que les étudiants se sont peut-être aidés dans leur travail par des sujets « experts » ou par des ressources documentaires où ils auraient peut être cherché la solution ou du moins des indications leur permettant de surmonter les obstacles qu'ils auraient rencontrés. Toutefois, pour chacun des trois groupes, nous notons une certaine continuité, au niveau de la rédaction et de la formulation, avec les productions fournies dans la séance de classe. De plus, ces réponses, si l'on suppose que les étudiants se sont faits aidés entre eux ou ont utilisé des manuels, reflètent un effort personnel d'adaptation et ne sont en rien des rédactions copiées à la lettre dans un manuel. Il s'agit là de l'un de nos objectifs à travers cette expérimentation. Car à l'université, où une grande part de responsabilité au niveau de l'apprentissage se trouve à la charge des apprenants, le recours aux « aides à l'étude » constitue un facteur essentiel pour favoriser la formation des étudiants. Il nous semble essentiel alors de sensibiliser les étudiants, si besoin est, à un usage conscient et approprié de ces « aides à l'étude » afin que cet usage permette d'atteindre l'objectif qui lui est dévolu et ne se réduise pas à un moyen simpliste de fuir les difficultés d'apprentissage, comme nous l'avons constaté à travers les réponses de la première population d'étudiants au questionnaire. Dans les discussions que nous avons mené à la fin de cette expérimentation, nous avons cherché à comprendre les stratégies de travail adoptées par les étudiants pour résoudre le problème de prolongement linéaire de φ et à connaître les moyens utilisés pour apporter cette solution. Nous résumons les apports de ces discussions dans le paragraphe suivant.

Discussion récapitulative

Pour clore la première expérimentation, nous avons conduit, avant le début de la deuxième séance de remédiation, une discussion avec les étudiants pour connaître les avantages éventuels qu'ils auraient tirés de cette expérimentation. Nous avons commencé par demander aux étudiants de nous indiquer la façon dont ils étaient arrivés à résoudre le problème de prolongement linéaire de φ et les ressources éventuelles qu'ils avaient utilisées.

Les étudiants du premier groupe ont rapporté que, pour définir φ, ils ont au préalable essayé de fixer une image par φ d'une base quelconque de G, mais cette tentative n'a pas abouti. (Rappelons que dans la séance de classe, ce groupe n'a pas identifié dans son travail l'ensemble Imh, ceci a peut être constitué un obstacle pour voir l'avantage de commencer par considérer une base de Imh). En revenant sur la définition de φ qu'ils ont établie dans la séance de classe, ils ont remarqué qu'il faut distinguer entre les vecteurs qui ont des antécédents par h et ceux qui n'en ont pas. Ils ont alors considéré une famille libre de vecteurs du type : $e_1=h(x_1)$, …, $e_p=h(x_p)$, où x_1, …, x_p sont dans E, et des vecteurs e_{p+1}, …,e_n pour obtenir une base de G. Finalement, ils ont associé par φ l'image $f(x_i)$ pour les vecteurs $e_1,\ldots,e_p$ et l'image 0_F pour les autres vecteurs. Pour effectuer le passage au cas général, les étudiants ont rapporté qu'ils ne sont pas arrivés à comprendre comment se passer de la base $(e_1,\ldots,e_n)$ pour définir φ dans un espace vectoriel de dimension infinie. Ils se sont alors servis d'un ouvrage de mathématiques où ils ont trouvé une démonstration du résultat de l'exercice dans un cas général. En leur demandant s'ils ont compris le lien entre la réponse qu'ils ont apportée dans le cas général et la définition de φ dans le cas de dimension finie qu'ils viennent d'expliquer, ils ont répondu qu'effectivement, il suffit de remarquer qu'en dimension finie on a $G=\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)\oplus \mathrm{Vec}(e_{p+1},\ldots,e_n)$, ce qui correspond dans le cas général à : $G=\mathrm{Imh}\oplus S$, en posant : $\mathrm{Imh} = \mathrm{Vect}(e_1,\ldots, e_p)$ et $S=\mathrm{Vec}(e_{p+1},\ldots, e_n)$.

Les étudiants du deuxième groupe ont rapporté que leur travail se résume à ce qu'ils ont développé sur leur copie, et que le passage du cas de G de dimension finie au cas général ne leur a pas posé de grande difficulté car, partant de l'égalité $G=\mathrm{Imh}\oplus \mathrm{Vec}(e_{p+1},\ldots, e_n)$, qu'ils ont établie dans le cas de dimension finie, il était facile de voir une analogie avec le cas général en considérant un supplémentaire de Imh dans G.

Quant aux étudiants du troisième groupe, ils ont dit qu'ils n'avaient pas traité de façon complète le cas de dimension finie, car ils ont compris que l'avantage d'une base dans ce cas est de permettre une écriture particulière des éléments de G. En faisant le lien avec ce qu'ils avaient fait dans la séance de classe, où ils avaient déjà eu l'idée de considérer un supplémentaire de Imh dans G, ils se sont aperçus qu'en dimension infinie, ils pouvaient « recouvrir » tous les éléments de G en considérant une décomposition en somme directe de cet espace. Ils ont alors rectifié leur travail antérieur et ont développé la solution rapportée ci-dessus.

Ceci dit, nous avons demandé à la fin aux étudiants de nous rapporter ce que cette expérimentation leur avait éventuellement apporté sur le plan des connaissances et/ou sur le plan de l'activité de résolution de problème. Nous rapportons dans ce qui suit ce qu'a été dégagé de cette discussion.

- Les étudiants ont rapporté que des questionnements et des retours en arrière à propos de réponses qui semblent parfois banales et évidentes peuvent s'avérer être utiles, que ce soit pour ajouter des précisions qui manquent ou parfois pour adopter des méthodes mieux appropriées à la résolution de l'exercice. Ils déplorent en même temps le fait qu'il leur est difficile de procéder de la sorte lors des épreuves d'évaluation institutionnelles, vue le manque de temps dont ils disposent compte tenu de la longueur et de la complexité des épreuves proposées.

- Les étudiants ont aussi rapporté que le traitement du cas de G de dimension finie pour résoudre le problème de prolongement de φ était un moyen efficace pour surmonter le problème rencontré à ce propos. Ils ont remarqué qu'ils n'ont jamais eu l'occasion d'utiliser ce moyen de travail dans la résolution des exercices, étant donné qu'aussi bien dans les démonstrations du cours que lors de la correction des exercices on va directement vers la bonne solution.

De notre part, nous leur avons fait remarquer l'importance du choix des notations lors de la résolution de l'exercice et nous avons apporté comme exemple la difficulté rencontrée par les étudiants du groupe 1, lorsqu'ils ont utilisé le même ostensif x pour désigner un élément de E dans l'écriture de $\varphi(h(x))$ et un élément de G dans l'écriture de $\varphi(x)$. Finalement, nous avons attiré l'attention des étudiants sur les différences qui caractérisent un prolongement linéaire et un prolongement ensembliste et sur l'importance de tenir compte des caractéristiques de la situation lors de la résolution d'un problème.

IX. 6. Conclusion pour la première séance de remédiation

Le travail des étudiants dans cette première expérimentation était caractérisé dés le début par une certaine organisation, une cohérence dans les réponses apportées et un usage dans son ensemble correct concernant les connaissances mathématiques mises en œuvre. Il y a là une nette amélioration par rapport aux productions fournies dans les séances diagnostiques (notons toutefois que le temps accordé aux étudiants dans cette expérimentation (environ 1h 30mn), ajouté à l'organisation de la séance et la répartition des groupes ont, semble t-il, fourni des conditions plus favorables pour le travail des étudiants que celles des séances diagnostiques, dont la durée était de 30-40 mn. Il est à préciser dans ce contexte que les objectifs des séances ne sont pas les mêmes). Sur le plan heuristique, les étudiants ont réussi à explorer de manière pertinente l'espace de résolution de l'exercice. Le problème intermédiaire 1 a été d'emblée convenablement traité par le groupe 3. Les groupes 1 et 2 sont arrivés à le mettre en évidence, mais des difficultés au niveau de l'usage de la technologie θ_1 sont apparues. En donnant des indices visant de sensibiliser les étudiants aux insuffisances de leurs productions, les étudiants sont arrivés à apporter les rectifications nécessaires à leur travail. Pour le problème intermédiaire 2, tous les étudiants sont arrivés à mettre en évidence, explicitement ou implicitement, la difficulté liée au prolongement linéaire de φ, sans qu'aucun des trois groupes n'arrive à surmonter complètement cette difficulté ni même à comprendre exactement son origine. L'obstacle essentiel qui a empêché la résolution de ce problème réside à notre avis dans le fait que les étudiants ont pensé le problème de prolongement de φ d'un point de vue ensembliste et non linéaire. Nous notons toutefois à ce propos la pertinence avec laquelle la discussion des différents cas de linéarité de φ a été menée par les différents groupes.

D'un autre côté, il nous semble que les difficultés constatées chez les étudiants pour mettre en évidence la nécessité de procéder à une décomposition de G en somme directe, pour résoudre le problème de prolongement linéaire de φ, en l'absence d'indices explicites dans l'énoncé permettant de réfléchir à une telle décomposition, montrent les difficultés qu'éprouvent encore les étudiants à se passer d'indications pour résoudre des problèmes non évidents.

X. Deuxième séance de remédiation

X. 1. Exercice proposé. Analyse a priori

Exercice

On considère l'ensemble $\mathcal{H}$ des matrices carrées d'ordre 2 définies pour tout x$\in \left]-1,+1\right[$ par :

$$M(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix}$$

A l'aide d'une application convenablement choisie, montrer que $(\mathcal{H},\times)$ est un groupe, isomorphe au groupe (**R**, +)

X. 1. 1. Contexte d'enseignement

Les principaux thèmes qui sont en jeu dans cet exercice concernent les notions de groupe, d'isomorphisme de groupes, de matrice et les fonctions hyperboliques. Le thème relatif aux deux premières notions est étudié au premier trimestre de l'année universitaire. Les deux autres thèmes sont étudiés dans le courant du deuxième trimestre[87]. Les connaissances dont il est question dans l'exercice concernent des propriétés simples des notions citées (morphisme, bijectivité, calcul matriciel, propriétés et formules usuelles relatives aux fonctions hyperboliques …). Nous les considérons de ce fait assez familières pour les étudiants. La difficulté essentielle de l'exercice réside, à notre avis, dans la construction d'une application de **R** vers $\mathcal{H}$ qui va permettre (via le théorème de transfert) un transfert isomorphe de la structure de groupe de (**R**, +) vers $(\mathcal{H},\times)$. Notons dans ce contexte que les étudiants ont eu plusieurs occasions au cours de l'année universitaire d'utiliser le théorème sur le transfert de structure. Néanmoins, dans les situations correspondantes, l'application qui servait à assurer le transfert était plus simple à identifier ; en ce sens que les données de l'énoncé y faisaient allusion. Remarquons aussi que cet exercice, avec une formulation différente, était donné dans le test d'évaluation passé par la première population d'étudiants. Dans ce test, l'application *th* qui va servir dans la construction de l'isomorphisme entre **R** et $\mathcal{H}$ était donnée dans l'énoncé. Nous avons choisi ici de supprimer cette indication pour créer une situation de problème intermédiaire.

X. 1. 2. Analyse praxéologique

L'objectif de l'exercice est de montrer que $(\mathcal{H},\times)$ est un groupe, isomorphe au groupe (**R**,+). L'usage d'une « application » pour répondre à la question, requis par l'énoncé, fait allusion au théorème de transfert pour réaliser la tâche demandée. De cette manière, l'énoncé indique une technique de réalisation de cette tâche. Cette technique consiste en la construction d'une application entre les ensembles **R** et $\mathcal{H}$ de façon à permettre un transfert isomorphe de la structure de groupe de (**R**,+) au couple $(\mathcal{H},\times)$.

[87] Les fonctions hyperboliques sont étudiées dans le cours d'analyse.

Une manière de procéder consiste à remarquer d'abord que l'expression de M(x) définit une application (bijective) M de $\left]-1,+1\right[$ vers $\mathcal{H}$, qui à tout x associe M(x). Ceci incite à composer M avec une application y de **R** vers $\left]-1,+1\right[$, de façon à ce que l'application f =Moy donne une solution au problème. Pour ce faire, le sujet se trouve contraint d'identifier certaines conditions pour l'aider à déterminer l'application "y". Une première condition découle du fait que M soit bijective (propriété à mettre en évidence) et qu'on cherche une application f qui soit elle même bijective, donc "y" doit définir une bijection de **R** sur $\left]-1,+1\right[$. Une deuxième condition, moins évidente, résulte de l'intérêt de choisir une application "y" qui permette une vérification simple de la propriété de morphisme : M[y((t+t')]=M[y(t)]×M[y(t')]. A ce propos, le sujet pourrait s'aider des formes d'écriture des coefficients de la matrice M(y(t)) :

$$m_{11}=m_{22}=\frac{1}{\sqrt{1-y^2(t)}} \text{ et } m_{12}=m_{21}=\frac{y(t)}{\sqrt{1-y^2(t)}}.$$

En rapprochant ces formules de la panoplie de formules dont il dispose, le sujet pourrait constater qu'en choisissant y(t)=th(t), ces formules donnent :

$$\frac{1}{\sqrt{1-th^2(t)}} = cht \text{ et } \frac{th(t)}{\sqrt{1-th^2(t)}} = sht.$$

Sachant que la fonction tangente hyperbolique définit bien une bijection de **R** sur $\left]-1,+1\right[$, alors l'application f = Moth, pourrait convenir pour résoudre le problème. Avec ce choix, nous obtenons la situation indiquée par le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{R} & \xrightarrow{\quad th \quad} & \left]-1,+1\right[& \xrightarrow{\quad M \quad} & \mathcal{H} \\ t & \longrightarrow & x = tht & \longrightarrow & M(x) = M(tht)=\begin{pmatrix} cht & sht \\ sht & cht \end{pmatrix} \end{array}$$

Pour terminer la résolution, le sujet doit s'assurer que l'application f ainsi construite définit bien un isomorphisme de (**R**,+) vers ($\mathcal{H}$,×). Il doit donc montrer que f est un morphisme pour les lois de (**R**,+) et ($\mathcal{H}$,×) (c'est à dire que f(t + t') = f(t)×f(t')), que f est bijective, puis déduire le résultat demandé via le théorème de transfert.

Montrer que f est un morphisme ne semble pas devoir poser de difficulté. Il s'agit d'une tâche technique utilisant les formules d'addition : ch(x+y)=chx.chy+shx.shy et sh(x+y)=shx.chy+chx.shy. Pour montrer la bijectivité, deux techniques sont a priori possibles. La première consiste à montrer que f est composée de deux bijections M et th. Pour th, le sujet pourrait soit admettre que c'est une bijection, puisqu'il s'agit d'une fonction usuelle étudiée dans le cours d'Analyse, soit utiliser que th est continue et strictement croissante, de limites -1 et 1 respectivement en $-\infty$ et $+\infty$. Pour M, la surjectivité découle de la définition de l'ensemble $\mathcal{H}$, et l'injectivité est triviale car l'égalité M(x)=M(y) implique immédiatement x=y. La deuxième technique possible pour montrer que f est bijective ne tient pas compte de la décomposition de f suivant M et th. Cette technique pourrait poser des problèmes au niveau de la manipulation des ostensifs lors de la recherche d'un antécédent par f d'un élément de $\mathcal{H}$. En effet, le sujet doit montrer que toute matrice M(x) de $\mathcal{H}$ admet un antécédent unique par f dans **R** (ou admet au moins un antécédent, suivant qu'il choisisse de séparer l'étude de l'injectivité et de la surjectivité ou non). Il serait amené alors à chercher t dans **R** tel que M(x)=f(t), ce qui se traduit par l'égalité matricielle :

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{cht} & \text{sht} \\ \text{sht} & \text{cht} \end{pmatrix}.$$

Des difficultés pourraient aussi apparaître lors de la résolution du système d'équations résultant de cette égalité.

Une deuxième manière de procéder pour résoudre l'exercice consiste à utiliser que l'intervalle $]-1,+1[$, muni de la loi $*$ définie par : $x * y = \frac{x+y}{1+xy}$, est un groupe (ce résultat a fait l'objet d'un

exercice dans une séance de TD lors de l'étude des structures algébriques).

Dans ce cas, le sujet pourrait obtenir un isomorphisme entre (**R**,+) et ($\mathcal{H}$,$\times$) par composition d'un isomorphisme h entre (**R**,+) et ($]-1,+1[$,$*$) d'une part et d'un isomorphisme g entre ($]-1,+1[$,$*$) et ($\mathcal{H}$,$\times$) d'autre part. L'isomorphisme g est naturellement donné par l'application M qui à tout x dans $]-1,+1[$, associe la matrice M(x) de $\mathcal{H}$, dont il faut bien sûr montrer que c'est un isomorphisme pour les structures considérées. Quant à l'isomorphisme h, le sujet, comme dans la première méthode, doit identifier certaines contraintes pour les utiliser dans la recherche de h. Une première contrainte est que h doit définir une bijection de **R** sur $]-1,+1[$ et une deuxième contrainte résulte de la propriété de morphisme de h. Cette propriété se traduit par : h(x+y)=h(x)$*$h(y), pour x et y dans **R**. Autrement dit, il faut avoir :

$$h(x+y) = \frac{h(x)+h(y)}{1+h(x)h(y)}.$$

Là aussi, le sujet pourrait constater une analogie entre cette égalité et la formule :

$$\text{th}(x+y) = \frac{\text{th}(x)+\text{th}(y)}{1+\text{th}(x)\text{th}(y)}$$

et, sachant de plus que th est une bijection de **R** sur $]-1,+1[$, déduire que l'application th convient. Remarquons qu'avec cette méthode, au lieu de montrer séparément que les applications g et h sont des isomorphismes, le sujet pourrait aussi montrer que la composée f = goh est un isomorphisme de (**R**,+) vers ($\mathcal{H}$,×), comme dans la première méthode.

Une autre méthode de résolution de l'exercice consiste enfin à montrer que ($\mathcal{H}$,×) vérifie les axiomes de la structure de groupe (ou de sous groupe de GL_2(**R**)). Le sujet construit ensuite une application entre **R** et $\mathcal{H}$ pour établir l'isomorphisme entre les deux structures. Cette méthode demande aussi la détermination d'une application entre **R** et $]-1,+1[$ pour obtenir l'isomorphisme visé. Pour ce faire, le sujet pourrait procéder comme dans l'une des deux méthodes précédentes. Nous considérons toutefois que cette façon de procéder, bien qu'elle soit correcte, ne répond pas à la condition de la question qui demande l'usage préalable d'une application pour répondre aux deux parties de la question (groupe et isomorphisme).

Ceci étant, quelle que soit la méthode adoptée par le sujet pour résoudre l'exercice, les difficultés liées à la construction de l'isomorphisme f entre (**R**,+) et ($\mathcal{H}$,×), et particulièrement celles relatives à l'identification de l'application th, nous permettent de considérer qu'il s'agit là d'une situation réellement problématique. La résolution des difficultés inhérentes à cette situation, et en particulier la mise en évidence des contraintes liées à l'identification de l'application th, qui sont à la charge du sujet, dépendent des possibilités d'exploration de l'espace de résolution du problème et de la sensibilité aux potentialités qu'offrent les formes d'écritures symboliques disponibles.

Nous considérons pour cela que l'organisation mathématique relative au problème posé est une OM *r-convoquée*. Nous décomposons la tâche *T* associée à cette OM en deux sous-tâches successives. La première, T_1, est relative à la construction de l'application f et la deuxième, T_2, est relative à l'usage de f pour montrer que ($\mathcal{H}$,×) est un groupe, isomorphe au groupe (**R**,+)

En nous limitant au cas de la première méthode de résolution, nous déterminons ci-dessous les éléments caractéristiques de chacune des organisations mathématiques OM_1 et OM_2 respectivement associées aux tâches T_1 et T_2.

Organisation OM_1= (T_1, τ_1, θ_1, Θ_1)

T_1 : Construire une application f entre **R** et $\mathcal{H}$

τ_1 : Considérer l'application M de $]-1,+1[$ vers $\mathcal{H}$, qui à tout x associe M(x), déterminer une application bijective convenable y de **R** vers $]-1,+1[$, puis prendre f = Moy .

θ_1 : Composition d'applications.

Θ_1 : Théorie des ensembles

Organisation OM_2= (T_2, τ_2, θ_2, Θ_2)

T_2 : Montrer que ($\mathcal{H}$,×) est un groupe, isomorphe au groupe (**R**,+)

τ_2 : Montrer que l'application f définie dans OM_1 est un morphisme pour les lois de **R** et $\mathcal{H}$, que f est bijective, puis déduire, via le théorème de transfert, que $(\mathcal{H},\times)$ est un groupe isomorphe au groupe (**R**,+).

θ_2 : **Théorème de transfert :**

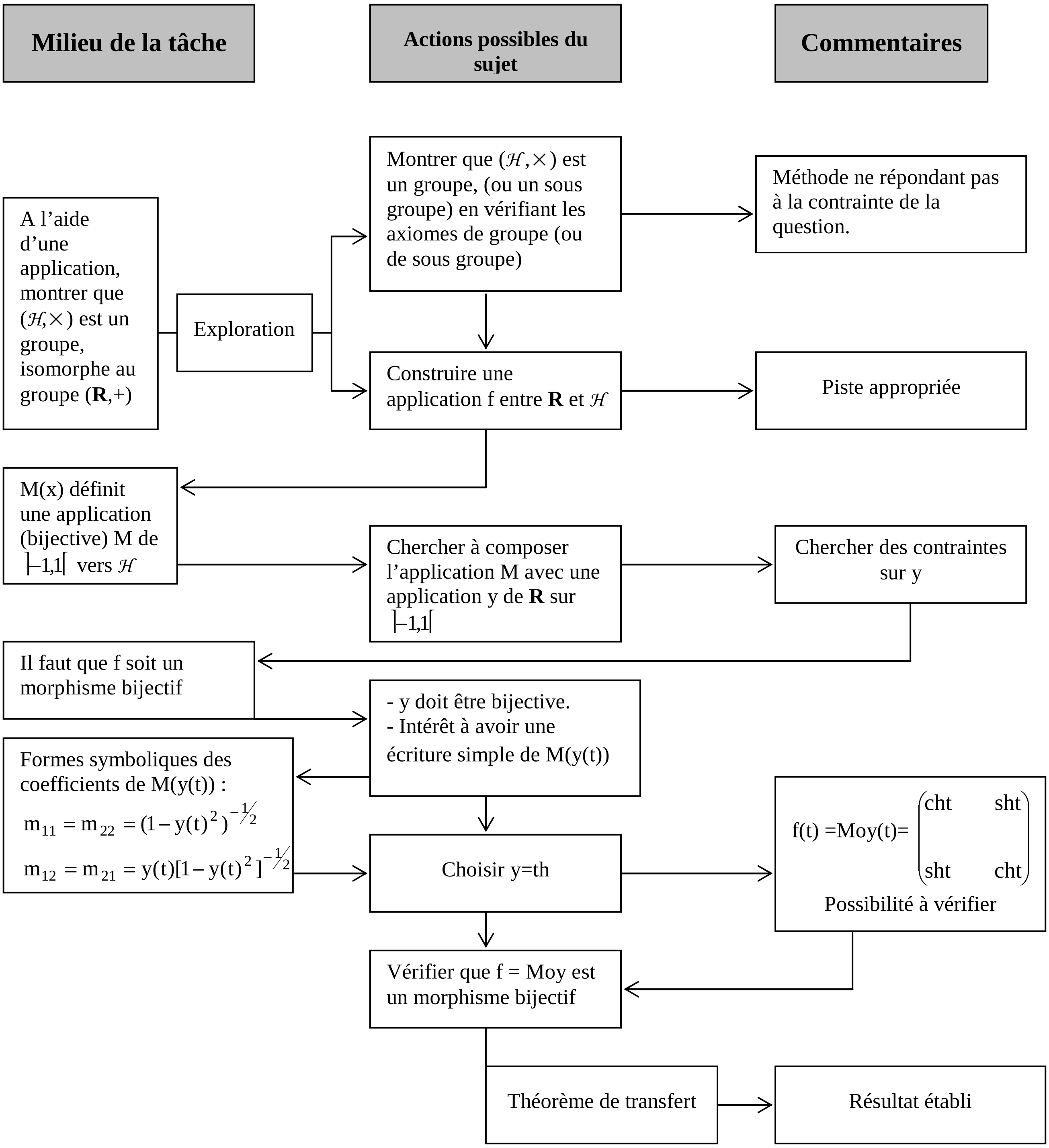
> Soient $(E,*)$ un groupe et F un ensemble non vide muni d'une loi de composition interne notée +.
> S'il existe un isomorphisme de magmas de $(E,*)$ sur $(F,+)$, alors $(F,+)$ est un groupe isomorphe au groupe $(E,*)$

Θ_2 : Algèbre des structures

Remarquons que pour l'accomplissement de la technique τ_2, d'autres sous-tâches devront être réalisées, en l'occurrence : f est bijective et f est un morphisme pour les lois de **R** et $\mathcal{H}$. Dans un objectif de simplification, nous limitons la décomposition de la tâche T aux sous tâches T_1 et T_2.

Organigramme récapitulatif de l’analyse a priori

L’organigramme suivant récapitule l’analyse a priori que nous venons d’effectuer



Organigramme 9

Conclusion

L'exercice proposé dans cette séance met en œuvre des connaissances théoriques supposées être élémentaires eu égard au savoir mathématique que les étudiants des classes préparatoires MP sont appelés à acquérir. Toutefois, la situation problématique déterminée par l'exercice est loin d'être triviale. La difficulté essentielle à laquelle seront confrontés les étudiants, quelle que soit la stratégie de résolution adoptée, réside dans la construction d'une application qui va assurer l'isomorphisme entre ($\mathbf{R}$,+) et ($\mathcal{H}$,$\times$). Cette application est assujettie à des contraintes dont certaines sont implicites. La mise en évidence de ces contraintes, qui reste à la charge du sujet, requiert une bonne analyse du but à atteindre, l'organisation et la mise en relation des données de l'exercice, une sensibilité aux formes symboliques et langagières disponibles, et un répertoire de bijections connues dont les propriétés peuvent être associées à celles attendues. C'est à ce niveau que nous situons la composante pratique liée à la résolution de l'exercice et qui constitue pour cette expérimentation le principal enjeu d'apprentissage que nous visons.

X. 2. Déroulement de l'expérimentation

La séance de classe de cette expérimentation s'est déroulée dans les mêmes conditions que celles de la première expérimentation et avec la même organisation. Les mêmes étudiants y ont aussi participé.

X. 3. Analyse des productions des étudiants

Nous analysons dans ce paragraphe les deux productions fournies par chacun des trois groupes dans la séance de classe. Comme pour la première séance, nous désignons par « Production 1 (resp. 2) » celle qui était remise à l'issue de la première (resp. deuxième) période. Les remarques de l'enseignant sur les copies sont entourées d'un trait gras.

X. 3. 1. Analyse des productions du groupe 1

a) Analyse de la production 1

$$\mathcal{M}(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\begin{pmatrix}1 & x\\ x & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\\ \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\end{pmatrix}$$

On cherche une application de $\mathbb{R}$ ds H

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow H$$
$$x \longmapsto \cancel{\mathcal{M}(x)}\ \mathcal{M}$$

$$\cancel{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \cancel{\forall} \quad x \in\ ]-1,1[$$

φ isomorphisme $\Rightarrow$ φ morph bijective

$$\varphi(0) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = I_2$$

$$\cancel{\begin{cases}\varphi(x) = \mathcal{M}(x) & \text{si } x \in\ ]-1,1[\\ \varphi(x) = I_2 & \text{si non}\end{cases}}$$

non bij

$$\varphi(x+y) = \varphi(x)\cdot\varphi(y)$$

$$\mathcal{M}(x)\,\mathcal{M}(y) = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\\ \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} & \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\\ \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\end{pmatrix} = \mathcal{M}(x+y)$$

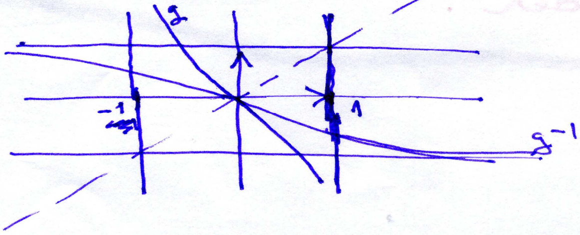
$x \in\ ]-1,1[\ ,\ y \in\ ]-1,1[$ $\quad \begin{matrix}-1 < x < 1\\ -1 < y < 1\end{matrix} \Big\} \Rightarrow -2 < x+y < 2$

$$\begin{tikzcd}]-1,1[\arrow[r, "f"] \arrow[d, shift right, "g"'] & H \\ \mathbb{R} \arrow[u, shift right, "g^{-1}"'] \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$
$$x \longmapsto \mathcal{M}(x)$$

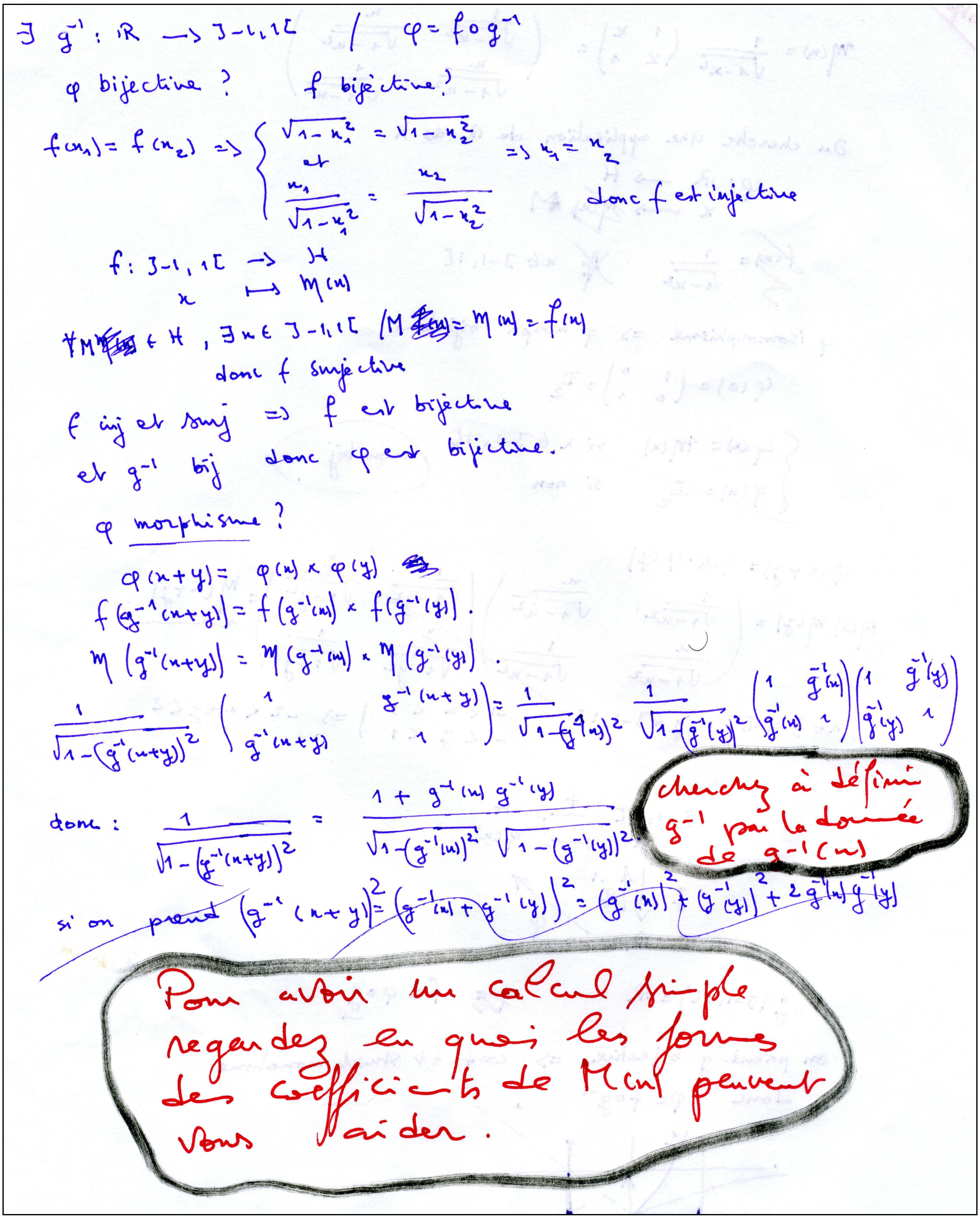
$g(]-1,1[) = \mathbb{R}$ $\qquad f = \varphi \circ g$

on prend g bijective $\Rightarrow$ cont et strict monotone

donc $\varphi = f \circ g^{-1}$



Production 1 (Groupe 1)


$\exists\, g^{-1} : \mathbb{R} \to]-1,1[\;/\; \varphi = f \circ g^{-1}$

φ bijective ? f bijective ?

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{1-x_1^2} = \sqrt{1-x_2^2} \\ \text{et} \\ \dfrac{x_1}{\sqrt{1-x_1^2}} = \dfrac{x_2}{\sqrt{1-x_2^2}} \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2$$

donc f est injective

$$f :]-1,1[\to \mathcal{H}, \quad x \mapsto M(x)$$

$\forall M \in \mathcal{H}, \exists x \in]-1,1[\;/\; M = M(x) = f(x)$

donc f surjective

f inj et surj $\Rightarrow$ f est bijective

et g^{-1} bij donc φ est bijective.

φ morphisme ?

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) \times \varphi(y)$$

$$f(g^{-1}(x+y)) = f(g^{-1}(x)) \times f(g^{-1}(y)).$$

$$M(g^{-1}(x+y)) = M(g^{-1}(x)) \times M(g^{-1}(y)).$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-(g^{-1}(x+y))^2}} \begin{pmatrix} 1 & g^{-1}(x+y) \\ g^{-1}(x+y) & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-(g^{-1}(x))^2}} \frac{1}{\sqrt{1-(g^{-1}(y))^2}} \begin{pmatrix} 1 & g^{-1}(x) \\ g^{-1}(x) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & g^{-1}(y) \\ g^{-1}(y) & 1 \end{pmatrix}$$

donc : $$\frac{1}{\sqrt{1-(g^{-1}(x+y))^2}} = \frac{1 + g^{-1}(x)\, g^{-1}(y)}{\sqrt{1-(g^{-1}(x))^2}\,\sqrt{1-(g^{-1}(y))^2}}$$

cherchez à définir g^{-1} par la donnée de $g^{-1}(x)$

~~si on prend~~ $\cancel{(g^{-1}(x+y))^2 = (g^{-1}(x)+g^{-1}(y))^2 = (g^{-1}(x))^2 + (g^{-1}(y))^2 + 2g^{-1}(x)g^{-1}(y)}$

Pour avoir un calcul simple regardez en quoi les formes des coefficients de M(x) peuvent vous aider.

Suite de la production 1 (Groupe 1)

Analyse

Les étudiants de ce groupe commencent par fixer leur stratégie de travail pour résoudre l'exercice. Ils précisent qu'ils cherchent à construire une application φ de **R** dans $\mathcal{H}$ qui soit un isomorphisme. L'usage de x comme variable pour définir l'application φ (x varie dans l'ensemble **R**) et sa présence en même temps dans l'écriture des éléments M(x) de $\mathcal{H}$ (pour lesquelles x décrit l'intervalle $]-1,+1[$) a entraîné au début une incohérence dans la définition de φ que les étudiants sont arrivés à surmonter en adoptant la notation M pour $\varphi(x)$. Les étudiants font ensuite un premier essai pour construire l'application φ. Ils posent $\varphi(x)$ =M(x) pour les x dans $]-1,+1[$ et, par prolongement, ils fixent I_2 (matrice unité de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$) comme image des x qui sont en dehors de $]-1,+1[$. Remarquant que cette application n'est pas bijective et trouvant des difficultés lors de la vérification de la propriété d'homomorphie, ils abandonnent cette piste. Les étudiants essayent après cela la piste de composition d'applications. Ils considèrent pour cela l'application f qui à x de $]-1,+1[$ associe la matrice M(x) de $\mathcal{H}$ et introduisent une application g de $]-1,+1[$ vers **R** telle que $f = \varphi o g$. Ils cherchent alors des conditions sur g pour obtenir une application φ de **R** dans $\mathcal{H}$ répondant à la question. Ils remarquent d'abord que l'on doit avoir $g(]-1,+1[)=\mathbf{R}$ et précisent qu'ils cherchent g bijective pour pouvoir écrire $\varphi = fog^{-1}$. Pour ce faire, les étudiants choisissent de travailler dans le cadre analytique. Ils traduisent alors la condition de « g bijective » par « continue et strictement monotone », en utilisant le symbole d'implication dans le sens de « il suffit ». Ils donnent dans le registre graphique une solution possible pour g correspondant à une fonction continue et strictement décroissante et construisent sur le même graphique la courbe de g^{-1}. Considérant que le problème d'existence de g est résolu, les étudiants envisagent alors de vérifier que l'application $\varphi = fog^{-1}$ ainsi définie est un isomorphisme de (**R**, +) vers $(\mathcal{H}, \times)$. Pour la bijectivité de φ, ils montrent convenablement que f est injective et surjective, donc que f est bijective et, remarquant que g^{-1} est bijective (par construction), ils concluent que φ est bijective. En observant les parties rayées de la réponse, nous remarquons que, lors de la démonstration de la propriété de surjectivité pour f, les étudiants ont rencontré un petit problème à propos de l'usage des ostensifs qu'ils ont réussi à résoudre. Pour la propriété de morphisme, les étudiants posent convenablement le problème d'homomorphie de φ. Mais, en écrivant l'égalité matricielle : $M\left(g^{-1}(x+y)\right) = M\left(g^{-1}(x)\right)M\left(g^{-1}(y)\right)$, ils se heurtent au problème de l'égalité entre les coefficients (1,1) de chaque membre. N'arrivant pas à surmonter cette difficulté, ils se retrouvent en situation de blocage.

Commentaire

Les étudiants de ce groupe ont réussi à adopter la stratégie requise par l'énoncé pour la résolution de l'exercice, en l'occurrence la stratégie de transfert de structures. L'abandon de la piste du prolongement et le choix de la piste de composition d'applications attestent une exploration pertinente de l'espace de résolution. Pour concrétiser cette piste de travail, les étudiants sont arrivés à identifier l'application f définie par la donnée des matrices M(x) et ont réussi à mettre en équation fonctionnelle l'application g qui leur manque pour construire une application φ permettant de réaliser le transfert visé. Le problème de recherche d'une application g vérifiant $f = \varphi o g$ est effectué au départ d'un point de vue ensembliste, en ce sens que les étudiants ont cherché à composer avec g^{-1} pour obtenir l'application $\varphi = fog^{-1}$, et ceci sans regarder ce que les propriétés de f et celles attendues de φ pourraient donner comme contraintes sur g. Dans ces conditions, la seule contrainte imposée à g est qu'elle soit bijective. Pour déterminer une telle application, les étudiants choisissent de travailler dans le cadre analytique qui leur offre une classe de fonctions bijectives (en l'occurrence, continues et strictement monotone) pouvant être facilement illustrées graphiquement. Ils se contentent alors de donner graphiquement un exemple de fonction g bijective qu'ils considèrent répondre à leurs attentes et représentent en même temps la bijection réciproque g^{-1}. Ils considèrent, semble-t-il, que l'application φ qu'ils cherchent est déterminée et envisagent de vérifier que φ est un isomorphisme pour les structures données. Après avoir montré sans difficulté que φ est bijective, et posé le problème d'homomorphie de φ, les étudiants se heurtent au problème de l'égalisation des coefficients des matrices $M\left(g^{-1}(x+y)\right)$ et $M\left(g^{-1}(x)\right)M\left(g^{-1}(y)\right)$. Ils ne semblent pas avoir compris que l'obstacle réside dans l'absence d'une expression ou d'une spécification pour $g^{-1}(x)$. Pour surmonter la difficulté, ils cherchent à ajouter une condition d'additivité à g^{-1} pour pouvoir passer de $g^{-1}(x+y)$ à $g^{-1}(x)$ et $g^{-1}(y)$, mais ils se retrouvent quand même bloqués. Pour les aider, nous les avons dans un premier temps incités à donner une expression à $g^{-1}(x)$. Remarquant qu'ils n'arrivent pas à trouver une piste de recherche appropriée, nous leur avons demandé de regarder ce que les formes d'écriture des coefficients de M(x) peuvent leur apporter. Ceci étant, nous notons par ailleurs que les étudiants ont réussi à résoudre par eux même les deux difficultés qui sont apparues antérieurement au niveau de l'usage des ostensifs. Une première fois dans l'explicitation de $\varphi(x)$, et une deuxième fois lors de l'étude de la propriété de surjectivité de f. La stratégie mise en place pour résoudre le problème, même si elle n'aboutit pas, est pertinente, et les étudiants font preuve d'une créativité et d'une flexibilité dans le passage entre les registres sémiotiques. Ceci montre un progrès indéniable par rapport aux difficultés remarquées à ce niveau dans les séances précédentes.

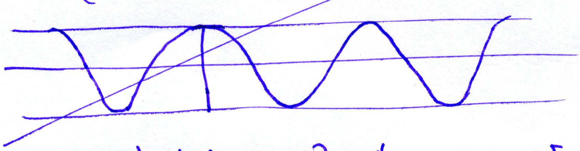
b) Analyse de la production 2

$$\mathcal{M}(g^{-1}(x)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-(g^{-1}(x))^2}} & \frac{g^{-1}(x)}{\sqrt{1-(g^{-1}(x))^2}} \\ \frac{g^{-1}(x)}{\sqrt{1-(g^{-1}(x))^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-(g^{-1}(x))^2}} \end{pmatrix}$$

$$\cancel{\sqrt{1-g^{-1}(x)^2} =}$$

$$\cancel{g^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow]-1,1[}$$

$$\cancel{\sqrt{1-(g^{-1}(x))^2} = \sqrt{1-\cos^2 x} = \sqrt{\sin^2 x} = |\sin x|}$$



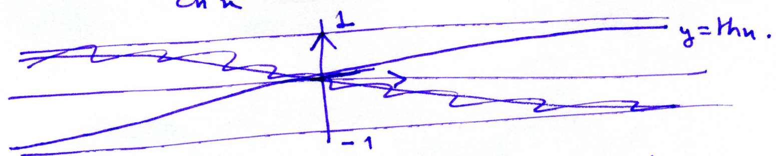
<u>non bij</u>

<u>g^{-1} bij de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$</u>

$$\cancel{\sqrt{1-ch^2 x}} \qquad ch^2 x - sh^2 x = 1$$

$$\cancel{1 - ch^2 x = -sh^2 x.}$$

$$1 - th^2 x = \frac{1}{ch^2 x} \qquad \underline{ch \geq 1} \qquad \Rightarrow \sqrt{1 - th^2 x} = \frac{1}{ch x}$$



$$g^{-1}(x) = th x \qquad \frac{1}{\sqrt{1-th^2 x}} = ch x \quad \text{et} \quad \frac{th x}{\sqrt{1-th^2 x}} = th x \cdot ch x = sh x$$

$$\mathcal{M}(th x) = \begin{pmatrix} ch x & sh x \\ sh x & ch x \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M}(th x) \times \mathcal{M}(th y) = \begin{pmatrix} ch x & sh x \\ sh x & ch x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ch y & sh y \\ sh y & ch y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ch x\, ch y + sh x\, sh y & ch x\, sh y + sh x\, ch y \\ sh x\, ch y + ch x\, sh y & sh x\, sh y + ch x\, ch y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch(x+y) & sh(x+y) \\ sh(x+y) & ch(x+y) \end{pmatrix}$$

$$= \mathcal{M}(th(x+y))$$

donc $\varphi(x+y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$
φ est un morphisme de $(\mathbb{R},+)$ vers $(H,\times)$
$\varphi = f \circ th$
f bij et th bij (cont et strict ↗) donc φ bij
φ est donc un isomorphisme de $(\mathbb{R},+)$ vers $(H,\times)$
donc $(H,\times)$ est un groupe isomorphe à $(\mathbb{R},+)$ (Th de transfert)

Production 2 (Groupe 1)

Analyse

Dans cette deuxième production, les étudiants, tenant compte de la remarque de l'enseignant, cherchent à approcher les coefficients de la matrice $M(g^{-1}(x))$ avec des formules usuelles connues. Ainsi, dans un premier temps, l'expression $\sqrt{1-\left(g^{-1}(x)\right)^2}$ est identifiée avec $\sqrt{1-(\cos x)^2}$, donc g^{-1} avec la fonction cosinus qui n'est malheureusement pas bijective, ce qu'ils confirment par une représentation graphique. Ils rejettent donc cette possibilité. Du cosinus ils passent ensuite assez logiquement au cosinus hyperbolique, mais le calcul fait pour simplifier l'expression montre que $1-(\text{ch}x)^2$ est négatif et cette option est aussi rejetée.

Les étudiants essayent alors avec la formule : $1-(\text{th}x)^2 = \dfrac{1}{(\text{ch}x)^2}$.

Après avoir calculé les coefficients de la matrice $M(g^{-1}(x))$ en prenant thx pour $g^{-1}(x)$, et vérifié graphiquement que la fonction th satisfait bien les conditions sur g^{-1}, les étudiants adoptent ce choix pour la fonction g^{-1} et passent à la vérification de la propriété d'isomorphie pour l'application $\varphi = f\text{o}th$. Avec la formule simplifiée de $M(\text{th}x)$, et en utilisant les formules d'addition de ch(x+y) et sh(x+y), ils établissent l'égalité matricielle $M(\text{th}(x))M(\text{th}(y)) = M(\text{th}(x+y))$. Pour montrer que φ est bijective (propriété déjà démontrée dans la première période avec g^{-1}), les étudiants rappellent que f est bijective, remarquent que l'application th est aussi bijective (car continue et strictement croissante) et concluent que φ est bijective. A la fin, ils récapitulent les résultats établis et donnent une réponse à la question de l'exercice en précisant qu'ils utilisent le théorème de transfert.

Commentaire

Pour trouver une expression possible à $g^{-1}(x)$, les étudiants cherchent une analogie entre l'expression $\sqrt{1-\left(g^{-1}(x)\right)^2}$ et l'expression d'une formule usuelle connue. Pour confirmer ou infirmer un choix fixé, ils vérifient en aval si les propriétés analytiques (illustrées toujours dans le registre graphique) et/ou algébrique de la fonction choisie sont conformes aux propriétés attendues pour $g^{-1}(x)$. Après deux tentatives qui s'avèrent non valides, les étudiants réussissent à adopter un choix approprié pour $g^{-1}(x)$. La fonction $\varphi = f\text{o}th$ étant déterminée, les étudiants justifient convenablement que φ est un morphisme bijectif de **R** sur $\mathcal{H}$ et rédigent à la fin soigneusement leur réponse au problème.

Conclusion

Dans cet exercice, la production des étudiants, aussi bien dans la première que dans la deuxième période, donne une solution conforme au problème et ceci des points de vue rédaction, organisation et cohérence. Les propriétés démontrées (f bijective, φ isomorphisme, $(\mathcal{H},\times)$ est un groupe) sont faites avec soin et rigueur et l'usage du registre graphique pour vérifier les propriétés analytiques des fonctions en jeu est pertinent. Les étudiants ont d'autre part réussi à éliminer les choix non valides, aussi bien en ce qui concerne la piste de départ que pour le choix de la fonction g^{-1}. Ceci marque des progrès quant aux aptitudes d'exploration de l'espace de la tâche et de contrôle. Néanmoins, nous notons une insuffisance dans la possibilité de mettre en évidence les contraintes et conditions nécessaires qui assurent la résolution des problèmes intermédiaires rencontrées, notamment celui qui concerne l'identification des contraintes sur g^{-1} et celui qui concerne l'explicitation de $g^{-1}(x)$. Nous remarquons à ce propos que les étudiants ne sont pas arrivés à exploiter par eux-mêmes spontanément les potentialités qu'offraient les formes symboliques des coefficients de la matrice M(x).

X. 3. 2. Analyse des productions du groupe 2

a) Analyse de la production 1

$\Pi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix}$ $x \in]-1,1[$

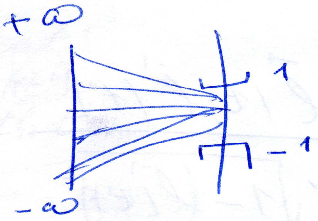
A ~~Φ~~ : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{H}$

~~x~~ $t \longrightarrow$ ~~$\Pi(x)$~~ $A(t) = \Pi(x)$

$\Pi(x) = A(t)$ $x \in]-1,1[$ $t \in \mathbb{R}$

Il faut paramétrer x

$x = h(t)$



$\Pi(h(t)) = A(t)$

$h : \mathbb{R} \longrightarrow]-1,1[$

$tg :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longrightarrow tg\, x$

$\ell :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longrightarrow tg(\frac{\pi}{2}x)$

$\ell'(x) = \frac{\pi}{2}(1 + tg^2 \frac{\pi}{2}x) > 0 \Rightarrow \ell$ bijective

$\ell^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow]-1,1[$

donc $h = \ell^{-1}$

~~A~~ : $\mathbb{R} \longrightarrow$ ~~$\mathcal{H}$~~ $]-1,1[\longrightarrow \mathcal{H}$

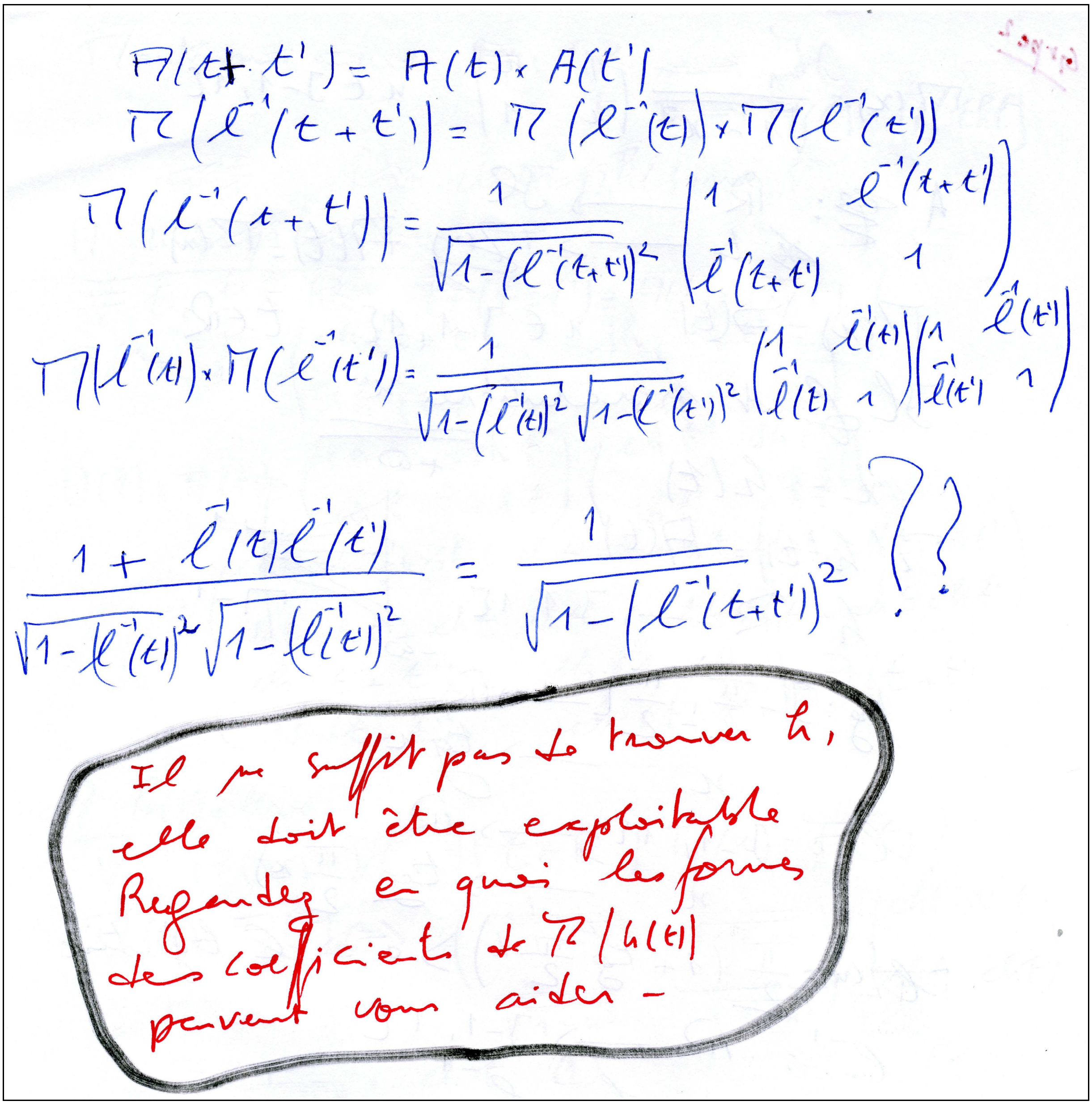
$t \longrightarrow$ ~~$\Pi(t)$~~ $x = \ell^{-1}(t) \longrightarrow \Pi(x) = \Pi(\ell^{-1}(t))$

A

$A(t) = \Pi(\ell^{-1}(t))$

A morphisme ?

Production 1(Groupe 2)



$$\cancel{A(t+t')} = A(t) \times A(t')$$

$$M(\ell^{-1}(t+t')) = M(\ell^{-1}(t)) \times M(\ell^{-1}(t'))$$

$$M(\ell^{-1}(t+t')) = \frac{1}{\sqrt{1-(\ell^{-1}(t+t'))^2}} \begin{pmatrix} 1 & \ell^{-1}(t+t') \\ \ell^{-1}(t+t') & 1 \end{pmatrix}$$

$$M(\ell^{-1}(t)) \times M(\ell^{-1}(t')) = \frac{1}{\sqrt{1-[\ell^{-1}(t)]^2}\sqrt{1-(\ell^{-1}(t'))^2}} \begin{pmatrix} 1 & \ell^{-1}(t) \\ \ell^{-1}(t) & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \ell^{-1}(t') \\ \ell^{-1}(t') & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1+\ell^{-1}(t)\ell^{-1}(t')}{\sqrt{1-\ell^{-1}(t)^2}\sqrt{1-(\ell^{-1}(t'))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(\ell^{-1}(t+t'))^2}} \quad ??$$

Il ne suffit pas de trouver h, elle doit être exploitable Regardez en quoi les formes des coefficients de $M(h(t))$ peuvent vous aider -

Suite de la production 1 (Groupe 2)

Analyse

Au départ, les étudiants de ce groupe envisagent de construire une application A de **R** dans $\mathcal{H}$ qui à tout réel t associe une matrice de $\mathcal{H}$. Ceci indique qu'ils ont choisi la stratégie utilisant le théorème de transfert pour répondre à la question. Les écritures barrées montrent que les étudiants ont été un peu perturbés lors de la définition de A par la variété des ostensifs présents, mais ils sont arrivés à la fin à adopter une écriture adéquate de A. Pour construire l'application A, les étudiants, partant de l'égalité M(x)=A(t) où $x \in \left]-1,1\right[$ et $t \in$ **R,** ont choisi de « paramétrer » x, autrement dit de lier tout x de l'intervalle $\left]-1,1\right[$ à un réel t de façon à ce que les matrices de $\mathcal{H}$ deviennent dépendantes de t dans **R**. Remarquons que la technique de « paramétrisation » est souvent utilisée en géométrie analytique au lycée. Pour ce faire, les étudiants ramènent l'opération de « paramétrisation » à la recherche d'une fonction h qui à tout réel t associe x =h(t). Fonction qu'ils représentent graphiquement dans le cadre ensembliste. Aucune condition préalable n'a été imposée à la fonction h à part la désignation des ensembles de départ et d'arrivée. Pour déterminer h, les étudiants utilisent les fonctions usuelles connues. Partant de l'application tangente, définie de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ vers **R**, ils construisent, par composition,

une application ***ℓ*** de $]-1,1[$ vers **R**. Après avoir justifié, via le sens de variation obtenu en calculant la dérivée, que ***ℓ*** est bijective, ils prennent pour h l'application inverse $(\ell)^{-1}$. L'application A qu'ils cherchent est alors déterminée par la relation : $A=Mo(\ell)^{-1}$, qu'ils désignent par un schéma de composition. Les étudiants envisagent ensuite de montrer que l'application A ainsi définie est un morphisme. Après avoir posé convenablement le problème d'homomorphie et entamé le calcul des coefficients des matrices en jeu, les étudiants se bloquent lors de la vérification de l'égalité entre les coefficients (1,1) de chacune des matrices $M\left(l^{-1}(t+t')\right)$ et $M\left(l^{-1}(t)\right)M\left(l^{-1}(t')\right)$.

Commentaire

Dans ce travail, les étudiants sont arrivés dès le départ à fixer la stratégie requise par l'énoncé pour résoudre le problème. Ils ont aussi réussi à surmonter la difficulté liée à l'usage des ostensifs lors de l'écriture de l'application A qu'ils envisagent de construire. Leur idée de « paramétrer » l'ostensif x à l'aide d'un réel t est pertinente. Pour déterminer une fonction h permettant de réaliser la paramétrisation envisagée, les étudiants, choisissant de travailler dans le cadre analytique, ont convenablement géré le processus qui les conduit à déterminer l'application $(\ell)^{-1}$. Toutefois, en ne considérant que l'aspect ensembliste de l'application h à déterminer, l'application obtenue s'est avérée inexploitable, et les étudiants se sont heurtés à la difficulté de vérifier la propriété d'homomorphie de A. Nous notons à ce niveau une insuffisance dans l'exploitation des données (explicites et implicites) du milieu pour identifier au préalable des contraintes permettant d'obtenir une application h appropriée.

b) Analyse de la production 2

$\Pi(h(t)) = A(t)$

$A(t) = \frac{1}{\sqrt{1-(h(t))^2}}\begin{pmatrix}1 & h(t)\\ h(t) & 1\end{pmatrix}$

$A(t+t') = A(t)\times A(t')$

$\Rightarrow \frac{1+h(t)\,h(t')}{\sqrt{1-(h(t))^2}\sqrt{1-(h(t'))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(h(t+t'))^2}}$

$\cancel{tg(t\pm t') = \frac{tg\,t \pm tg\,t'}{1+tg\,t\,tg\,t'}}$

$th(t+t') = \frac{th(t)+th(t')}{1+th\,t\,th\,t'}$

$A(t) = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{1-(h(t))^2}} & \\ \frac{h(t)}{\sqrt{1-(h(t))^2}} & \end{pmatrix}.$?

$\sqrt{1-\cos^2 t} = |\sin t|$

$\cancel{\cos : \mathbb{R} \to [-1,1]}$

$\cancel{\sqrt{1-ch^2(t)}} =$

$\sqrt{1-th^2 t} = \frac{1}{ch\,t}$ $\qquad th : \mathbb{R} \to]-1,1[$

$\frac{th\,t}{\sqrt{1-th^2 t}} = \frac{th\,t}{\cancel{ch\,t}}\times ch\,t = sh\,t$

donc $\Pi(th\,t) = \begin{pmatrix}ch\,t & sh\,t\\ sh\,t & ch\,t\end{pmatrix}$

Production 2 (Groupe 2)

Montrons que $A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{H}$

$t \longmapsto A(t) = \Pi(\text{th}\, t)$

isomorphisme :

A morphisme

$\forall\, t, t' \in \mathbb{R} \quad A(t+t') = A(t) \times A(t')$?

$$A(t+t') = \begin{pmatrix} \text{ch}(t+t') & \text{sh}(t+t') \\ \text{sh}(t+t') & \text{ch}(t+t') \end{pmatrix}$$

$$A(t) \times A(t') = \begin{pmatrix} \text{ch}\, t & \text{sh}\, t \\ \text{sh}\, t & \text{ch}\, t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{ch}\, t' & \text{sh}\, t' \\ \text{sh}\, t' & \text{ch}\, t' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \text{ch}\, t\, \text{ch}\, t' + \text{sh}\, t\, \text{sh}\, t' & \text{ch}\, t\, \text{sh}\, t' + \text{sh}\, t\, \text{ch}\, t' \\ \text{sh}\, t\, \text{ch}\, t' + \text{ch}\, t\, \text{sh}\, t' & \text{sh}\, t\, \text{sh}\, t + \text{ch}\, t\, \text{ch}\, t' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \text{ch}(t+t') & \text{sh}(t+t') \\ \text{sh}(t+t') & \text{ch}(t+t') \end{pmatrix} = A(t+t')$$

A bijective

$\forall\, \Pi(x) \in \mathcal{H},\ \exists!\, t \in \mathbb{R} \ /\ \Pi(x) = A(t)$?

$$\Pi(x) = A(t) \iff \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \\ \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ch}\, t & \text{sh}\, t \\ \text{sh}\, t & \text{ch}\, t \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \text{ch}\, t & (1) \\ \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \text{sh}\, t & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow 1 - x^2 = \frac{1}{\text{ch}^2 t} \Rightarrow x^2 = 1 - \frac{1}{\text{ch}^2 t}$$

$$x^2 = \frac{\text{ch}^2 t - 1}{\text{ch}^2 t} \Rightarrow |x| = \frac{\sqrt{\text{ch}^2 t - 1}}{\text{ch}\, t} = \text{th}\, t$$

$(\text{ch}\, t \geq 1)$

Suite de la production 2 (Groupe 2)

Analyse

Tenant compte de la remarque de l'enseignant, les étudiants focalisent leur travail sur la recherche d'une expression pour h(t) permettant de vérifier la propriété d'homomorphie de A. Ils essaient alors de raccrocher l'égalité des coefficients (1,1) résultante de A(t+t')=A(t)+A(t') à des formules usuelles connues. Après deux tentatives non valides qu'ils abandonnent, ils centrent leur réflexion autour de l'expression $\sqrt{1-(h(t))^2}$, où ils cherchent à instancier h(t). Ils essayent dans un premier temps avec h(t)=cost, comme le groupe 1. Cette possibilité est éliminée car les étudiants constatent que la fonction cosinus prend ses valeurs dans l'intervalle fermé $[-1,1]$. Comme pour le groupe 1, le choix de la fonction ch suit immédiatement celui de la fonction cos mais est abandonné sans calcul apparent. Peut-être les étudiants ont-ils repéré que 1-ch²x est toujours négatif puisque la fonction ch prend ses valeurs dans $[1,+\infty[$, peut-être ont-ils calculé mentalement $1-(\mathrm{cht})^2=-(\mathrm{sht})^2$. Essayant ensuite avec tht, les étudiants obtiennent des formules simples et constatent de plus que la fonction th est définie de **R** vers $]-1,1[$, ce qui est conforme à leur attente. Le choix h(t)=tht est alors adopté et les étudiants passent à la vérification des propriétés d'homomorphie et de bijectivité de la fonction A ainsi obtenue. Avec les nouvelles expressions des coefficients de la matrice M(tht), et en utilisant les formules d'addition de ch(t+t') et sh(t+t'), les étudiants obtiennent sans peine l'égalité A(t+t')=A(t)A(t'). Pour montrer que A est bijective, ils choisissent d'utiliser la définition ensembliste de la bijectivité. Des difficultés sont apparues lors de la résolution de l'équation M(x)=A(t). La séance se termine sans que les étudiants n'arrivent à surmonter ces difficultés. Ce problème est alors laissé à revoir pour la séance suivante.

Commentaire

Pour trouver une expression possible à h(t), les étudiants mènent une recherche dans le champ des formules algébriques usuelles. Après quelques tentatives qui s'avèrent non valides et que les étudiants sont arrivés à éliminer pour non conformité des formules correspondantes ou encore car certaines caractéristiques ensemblistes des exemples choisis ne concordent pas avec celles de la fonction h attendue, les étudiants ont réussi à obtenir une expression appropriée pour h(t). Nous notons à ce niveau une aptitude à explorer l'espace de la sous-tâche concernée et une succession de choix similaire à ceux effectués par le groupe 1 qui montre bien la succession d'associations : $\sqrt{1-u^2} \rightarrow \sqrt{1-\cos^2 x}$; $\cos x \rightarrow \mathrm{ch}x$; $\mathrm{ch}x \rightarrow \mathrm{th}x$; qui constitue une chaîne sémiotique. La fonction A étant déterminée, la propriété d'homomorphie de A est convenablement vérifiée. Pour la propriété de bijectivité, les étudiants contrairement à ceux du groupe 1 ne raisonnement pas au niveau de la composition des applications mais reviennent à la définition. La technique adoptée par les étudiants s'est avérée non évidente, comme nous l'avons prévu dans notre analyse a priori. Les étudiants se sont heurtés à la fin à un problème de discussion de cas qu'ils n'ont pas trouvé le temps de terminer. L’avantage que constitue la décomposition de A en Moth n’a pu être mis à profit par les étudiants.

c) Analyse de la production 3

$\mathcal{A}$ bijective

$\forall H \in \mathcal{H}, \exists t \in \mathbb{R} \,/\, H = \mathcal{A}(t)$

$\Pi(x) = \mathcal{A}(t) = \Pi(\text{th}\, t)$

$\forall H \in \mathcal{H}, \exists x \in]-1,1[\,/\, H = \Pi(x)$ (déf de $\mathcal{H}$)

or $\text{th} : \mathbb{R} \longrightarrow]-1,1[$
$t \longmapsto \text{th}\, t$ bijective

donc pour $x \in]-1,1[$, $\exists t \in \mathbb{R}$ tq $x = \text{th}\, t$

$\forall H \in \mathcal{H}, \exists t \in \mathbb{R} \,/\, x = \text{th}\, t$ et $H = \Pi(\text{th}\, t)$

$\forall H \in \mathcal{H}, \exists t \in \mathbb{R} \,/\, H = \begin{pmatrix} \text{ch}\, t & \text{sh}\, t \\ \text{sh}\, t & \text{ch}\, t \end{pmatrix} = \mathcal{A}(t)$

donc $\mathcal{A}$ est surjective

$\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}(t') \Rightarrow \begin{cases} \text{ch}\, t = \text{ch}\, t' \\ \text{sh}\, t = \text{sh}\, t' \end{cases} \Rightarrow t = t'$ (sh bijec)

donc $\mathcal{A}$ est injective

$\mathcal{A}$ est inject et surject donc $\mathcal{A}$ est bijéct

$\mathcal{A}$ morphisme bijective donc $\mathcal{A}$ est un isomorphisme du groupe $(\mathbb{R},+)$ vers $(\mathcal{H},\times)$

d'après le théorème de transfert $(\mathcal{H},\times)$ est un groupe isomorphe à $(\mathbb{R},+)$.

Production 3 (Groupe 2)

Analyse

Dans cette troisième production, travaillée en dehors de la séance de classe, les étudiants reprennent le problème de bijectivité de l'application A. Travaillant toujours dans le cadre ensembliste, ils choisissent ici de montrer séparément que A est surjective et injective. Pour la surjectivité, la recherche d'un antécédent t dans **R** pour une matrice H dans $\mathcal{H}$ est ramené dans un premier temps à la recherche d'un réel x de $\left]-1,1\right[$ tel que H=M(x), ce qui découle immédiatement de la définition de l'ensemble $\mathcal{H}$. En utilisant ensuite la bijectivité de la fonction th, les étudiants associent à chaque x de $\left]-1,1\right[$ un t dans **R** tel que x = tht. Le lien est ainsi établi entre H=M(x) de $\mathcal{H}$ et t dans **R** vérifiant H=M(tht)=A(t). La propriété de surjectivité se trouve ainsi correctement démontrée. Pour l'injectivité de A, les étudiants utilisent le fait que la fonction sh est bijective pour déduire que : $A(t)=A(t') \Rightarrow t = t'$.

A la fin, les étudiants récapitulent les résultats établis et donnent la réponse à la question de l'exercice en utilisant le théorème sur le transfert des structures.

Commentaire

La propriété de bijectivité est correctement démontrée par les étudiants. Bien que la technique choisie ne soit pas la plus économique, les étudiants ont réussi à gérer de façon pertinente les difficultés liées à l'usage des ostensifs que requiert la propriété de surjectivité. A la fin, les étudiants ont justifié convenablement que $(\mathcal{H},\times)$ est un groupe isomorphe à (**R**,+).

Conclusion

Dans cette expérimentation, les étudiants ont réussi à adopter une stratégie appropriée pour résoudre l'exercice, à fixer une piste pour concrétiser la stratégie fixée et à se servir de leurs connaissances, notamment dans le domaine de l'analyse, pour effectuer les explorations qu'a nécessitées la recherche de la fonction h. Les connaissances relatives à la notion de bijectivité, que ce soit d'un point de vue analytique ou ensembliste, sont convenablement utilisées, et de même pour la notion d'homomorphie. Les étudiants ont aussi fait preuve d'aptitudes pour organiser et rédiger les démarches accomplies, et pour gérer de façon appropriée les ostensifs dont ils ont fait usage. Toutefois, ils ne sont pas arrivés à exploiter et à mettre en relation de manière complètement efficace les données de l'énoncé. Ainsi, la « paramétrisation » de x n'a été pensée que d'un point de vue ensembliste, ce qui a conduit à une fonction ℓ inexploitable, et la décomposition de A en Moth n'a pas été prise en considération, ce qui a entraîné les difficultés constatées dans la première démonstration de la propriété de bijectivité. Par ailleurs, ces étudiants, comme ceux du premier groupe, ne sont pas arrivés à mettre en évidence spontanément l'intérêt que présentent les formes symboliques des coefficients de M(x) pour la recherche de l'application h.

X. 3. 3. Analyse des productions du groupe 3

a) Analyse de la production 1

$$H = \left\{ M(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix}, \ x \in]-1,1[\right\}$$

$(H, \times)$ isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$:

m.que : $\begin{array}{rcl} M :]-1,1[& \longrightarrow & H \\ x & \longmapsto & M(x) \end{array}$ est un isomorphisme

$x, y \in]-1,1[\ \Rightarrow \ \dfrac{x+y}{1+xy} \in]-1,1[$

donc $x * y = \dfrac{x+y}{1+xy}$ est une L.C.I ds $]-1,1[$

$\cancel{x * 0 = \frac{x+0}{1+0} = x}$

$\cancel{x * (-x) = 0}$

m.que $(]-1,1[, *)$ est un groupe

on sait que $(\mathbb{R}, +)$ groupe $\rightarrow$ on transporte la structure

$(\mathbb{R}, +)$ isomorphe à $(]-1,1[, *)$?

$\begin{array}{rcl} u : \mathbb{R} & \longrightarrow &]-1,1[\\ t & \longmapsto & u(t) \end{array}$

u bij : $u(\mathbb{R}) =]-1,1[$ et $\ker u = \{0\}$

Ceci suppose que l'on ait déjà que $(]-1,1[, *)$ groupe

u morphisme : $u(t+t') = u(t) * u(t')$

$$u(t+t') = \frac{u(t) + u(t')}{1 + u(t) \cdot u(t')} \quad (1)$$

on sait que $\text{th}(a+b) = \dfrac{\text{th}\, a + \text{th}\, b}{1 + \text{th}\, a \ \text{th}\, b}$

th bij ? $\text{th}'(x) = \dfrac{1}{\text{ch}^2 x} > 0$

th cont et strict $\nearrow$ sur $\mathbb{R}$

$\lim\limits_{-\infty} \text{th}\, x = -1$ et $\lim\limits_{+\infty} \text{th}\, x = +1$

th est donc une bij de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$

et th vérifie (1)

on prend $u = \text{th}$.

Production 1 (Groupe 3)

Analyse

Les étudiants commencent par donner une écriture « en compréhension » de l'ensemble $\mathcal{H}$ et considèrent l'application M qui à tout réel x de $]-1,1[$ associe la matrice M(x) de $\mathcal{H}$. Ils envisagent de montrer que M est un isomorphisme. Pour cela, ils ont besoin de munir au préalable l'intervalle $]-1,1[$ d'une structure de groupe. Ils considèrent alors dans $]-1,1[$ la loi de composition interne définie par :

$x * y = \dfrac{x+y}{1+xy}$. Ce résultat est admis par les étudiants. (Il a fait l'objet d'un exercice dans une séance antérieure de TD)

Pour montrer que $(]-1,1[,*)$ est un groupe, les étudiants envisagent de construire une application *u* de **R** vers $]-1,1[$ et d'utiliser le théorème de transfert pour transporter la structure de groupe de (**R**,+) à $(]-1,1[,*)$. Pour déterminer *u*, ils formulent les propriétés de bijectivité et d'homomorphie qu'elle doit vérifier. La propriété « *u* bijective » est formulée par les conditions : *u*(**R**)=$]-1,1[$ et Ker*u* = {0}. La première traduit la propriété de surjectivité, quant à la deuxième, qui est supposée traduire la propriété d'injectivité, elle n'est pas pertinente dans cette situation. Car elle suppose que les deux ensembles, de départ et d'arrivée de *u*, sont déjà munis de la structure de groupe, ce qui n'est pas le cas ici. Remarquant que l'égalité résultante de la propriété d'homomorphie est sémiotiquement analogue à la formule d'addition de th(a+b), et après avoir vérifié analytiquement que la fonction th est bien une bijection de **R** sur $]-1,1[$. Les étudiants choisissent alors pour *u* la fonction th.

Commentaire

L'objectif des étudiants dans cette première production est de montrer que l'application M est un isomorphisme de groupes. L'originalité de leur démarche est que pour montrer que $(]-1,1[,*)$ est un groupe, ils ont anticipé sur la stratégie qu'ils envisagent d'utiliser pour répondre à la question de l'exercice (c'est à dire montrer que $(\mathcal{H},\times)$ est un groupe isomorphe à (**R**,+)) et ont choisi de construire un isomorphisme *u* de (**R**,+) vers $(]-1,1[,*)$ (de cette façon, il ne leur restera après que de composer *u* avec M). Pour obtenir l'application *u*, les étudiants ont réussi à donner sens à l'écriture sémiotique résultante de la propriété d'homomorphie de *u* pour obtenir une solution possible pour *u*.

b) Analyse de la production 2

$th : \mathbb{R} \longrightarrow]-1,1[$

th est un isomorphisme de $(\mathbb{R},+)$ vers $(]-1,1[,*)$

donc th transporte la structure de groupe de $(\mathbb{R},+)$ vers $(]-1,1[,*)$

$(]-1,1\ *)$ est donc un gpe isomorphe à $(\mathbb{R},+)$

$M :]-1,1[\longrightarrow H$ isomorphisme :

$x, x' \in]-1,1[$

$$M(x) = M(x') \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \\ \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-x'^2}} & \frac{x'}{\sqrt{1-x'^2}} \\ \frac{x'}{\sqrt{1-x'^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-x'^2}} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x'^2}} \\ \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x'}{\sqrt{1-x'^2}} \end{cases} \Leftrightarrow x = x'$$

(1)

donc M est injective

soit $M_1 \in H$, $\exists x \in]-1,1[$ / $M_1 = M(x)$ (déf de H)

donc M est surjective (2)

(1) et (2) $\Rightarrow$ M est bijective.

M est un morphisme

m. que M est un morphisme

$$M(x)M(y) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & y \\ y & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}} \begin{pmatrix} 1+xy & x+y \\ x+y & 1+xy \end{pmatrix}$$

Production 2 (Groupe 3)

$$M(x)M(y) = \frac{xy+1}{\sqrt{1-y^2-x^2+(xy)^2}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{x+y}{xy+1} \\ \frac{x+y}{xy+1} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{comme } xy > 1$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{1-y^2-x^2+(xy)^2}{(1+xy)^2}}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{x+y}{1+xy} \\ \frac{x+y}{1+xy} & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2+y^2+2xy}{(xy+1)^2}}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{x+y}{1+xy} \\ \frac{x+y}{1+xy} & 1 \end{pmatrix}$$

$$= M\left(\frac{x+y}{1+xy}\right) = M(x*y)$$

M est un morphisme bijectif de $(]-1,1[,*)$ vers $(H,\times)$

M est donc un isomorphisme de $(\mathbb{R},+)$ vers $(]-1,1[,*)$

et th est un isomorphisme

$\mathbb{R} \xrightarrow{th}]-1,1[\xrightarrow{M} H$ de $(\mathbb{R},+)$ vers $(H,\times)$

Moth est donc un isomorphisme

$(H,\times)$ est donc un groupe isomorphe à $(\mathbb{R},+)$

Suite de la production 2 (Groupe 3)

Analyse

Utilisant la fonction th, les étudiants justifient, via le théorème de transfert, que $(]-1,1[,*)$ est un groupe isomorphe à $(\mathbf{R},+)$. Ils envisagent ensuite de montrer que l'application M, construite au début, est un isomorphisme de $(]-1,1[,*)$ sur $(\mathcal{H},\times)$. Pour la propriété de bijectivité, ils montrent convenablement, en utilisant les définitions ensemblistes, que M est injective et surjective. Ils justifient aussi soigneusement que M est un morphisme. Pour terminer leur travail, ils donnent un schéma de composition récapitulant les résultats qu'ils ont établi et, utilisant l'isomorphisme Moth, ils concluent que $(\mathcal{H},\times)$ et $(\mathbf{R},+)$ sont des groupes isomorphes.

Commentaire

Comme nous l'avons remarqué précédemment, les étudiants ont exploité de façon pertinente les résultats établis dans la première production pour terminer la résolution du problème. Ainsi, l'isomorphisme th leur a permis de transporter la structure de groupe de (**R**,+) vers $(]-1,1[,*)$ et ils ont ensuite établi convenablement l'isomorphisme entre $(]-1,1[,*)$ et $(\mathcal{H},\times)$. Nous notons à ce propos le soin avec lequel la propriété de bijectivité de M (travaillée dans le cadre ensembliste en séparant les propriétés d'injectivité et de surjectivité) est démontrée et la pertinence avec laquelle est mené le calcul concernant la propriété d'homomorphie de M. Enfin, en récapitulant les résultats préalablement établis, les étudiants ne semblent trouver aucune difficulté pour conclure.

Conclusion

Les étudiants de ce groupe ont réussi à surmonter avec pertinence les deux difficultés heuristiques du problème, a savoir, le choix d'une piste de travail et l'identification de l'application u par l'exploitation des formes sémiotiques des symboles disponibles. Ceci fait preuve de bonnes aptitudes à exploiter les données de l'énoncé, à établir les liens favorables entre ces données et à enrichir le milieu avec de nouvelles données en établissant des connexions favorables avec des résultats établis antérieurement. D'un autre côté, la solution donnée est convenablement organisée et soigneusement rédigée et les sous-tâches qu'a nécessité le développement de cette solution sont rigoureusement justifiées. Par ailleurs, par rapport aux autres groupes, cette solution est d'une plus grande exigence intellectuelle, les étudiants travaillent au niveau des compositions de morphismes, ce qui les oblige à se poser la question de mettre une structure de groupe sur]-1 1[et de définir la loi $*$.

X. 4. Conclusion pour la deuxième séance de remédiation

Dans cette deuxième séance, les étudiants des trois groupes ont fait preuve d'aptitudes d'exploration et de contrôle. Ceci apparaît dans la mise en évidence de la nécessité de construire une application auxiliaire pour obtenir l'isomorphisme visé, l'identification de contraintes pouvant aider à la recherche de cette application auxiliaire (bien que ces contraintes ne soient pas totalement suffisantes pour les groupes 1 et 2), la mobilisation de connaissances dans différents registres de travail (algébrique, graphique, analytique), et la possibilité de contrôler les résultats intermédiaires pour aboutir progressivement au résultat final.

Pour les groupes 1 et 2, bien que nous enregistrions un progrès au niveau du contrôle des démarches mises en œuvre par rapport à la première séance (où nous avions été contraints d'intervenir sur des détails techniques de leurs productions), de la rigueur dans l'utilisation des connaissances d'Algèbre et d'Analyse lors de la recherche de l'application auxiliaire, comme au niveau de la gestion des ostensifs dont ils ont fait usage et du jeu inter-registres que leur travail a nécessité, nous notons des limites dans l'exploitation des potentialités qu'offre le milieu. Ceci apparaît surtout dans les stratégies de départ, où les étudiants des deux groupes se sont limités à travailler au niveau de la composition des applications (et non des homomorphismes), mais aussi dans les difficultés constatées pour exploiter spontanément les formes symboliques des coefficients de la matrice M(x), ce qui a abouti à une situation de blocage de laquelle ils n'ont pas réussi à se sortir qu'après avoir été orientés vers cette piste de travail.

Les étudiants du groupe 3, en travaillant dés le départ au niveau des compositions de morphismes ont réussi à enrichir le milieu avec des données antérieurement établies et à établir des connexions favorables entre ces données et celles du problème, ce qui leur a permis d'exploiter adéquatement les formes sémiotiques des symboles disponibles. En cela, ils ont fait preuve d'aptitudes meilleures que celles des étudiants des deux autres groupes.

Par ailleurs, comme dans la première séance, les productions fournies par les trois groupes à l'issue de cette expérimentation ont été rédigées de façon conforme et font preuve d'une organisation logique des raisonnements produits.

XI. Troisième séance. Remédiation et évaluation

XI. 1. Exercice proposé. Analyse a priori

Exercice

$\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre n $(n \geq 2)$ à coefficients réels.
Nous notons $(E_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ [88] la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et nous rappelons que pour tout i,j, k et l dans $\{1,\ldots,n\}$, $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$
Les deux questions de l'exercice sont indépendantes.
1) Soit f une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ vérifiant : pour tout A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, f(AB)=f(BA). Montrer que f est proportionnelle à la trace.
2) Montrer que pour tout φ dans le dual de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, il existe une unique matrice A dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que : $\forall\ M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $\varphi(M) = \mathrm{tr}(AM)$, où tr désigne l'application trace.

XI. 1. 1. Contexte d'enseignement et objectif

Les principaux thèmes qui sont en jeu dans cet exercice concernent les notions de matrice carrée d'ordre n, d'espace dual d'un espace vectoriel de dimension finie et d'application linéaire. Ces notions sont considérées comme des notions clés du programme d'Algèbre des classes préparatoires MP. De ce fait, elles ont été souvent travaillées et revues dans plusieurs chapitres en lien avec ces notions. Concernant la notion d'espace dual, les étudiants connaissent particulièrement le théorème selon lequel : *Tout hyperplan H d'un K-e.v E de dimension finie, est le noyau d'une forme linéaire non nulle h, unique à un facteur scalaire non nul prés.* Ce théorème a aussi fait l'objet du premier test diagnostic de l'ingénierie. La

[88] E_{ij} est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont le $(i,j)^{\text{ème}}$ coefficient vaut 1 et tous les autres sont nuls

base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, définie dans le cours, a été utilisée à plusieurs reprises, aussi bien dans des démonstrations du cours que dans des exercices de travaux dirigés. Il nous semble toutefois que sa mise en œuvre dans la résolution des exercices, et surtout l'usage du calcul indiciel qui lui est associé restent toujours problématique pour beaucoup d'étudiants.

Notre objectif à travers cet exercice est de consolider les acquis éventuels des étudiants concernant les composantes pratiques utilisées dans les deux premières expérimentations, d'évaluer ces acquis et par là de nous donner un moyen pour valider notre hypothèse. Pour cela, tout en se plaçant dans une situation différente de celles des exercices des deux premières expérimentations, cet exercice est choisi de façon à ce qu'il permette un retour sur les principales pratiques de résolution rencontrées dans les séances antérieures.

Le choix d'une stratégie de résolution pour chacune des deux questions de l'exercice se trouve ainsi étroitement lié aux propriétés spécifiques du domaine d'algèbre linéaire où se situe l'exercice ; la détermination des tâches associées aux stratégies fixées dépend du domaine, ensembliste ou algèbre linéaire, dans lequel le sujet choisit de travailler et la réalisation de certaines techniques est liée à la possibilité de donner sens à l'outil sémiotique que représente l'arrangement des indices dans les relations $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$. D'un autre côté, pour surmonter des difficultés éventuelles de résolution, le traitement de l'une ou l'autre des deux questions dans un cas particulier où la dimension est fixée (2 ou 3 par exemple) pourrait s'avérer utile pour le traitement du cas général. Nous expliciterons avec plus de détail ces points dans l'analyse praxéologique qui suit.

XI. 1. 2. Analyse praxéologique

Les questions de l'exercice étant indépendantes, nous donnons une analyse séparée pour chacune des deux questions.

Première question

Il s'agit de montrer que si f est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ vérifiant f(AB)=f(BA) pour tout A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, il existe un réel k tel que f = k.tr, où tr désigne l'application trace.

L'objectif est donc de trouver le réel k, ou du moins de prouver son existence. Nous commençons par donner une première solution possible au problème que nous qualifions d'économique.

$\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ étant de dimension finie, toute propriété de f sera établie dés qu'elle est obtenue sur une base de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On détermine alors les valeurs que peut prendre f sur les éléments de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$:

$\forall(i, j) \in \{1,...,n\}^2$, $i \neq j$, $f(E_{ij}) = f(E_{ij}E_{jj}) = f(E_{jj}E_{ij}) = f(O_n) = 0$ (où O_n désigne la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$).

Et $\forall(i, j) \in \{1,...,n\}^2$, $f(E_{ii}) = f(E_{ij}E_{ji}) = f(E_{ji}E_{ij}) = f(E_{jj})$.

Si k est la valeur commune de f sur les matrices E_{ii}, alors pour toute matrice $M = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $f(M) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.k = k.trM$. On a ainsi montré que f est proportionnelle à la trace.

Cette solution présente, à notre avis, au moins deux difficultés : la première concerne la piste de départ, qui demande une disponibilité de la propriété selon laquelle une application linéaire est entièrement déterminée par la donnée de l'image d'une base de l'espace de départ, et la deuxième concerne la mise en évidence du problème intermédiaire relatif au rôle de l'égalité $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$ dans la détermination de la propriété visée.

D'autres pistes de travail sont envisageables. Ainsi, pour établir la propriété de f, le sujet pourrait ne pas considérer la propriété de linéarité de f et chercher à déterminer f d'un point de vue ensembliste. Autrement dit, il cherche à calculer l'image par f d'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ en fonction de son image par la fonction trace. Avec cette méthode, le sujet doit choisir entre une écriture de M dans la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, une écriture dans le registre symbolique non-intrinsèque (c'est-à-dire une écriture sous forme de tableau) et une écriture condensée (suite de coefficients). Avec la première écriture, le sujet pourrait se ramener à la méthode de résolution indiquée ci-dessus. Avec les deux autres écritures, le lien entre la propriété à déterminer et la relation $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$, devient plus difficile à apercevoir et le travail pourrait conduire à un blocage. Pour surmonter cette difficulté, le sujet pourrait envisager d'étudier le problème sur des matrices de dimensions n fixées ou sur des matrices particulières. Dans tous les cas, pour pouvoir exploiter la relation $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$, l'écriture sur la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ (pour n quelconque ou n fixé) des matrices mises en jeu est nécessaire. Ensuite, pour mettre en évidence le rôle de l'égalité $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$ dans la détermination de la propriété à démontrer, un travail préliminaire dans des cas particuliers de n pourrait être utile.

Diverses pistes sont ainsi envisageables pour aborder cette première question, induisant des méthodes de résolution différentes. Les principales difficultés que pourrait, à notre avis, rencontrer l'étudiant pour résoudre le problème se présentent au niveau du choix de la stratégie de résolution, à laquelle l'énoncé ne fait aucune allusion, au niveau de la mise en évidence du problème intermédiaire relatif au rôle de l'égalité $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$ dans la détermination de la propriété visée, ainsi qu'au niveau du choix et de la mise en œuvre des techniques appropriées pour travailler la stratégie fixée. Ceci permet de considérer l'organisation mathématique relative à cette première question comme une OM *r-convoquée*.

Nous déterminons ci-dessous les éléments caractéristiques de l'organisation mathématique OM_1 associée à une solution économique de la question. Dans l'organigramme qui suit, nous présentons les interconnexions possibles de cette méthode de résolution avec d'autres stratégies de travail.

Organisation OM_1= (T_1, τ_1, θ_1, Θ_1)

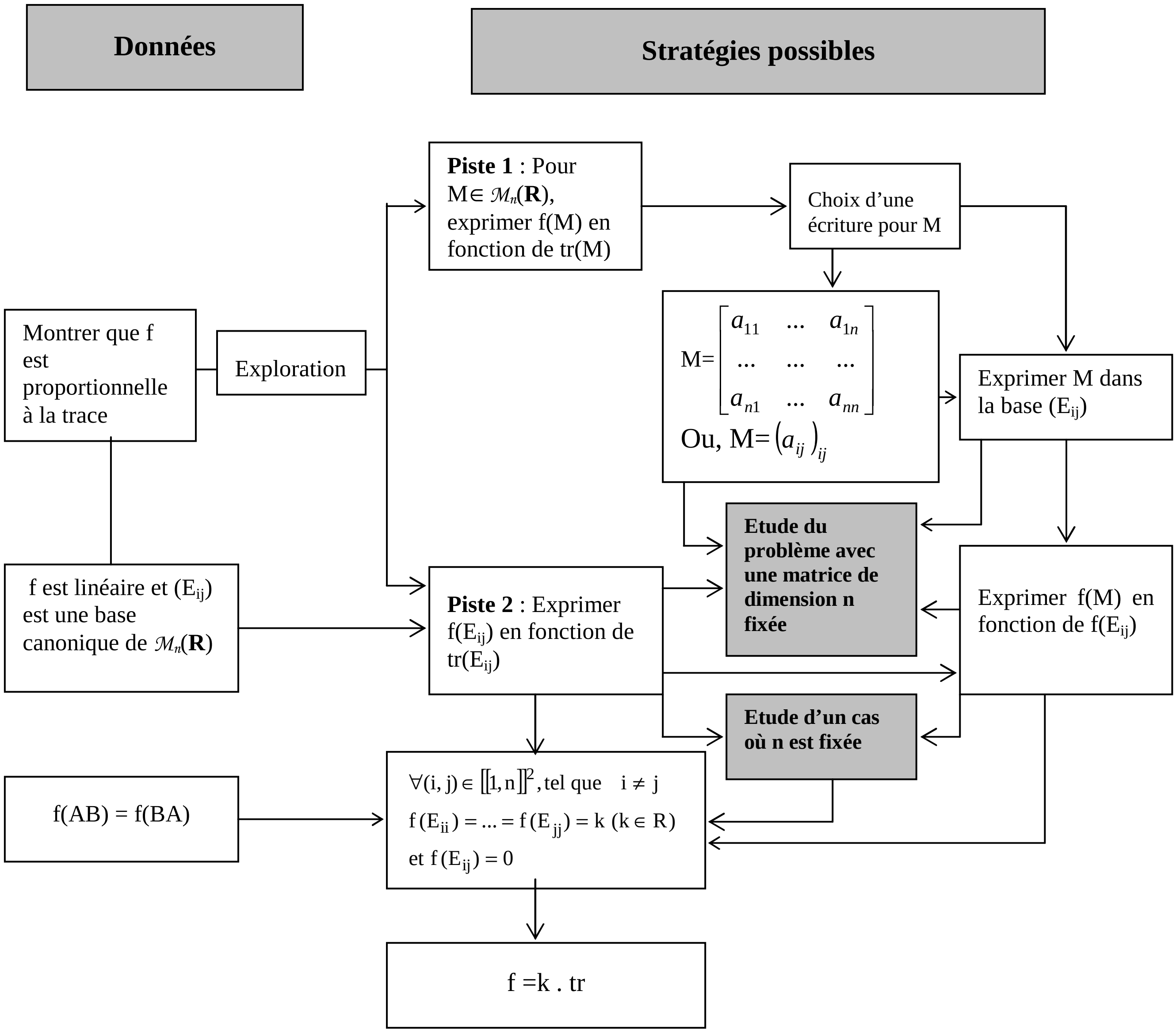
T_1 : Exprimer une application linéaire f à l'aide d'une application linéaire usuelle donnée.

τ_1 : Exprimer l'image par f de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ en fonction de son image par l'application usuelle donnée

θ_1 : **Théorème** : Soit E un **K**-e.v de dimension finie n muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots , e_n)$ et F un K-e.v quelconque.

Pour toute famille $(y_1, \dots , y_n)$ de n éléments de F, il existe une application linéaire f de E dans F, et une seule, telle que : $f(e_1) = y_1, \dots , f(e_n) = y_n$

Θ_1 : Théorie des espaces vectoriels et applications linéaires



Organigramme 10

Deuxième question

Cette question demande de montrer que pour toute forme linéaire φ sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, il existe une matrice A unique dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que : $\forall$ M∈ $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $\varphi(M) = tr(AM)$.

Autrement dit, il s'agit de montrer qu'à toute forme linéaire φ sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est associée une matrice unique A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $\varphi = tr_A$, où tr_A est la forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ définie par : $tr_A(M) = tr(AM)$.

Comme pour la première question, nous commençons par donner une première solution « économique » au problème.

Si on note $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})^*$ le dual de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, et on considère l'application Ψ définie par :

$$\begin{array}{llll}\Psi : \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbf{R})^* & \\ \quad A & \longrightarrow & \Psi(A) : \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & & \qquad M \longrightarrow & \Psi(A)M = tr_A(M) = tr(AM)\end{array}$$

Alors, la question posée revient à montrer que l'application Ψ est bijective. En remarquant que Ψ est une application linéaire (ceci découle de la linéarité de l'application trace) entre deux espaces vectoriels de même dimension finie, il suffit alors de montrer que Ψ est injective, c'est-à-dire que son noyau est le sous-espace nul.

Soit alors $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, telle que $\Psi(A)$ soit nulle. Pour tout M dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $\Psi(A)M = tr(AM) = 0$. En particulier, pour tout $(k,l) \in \{1,...,n\}^2$, on a :

$$tr(AE_{kl}) = tr[(\sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}E_{ij})E_{kl}] = tr[\sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}E_{ij}E_{kl}] = tr(\sum_{1\le i\le n} a_{ik}E_{il}) = a_{lk} = 0$$

On en déduit que la matrice A est nulle et par suite que $Ker \Psi = \{O_n\}$

Ψ est donc bijective et le résultat en découle.

Remarquons que $tr(AE_{kl})$ peut aussi être obtenue par le calcul des coefficients de la diagonale de AE_{kl}. En effet, en écrivant les tableaux représentant les matrices A et E_{kl}, et en effectuant le produit de la ligne i de A par la colonne i de E_{kl} , pour $i \in \{1,...,n\}$, on trouve que tous les produits sont nuls sauf celui qui correspond à i = l et qui donne a_{lk}. Cette technique semble plus accessible aux étudiants.

Les principales difficultés que présente cette méthode de résolution se situent au niveau de la reformulation de la question en terme de bijectivité, de l'étude de cette bijectivité et au niveau de la manipulation de l'application paramétrique tr_A. Rappelons que l'usage des expressions paramétriques (désignant une application, un ensemble, une équation…) s'est avéré problématique dans le test d'évaluation pour la première population d'étudiants.

Pour l'étude de la propriété de bijectivité, en plus de la technique que nous venons de présenter, et qui requiert l'exploitation du contexte d'algèbre linéaire de l'exercice et une mise en relation appropriée des données de l'énoncé, d'autres techniques sont aussi possibles, comme par exemple, démontrer que ψ est bijective d'un point de vue ensembliste, en cherchant à associer une matrice A (par la donnée de ses coefficients) à toute forme linéaire φ de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})^*$. Dans ce cas, φ pourrait être donnée par l'intermédiaire de l'image de la base canonique (E_{ij}) et les coefficients de A seraient alors calculés en fonction des images des vecteurs de cette base. Pour l'un ou l'autre des deux cadres de travail (d'algèbre linéaire ou ensembliste), il est aussi possible de démontrer séparément que ψ est injective et surjective. Nous explicitons ci-dessous la démonstration de la bijectivité dans le cadre ensembliste.

Soit φ dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})^*$, φ est définie par la donnée de $\varphi(E_{ij})$ pour tout $(i, j) \in [[1, n]]^2$. On cherche une matrice $A = (a_{ij})_{1 \le i, j \le n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ tel que $\psi(A) = \varphi$.

$$\psi(A) = \varphi \Leftrightarrow \psi(A).M = \varphi(M), \ \forall M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{tr}(AM) = \varphi(M), \ \forall M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \qquad \mathbf{(1)}$$

En posant $AM = (c_{ij})$, où $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} m_{kj}$, la condition (1) s'écrit :

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum m_{ij} \varphi(E_{ij}) \qquad \forall M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik} m_{ki} \right] = \sum m_{ij} \varphi(E_{ij}) \qquad \forall M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$$

Cette dernière égalité étant vérifiée pour tout m_{ij} dans **R**, l'identification dans les deux membres de l'égalité, des coefficients de m_{ij} donne : $a_{ij} = \varphi(E_{ji})$ pour tout $(i, j) \in [[1, n]]^2$. La matrice A est ainsi déterminée et son unicité découle de la donnée de $\varphi(E_{ji})$ qui détermine l'application φ.

Pour un sujet qui ne remarque pas l'unicité de la matrice A, il serait contraint de démontrer que ψ est injective. Pour cela, partant de l'égalité $\psi(A) = \psi(B)$, pour A et B des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, et en appliquant cette égalité à une matrice M quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on se retrouve avec l'égalité tr(AM) = tr(BM). Via l'écriture de cette égalité en utilisant les coefficients des matrices en jeu, et après identification comme pour le cas de la surjectivité, on obtient que A = B.

Ce travail dans le cadre ensembliste, en plus de la définition de la bijectivité (ou de la surjectivité et injectivité), demande la connaissance de l'expression du produit de deux matrices carrées de dimension n, un travail attentif sur les indices, et la technique d'identification des coefficients de deux polynômes à plusieurs variables réelles. La mise en œuvre de cette technique requiert en outre du sujet un changement de point de vue concernant le statut des coefficients de la matrice M, qui, dans l'égalité tr(AM) = tr(BM) écrite en termes de coefficients, prennent le statut de variables, usuellement désignées par x, y, z … Ce changement de point de vue ne semble pas trivial pour les étudiants compte tenu de la variété des désignations que renferme l'égalité en question.

Un travail préliminaire dans le cas où la dimension n est égale à 2 ou 3, pourrait clarifier la manière avec laquelle il faut gérer les difficultés qui peuvent apparaître dans le cas général.

Ceci étant, la question 2 pourrait aussi être résolue d'une manière directe sans passer par la reformulation en terme de bijectivité. Il s'agit dans ce cas de trouver une matrice unique A vérifiant $\varphi(M) = tr(AM)$ pour tout M dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, lorsque φ est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ donnée. Ce travail rejoint en (1) la démonstration de la bijectivité explicitée ci-dessus.

Pour cette stratégie directe, le sujet serait amené à manipuler des équations avec paramètre. Là aussi, le recours à l'étude d'un cas où n prend une valeur fixée pourrait permettre de résoudre certaines difficultés que le sujet pourrait rencontrer dans le cas général.

Nous déterminons ci-dessous les éléments caractéristiques de l'organisation mathématique OM_2 associée à la solution économique de la question. Dans l'organigramme qui suit, nous présentons les interconnexions possibles de cette méthode de résolution avec les autres stratégies de travail que nous venons d'indiquer.

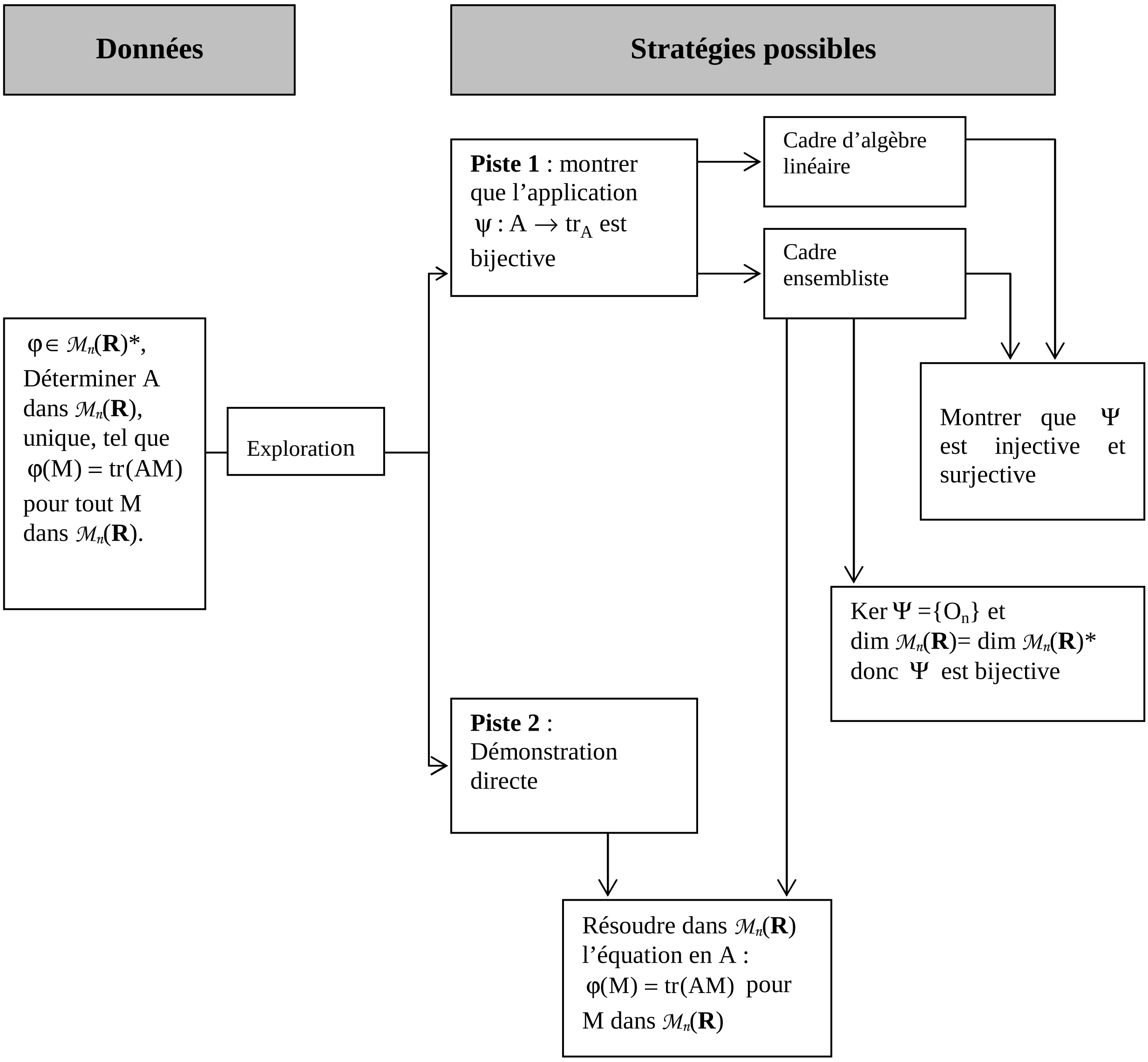
Organisation OM_2= (T_2, τ_2, θ_2, Θ_2)

T_2 : Associer à toute forme linéaire φ sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice unique A, de manière à ce que $\varphi = tr_A$.

τ_2 : Montrer que l'application $\psi : A \rightarrow tr_A$ est bijective

θ_2 : Définition ensembliste de la bijectivité

Θ_2 : Théorie des ensembles



Organigramme 11

Conclusion

L'analyse a priori que nous venons d'effectuer montre les différentes stratégies possibles pour résoudre chacune des deux questions de l'exercice. La variété des techniques avec lesquelles peuvent être réalisées les différentes tâches associées à ces stratégies, les types de difficultés qui peuvent se poser lors du choix d'une stratégie de travail ou pendant la réalisation d'une technique donnée, et les manières disponibles pour surmonter ces difficultés, permettent de considérer l'exercice comme un moyen pour évaluer les acquis des étudiants à la fin de cette ingénierie.

XI. 2. Déroulement de l'expérimentation

Compte tenu des objectifs que nous avons fixés pour cette dernière séance de l'ingénierie, en l'occurrence évaluer les progrès éventuels des étudiants et vérifier notre hypothèse de travail, nous avons choisi de nous abstenir de toute intervention concernant la résolution de l'exercice et d'accorder aux étudiants tout le temps nécessaire pour finir leur travail en toute autonomie. Du côté des groupes d'étudiants, nous signalons l'absence des étudiants E_4 du groupe 1 et E_{12} du groupe 3, ce qui donne la répartition suivante des trois groupes :

Etudiant	E_2		E_5	E_6	E_7	E_8	E_9	E_{11}	E_{10}	
Groupes	**Groupe 1**				**Groupe 2**			**Groupe 3**		

Notons par ailleurs que les groupes 1 et 2 ont remis les copies de leurs travaux 110 minutes après le début de la séance, et le groupe 3 après 95 minutes.

XI. 3. Analyse des productions des étudiants

XI. 3. 1. Analyse des productions du groupe 1

a) Analyse de la réponse à la question 1

1)

$$f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$A \longmapsto f(A)$$

$$f(AB) = f(BA)$$

$$tr : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & Y \\ & \ddots & \\ X & & a_{nn} \end{pmatrix} \longmapsto tr\,A = \sum_{i=}^{n} a_{ii}$$

$$f(A) = k \cdot \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \quad ?$$

$$f(AB) = f(BA) \Rightarrow f(AB - BA) = 0_n$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \\ \vdots & 1 & 1 \end{pmatrix} . \quad a_{ij} = 1 \quad \forall\, i\, j$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & & 2 \\ & \ddots & \\ 2 & & 2 \end{pmatrix} \quad b_{ij} = 2 \quad \forall\, i\, j$$

$$\cancel{AB = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & \cdots & 2 \\ 1 & \ddots & \vdots \\ 2 & \cdots & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2n & & 2n \\ 2n & & 2n \end{pmatrix}}$$

$$\cancel{BA = \begin{pmatrix} 2 & & 2 \\ 2 & & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & 1 \\ 1 & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2n & & 2n \\ 2n & & 2n \end{pmatrix}}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad BA = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$tr\,(AB) = tr\,(BA) = 6.$$

Réponse question 1, page 1
(Groupe 1)

$\cancel{AB - BA = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

$\operatorname{tr} A = 3 \qquad \operatorname{tr} B = 1$

$f(A) = 3k \qquad f(B) = k$

$f(AB) = 6k \qquad f(BA) = 6k.$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot E_{11} + 3 \cdot E_{12} - 1 \cdot E_{21} + 2 E_{22}$

$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot E_{11} - 1 \cdot E_{12} + 1 \cdot E_{21} + 1 \cdot E_{22}.$

$f(A) = 1 \cdot f(E_{11}) + 3 f(E_{12}) - 1 f(E_{21}) + 2 f(E_{22})$

$f(B) = 0 f(E_{11}) \cancel{+} - 1 \cdot f(E_{12}) + 1 \cdot f(E_{21}) + 1 \cdot f(E_{22})$

$f(A) = k \operatorname{tr} A = 3k$

$\cancel{f} \; M = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} \qquad f(M) = k(x+t).$

$f(M) = x f(E_{11}) + t f(E_{22}) + y f(E_{21}) + z f(E_{12})$

$= x \cdot k + t \cdot k + y \cdot 0 + z \cdot 0$

$(x+t)k = (x+t)k.$

$f(E_{11}) = f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = k \operatorname{tr}(E_{11}) = k$

$f(E_{22}) = \cancel{k} f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = k \operatorname{tr}(E_{22}) = k$

$f(E_{12}) = f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = k \operatorname{tr}(E_{12}) = 0$

$f(E_{21}) = f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = k \operatorname{tr}(E_{21}) = 0.$

Réponse question 1, page 2
(Groupe 1)

$$M = \begin{pmatrix} a & x' & y' \\ x & b & z' \\ y & z & c \end{pmatrix}$$

$$M = a E_{11} + b E_{22} + c E_{33} + x E_{21} + y E_{31} + z E_{32} + x' E_{12} + y' E_{13} + z' E_{23}$$

$$f(M) = k(a+b+c) = a f(E_{11}) + b f(E_{22}) + c f(E_{33})$$

$$\Rightarrow k = f(E_{11}) = f(E_{22}) = f(E_{33}).$$

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{22} & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} E_{ii} + \sum_{i \neq j} a_{ij} E_{ij}$$

$$f(M) = k\, tr(M) = k \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

$$f(M) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} f(E_{ii}) + \sum_{i \neq j} a_{ij} f(E_{ij}).$$

$f(E_{ii}) = k$ et $f(E_{ij}) = 0$ si $i \neq j$

$$E_{ij} E_{kl} = \delta_{jk} E_{il}$$

$$f(E_{11}) = f(E_{22}) = \cdots = f(E_{nn})$$

$$\cancel{E_{11} = E_{1j} E_{j1} = \delta_{22} E_{22}}.$$

$$E_{21} E_{12} = \delta_{11} E_{22} = E_{22}$$

$$E_{12} E_{21} = \delta_{22} E_{11} = E_{11}.$$

$$f(AB) = f(BA) \Rightarrow f(E_{21} E_{12}) = f(E_{12} E_{21})$$

$$\Rightarrow f(E_{22}) = f(E_{11}).$$

Réponse question 1, page 3
(Groupe 1)

de même on obtient

$f(E_{22}) = f(E_{33})$ et $f(E_{33}) = f(E_{44}) \ldots = f(E_{nn})$

si $i \neq j$

$E_{ij} = \delta_{kk} E_{ij} = E_{ik} E_{kj}$

$f(E_{ij}) = f(E_{ik} E_{kj}) = f(E_{kj} E_{ik})$

$= f(\delta_{ij} E_{kk}) = f(0) = 0$

donc $f(M) = f(E_{ii}) \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = k\,\mathrm{tr}A.$

Réponse question 1, page 4
(Groupe 1)

Analyse

Les étudiants commencent par préciser les éléments qui définissent les applications f et tr (ensemble de départ, ensemble d’arrivée, image d’un élément), indiquent la condition sur f et donnent une écriture symbolique à la question. Ils entament la résolution de la question par la donnée d’une écriture équivalente (bien qu’ils utilisent le symbole d’implication) de la condition f(AB)=f(BA). Ils choisissent ensuite deux matrices particulières de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, une matrice A dont tous les coefficients sont égaux à 1 et une matrice B dont tous les coefficients sont égaux à 2. Ce choix leur permet de calculer facilement les produits AB et BA. Cette piste de travail est abandonnée, peut-être car les étudiants ont constaté qu’elle ne pourrait être utile du moment que leur choix de A et B donne AB=BA. Ils choisissent après deux autres matrices particulières A et B qui ne commutent pas, en travaillant cette fois-ci sur des matrices carrés d’ordre 2. Ils calculent AB-BA qu’ils rayent, calculent tr(AB), tr(BA), tr(A), tr(B) et utilisent la relation entre f et tr donnée au début pour calculer f(A), f(B), f(AB) et f(BA). Les étudiants semblent dans ce travail chercher à calculer la valeur de k en travaillant sur les matrices particulières choisies. N’ayant pas l’expression de f, leurs tentatives n’aboutissent pas, mais elles ne mettent pas non plus en évidence d’impossibilité. On a bien f(AB)=f(BA)=6k, ce qui est normal. En gardant les matrices A et B choisies précédemment dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$, ils changent alors de technique en écrivant celles-ci dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ et déduisent alors les expressions de f(A) et f(B) en fonction des images par f des éléments de cette base. Constatant peut être que ce calcul ne leur permet pas d’avancer, ils choisissent une matrice M de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ quelconque et expriment f(M) en utilisant une première fois les images des matrices de la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ et une deuxième fois l’expression k.tr(M). Ils calculent ensuite à l’aide de cette expression les images $f(E_{ij})$ et sans doute se rendent compte que, pour tout i, $f(E_{ii}) = k$ et pour tous i et j distincts, $f(E_{ij}) = 0$. Ils refont ensuite un travail analogue en utilisant une matrice quelconque dans $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$. Utilisant le fait que tr(E_{ij}) est nul pour $i \neq j$ et en identifiant f(M) avec k.tr(M), ils concluent abusivement que, $k = f(E_{11}) = f(E_{22}) = f(E_{33})$, sans doute portés par les résultats obtenus en dimension 2. Les étudiants passent ensuite à l'étude du cas général et choisissent une matrice quelconque M dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ qu'ils désignent par un tableau de coefficients et l'expriment en même temps dans la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, en prenant soin de distinguer les termes diagonaux des autres.

La comparaison des écritures $f(M) = k.\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ et $f(M) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} f(E_{ii}) + \sum_{i \neq j} a_{ij} f(E_{ij})$

permet aux étudiants d'écrire les conditions $f(E_{ii}) = k$ et $f(E_{ij}) = 0$, si, $i \neq j$, ce qu'ils envisagent ensuite de démontrer en utilisant la relation générale $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$ donnée dans l'énoncé. Pour chercher comment ils vont se servir de cette relation, les étudiants commencent par traiter les cas particuliers où i et j sont dans l'ensemble {1,2}, puis, en utilisant l'hypothèse f(AB)=f(BA), ils arrivent à montrer que $f(E_{11}) = f(E_{22})$. Sans refaire le calcul pour les autres cas, ils concluent que la même technique permet d'obtenir l'égalité de tous les $f(E_{ii})$, Pour $i \neq j$. Les étudiants montrent ensuite, à l'aide des relations $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$ et f(AB)=f(BA), que $f(E_{ij}) = 0$, et ceci sans passer par l'étude d'un cas particulier. A la fin, les étudiants écrivent la relation $f(M) = k.\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$, en désignant par k la valeur commune des $f(E_{ii})$.

Commentaire

Le travail effectué par les étudiants pour la détermination du coefficient de proportionnalité entre les applications f et tr fait preuve d'une bonne exploration de l'espace de résolution du problème. Cette exploration a concerné deux moments dans la résolution, le premier concerne la recherche, par condition suffisante, de la valeur possible de k. Quant au deuxième, il concerne la manière avec laquelle les étudiants vont pouvoir exploiter la relation $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$ pour trouver k. Pour chercher une valeur possible de k, l'exploration a été faite selon diverses modalités dans le choix des matrices : matrices particulières A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, puis dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$, matrice M quelconque dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$, dans $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ et finalement dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Dans les deux premiers cas, les étudiants ont compris que les exemples choisis ne permettent pas d'avancer, et donc ils ont abandonné cette modalité de travail et ont opté pour un travail sur une matrice M quelconque. Le traitement des cas particuliers de n=2 et n=3, leur a permis de voir que le coefficient de proportionnalité k pourrait correspondre à la valeur commune des $f(E_{ii})$. Remarquons à ce propos que l'implication écrite à ce niveau est erronée, car la condition $k = f(E_{11}) = f(E_{22}) = f(E_{33})$ s'obtient en fait par condition suffisante et non nécessaire. Ensuite, en passant au cas général d'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, les étudiants sont arrivés, de manière analogue aux cas de n=2 et n=3, à écrire les conditions (suffisantes) sur $f(E_{ij})$ pour déterminer la valeur de k. Là aussi, d'un point de vue logique, l'obtention de ces conditions n'est pas écrite de façon claire. Dans un deuxième temps, les étudiants se sont intéressés à démontrer ces conditions en utilisant les relations $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$ et f(AB)=f(BA). Le traitement de cas particuliers pour i et j a permis aux étudiants de voir la manière avec laquelle ils peuvent exploiter ces relations. C'est ce qu'ils ont ensuite effectué de façon appropriée. Par ailleurs, nous remarquons que dans leur travail, les étudiants utilisent toujours le registre symbolique non intrinsèque pour désigner les matrices, et que dans les cas de dimensions 2 et 3, ils évitent d'utiliser des coefficients indexés. Néanmoins, la gestion du calcul indiciel dans le cas de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ a été convenablement effectuée.

b) Analyse de la réponse à la question 2

2) $\forall \varphi \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^* \quad \exists! A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) /$

$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \varphi(M) = tr(AM)$. ?

$\forall \varphi, \forall M \quad \varphi(M) = tr(AM)$

$\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$

$M = (a_{ij}) \longmapsto \varphi(M) = m$.

Posons $A = (\alpha_{ij})$ et $AM = (\beta_{ij})$

$\beta_{ij} = \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} a_{kj}$

$\varphi(M) = tr(AM) \iff \sum_{i=1}^n \beta_{ii} = m$.

$\iff \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \alpha_{ik} a_{ki} \right) = m$.

$M = \sum_{i=1}^n a_{ii} E_{ii} + \sum_{i \neq j} a_{ij} E_{ij}$

$\varphi(M) = tr(AM) \iff \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \alpha_{ik} a_{ki} \right)$

$\varphi(M) = \sum_{i=1}^n a_{ii} \varphi(E_{ii}) + \sum_{i \neq j} a_{ij} \varphi(E_{ij}) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \alpha_{ik} a_{ki} \right)$

$M = I_n \quad \varphi(M) = \sum_{i=1}^n \varphi(E_{ii}) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \alpha_{ik} a_{ki} \right)$

$\varphi(E_{11}) + \dots + \varphi(E_{nn}) = (\alpha_{11} + \alpha_{22} + \dots + \alpha_{nn})$. ?

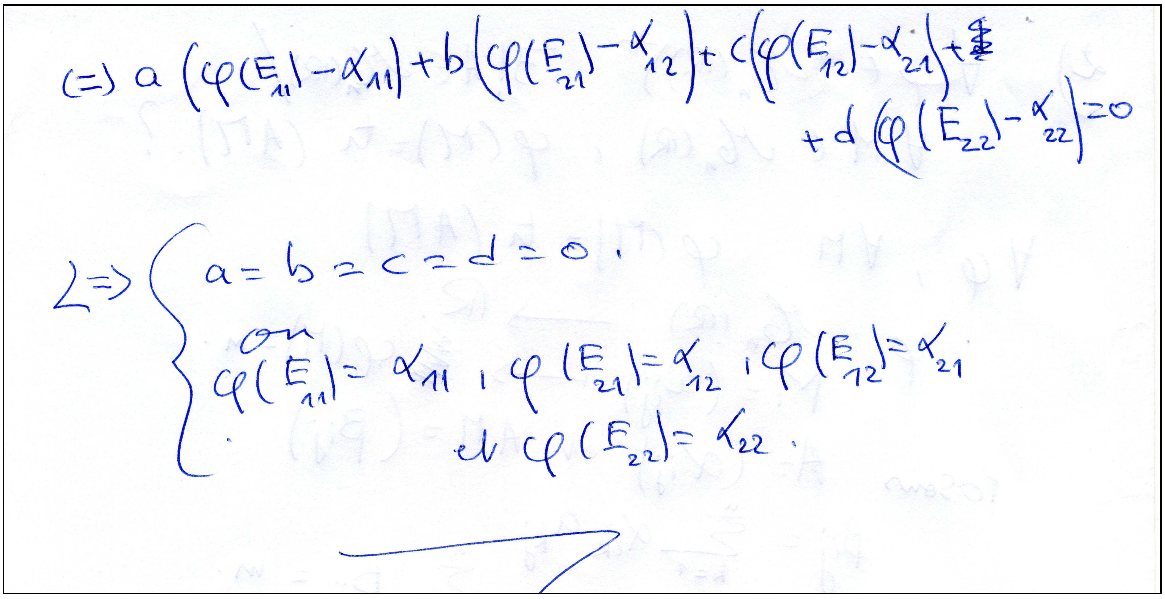
$M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \quad \varphi(M) = a\varphi(E_{11}) + b\varphi(E_{21}) + c\varphi(E_{12}) + d\varphi(E_{22})$

$AM = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha_{11} + b\alpha_{12} & c\alpha_{11} + d\alpha_{12} \\ a\alpha_{21} + b\alpha_{22} & c\alpha_{21} + d\alpha_{22} \end{pmatrix}$.

$\varphi(M) = tr(AM) \iff a\varphi(E_{11}) + b\varphi(E_{21}) + c\varphi(E_{12}) + d\varphi(E_{22})$

$= a\alpha_{11} + b\alpha_{12} + c\alpha_{21} + d\alpha_{22}$.

Réponse question 2, page 1
(Groupe 1)



$$\Leftrightarrow a\left(\varphi(E_{11})-\alpha_{11}\right)+b\left(\varphi(E_{21})-\alpha_{12}\right)+c\left(\varphi(E_{12})-\alpha_{21}\right)+d\left(\varphi(E_{22})-\alpha_{22}\right)=0$$

$$\Leftarrow \begin{cases} a=b=c=d=0. \\ \text{ou} \\ \varphi(E_{11})=\alpha_{11},\ \varphi(E_{21})=\alpha_{12},\ \varphi(E_{12})=\alpha_{21} \\ \quad \text{et } \varphi(E_{22})=\alpha_{22}. \end{cases}$$

Réponse question 2, page 2
(Groupe 1)

Analyse

Les étudiants commencent par écrire une phrase traduisant la question 2 sous une forme symbolique. Ils écrivent en dessous un extrait de cette phrase indiquant la relation qui lie φ, tr, A et M avec les statuts de φ et M. Ils semblent que les étudiants veulent réduire la variété des données écrites dans la première phrase pour qu'ils sachent sur quoi ils doivent se concentrer pour répondre à la question. Ils donnent ensuite une écriture précisant les éléments définissant l'application φ, l'image $\varphi(M)$ est désignée par m, peut être pour indiquer qu'il s'agit d'un réel. En désignant les matrices M, A et AM par les suites de leurs coefficients, ils donnent la relation liant les coefficients de ces trois matrices. L'égalité $\varphi(M)=\mathrm{tr}(AM)$ est alors exprimée par :

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}a_{ki}\right)=m.$$

Voulant exprimer m en fonction de la matrice antécédent M qui lui est associée, les étudiants donnent l'expression de M dans la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ tout en regroupant, comme dans la première question, les termes en (i,i) et les termes en (i,j) avec $i \neq j$.

L'égalité : $\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}a_{ki}\right)=m$, devient alors **(1)** : $\sum_{i=1}^{n}a_{ii}\varphi(E_{ii})+\sum_{i\neq j}a_{ij}\varphi(E_{ij})=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}a_{ki}\right)$

Pour voir comment traiter avec cette égalité, les étudiants essayent avec des cas particuliers de M. Ils remplacent en premier temps M avec la matrice unité I_n. La relation obtenue à partir de (1) ne leur permet d'établir aucun résultat. Ils remplacent en deuxième temps A et M par des matrices carrées d'ordre 2 quelconques et écrivent la relation (1) correspondante.

Remarquons ici que les étudiants, pour calculer tr(AM) dans ce cas particulier, ils ne se sont pas servis de la formule générale :

$$\mathrm{tr}(AM)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}a_{ki}\right)$$

qu'ils ont donnée auparavant, mais qu'ils ont effectué le calcul du produit AM et ils ont en déduit tr(AM), ce qui prouve la difficulté qu'éprouvent les étudiants pour utiliser de telles formules. Les étudiants groupent ensuite dans l'égalité obtenue le deuxième membre avec le premier et obtiennent l'égalité : $a(\varphi(E_{11})-\alpha_{11})+b(\varphi(E_{21})-\alpha_{12})+c(\varphi(E_{12})-\alpha_{21})+d(\varphi(E_{22})-\alpha_{22})=0$. N'ayant pas respecté les statuts des différentes notations intervenant dans cette relation, les étudiants ont fini par donner une équivalence erronée. Leur travail s'est arrêté à cette étape.

Commentaire

Pour répondre à cette deuxième question, les étudiants ont choisi la stratégie de démonstration directe. La formulation symbolique de la question est correcte, l'usage des suites doublement indexées pour désigner les matrices, pour effectuer le produit matriciel et pour calculer la trace d'une matrice est conforme. L'exploration d'une technique pour résoudre l'équation $\varphi(M)=\mathrm{tr}(AM)$, par l'étude de cas particuliers de la matrice M, est aussi pertinente. Nous notons toutefois la non conformité dans l'usage des quantificateurs (universel et existentiel) présents dans la question. A notre avis, la solution erronée donnée à l'équation $\varphi(M)=\mathrm{tr}(AM)$, pourrait provenir de la négligence des quantificateurs lors de la résolution de cette équation, ce qui aurait induit les étudiants dans une confusion concernant les statuts des différents objets en jeu. Elle pourrait être également due à la difficulté de procéder à un changement de point de vue concernant les expressions écrites et à les considérer comme des polynômes de plusieurs variables en a, b, c et d. D'un autre côté, le fait de se limiter dans la résolution au cas particulier d'une matrice M carrée d'ordre 2, pourrait indiquer des difficultés dans la gestion du symbolisme qu'entraîne l'étude du cas général.

Conclusion

Les réponses aux deux questions de l'exercice montrent des aptitudes d'exploration et de recherche pertinente de la part des étudiants. Nous les voyons ainsi s'approprier progressivement les propriétés énoncées, tirer efficacement parti des tentatives qu'ils font pour avancer dans leur travail, maîtriser le jeu entre le particulier et le général et la progression dans les dimensions pour trouver des techniques de travail leur permettant de résoudre les tâches. Nous enregistrons aussi des aptitudes à gérer le calcul matriciel et indiciel, une flexibilité à piloter les différentes représentations matricielles et une sensibilité aux formes d'écritures symboliques, attestée par l'exploitation pertinente de la relation $E_{ij}E_{kl}=\delta_{jk}E_{il}$. Nous notons également le soin de la rédaction et la cohérence des pas de raisonnement produits. Ceci marque des progrès indéniables chez les étudiants à propos de l'activité de résolution de problème par rapport à ce que nous avons constaté dans les tests antérieurs. Toutefois, nous constatons que certaines difficultés persistent encore. Celles-ci se manifestent notamment dans l'usage du symbolisme mathématique lorsqu'il met en jeu des expressions particulièrement complexes (comme les difficultés constatées pour gérer, dans le cas général, les différents symboles que renferme l'équation :

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\varphi(E_{ii}) + \sum_{i\neq j} a_{ij}\varphi(E_{ij}) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}a_{ki}\right)),$$

dans la possibilité de procéder à des changements de points de vue, ainsi que sur le plan de l'adoption de techniques de résolution économiques, comme pour la reformulation de la question 2 en terme de bijectivité et l'exploitation du contexte d'algèbre linéaire pour répondre à cette question.

XI. 3. 1. Analyse des productions du groupe 2

a) Analyse de la réponse à la question 1

question (1)

f forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, $M \longmapsto f(M)$ linéaire

$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad f(AB) = f(BA)$

M. que : $f = \lambda . tr$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad f(M) = \lambda . tr(M)$?

c.à.d : si $M = (\alpha_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ $\quad f(M) = \lambda(\alpha_{11} + \alpha_{22} + \dots + \alpha_{nn})$

on sait que $tr(AB) = tr(BA) \quad \forall A, B$.

si $f = tr \Rightarrow \lambda = 1$.

$M = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \alpha_{ij} . E_{ij} \quad \Rightarrow f(M) = \sum_{i,j} \alpha_{ij} f(E_{ij})$

M. que $f(M) = \lambda \left(\sum_i \alpha_{ii}\right)$ $\quad \lambda = ?$

$\cancel{\lambda = \frac{\sum_{ij} \alpha_{ij} f(E_{ij})}{\sum_i \alpha_{ii}}}$ $\quad \sum_i \alpha_{ii} \neq 0$

$\underline{n = 2}$

$f(M) = \alpha_{11} f(E_{11}) + \alpha_{12} f(E_{12}) + \alpha_{21} f(E_{21}) + \alpha_{22} f(E_{22})$

pour que ~~déterminer~~ $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $f(M) = \lambda(\alpha_{11} + \alpha_{22})$

~~alors~~ : il faut que : $f(E_{11}) = f(E_{22}) = \lambda$ et $f(E_{12}) = f(E_{21}) = 0$

$f(AB) = f(BA)$

et $E_{ij} E_{kl} = \delta_{jk} E_{il}$

$\begin{cases} 0 \text{ si } j \neq k \\ 1 \text{ si } j = k. \end{cases}$

$\cancel{E_{12} E_{21} = \delta_{22} E_{11}}$ $\quad f(E_{12}) = f(0 . E_{..})$

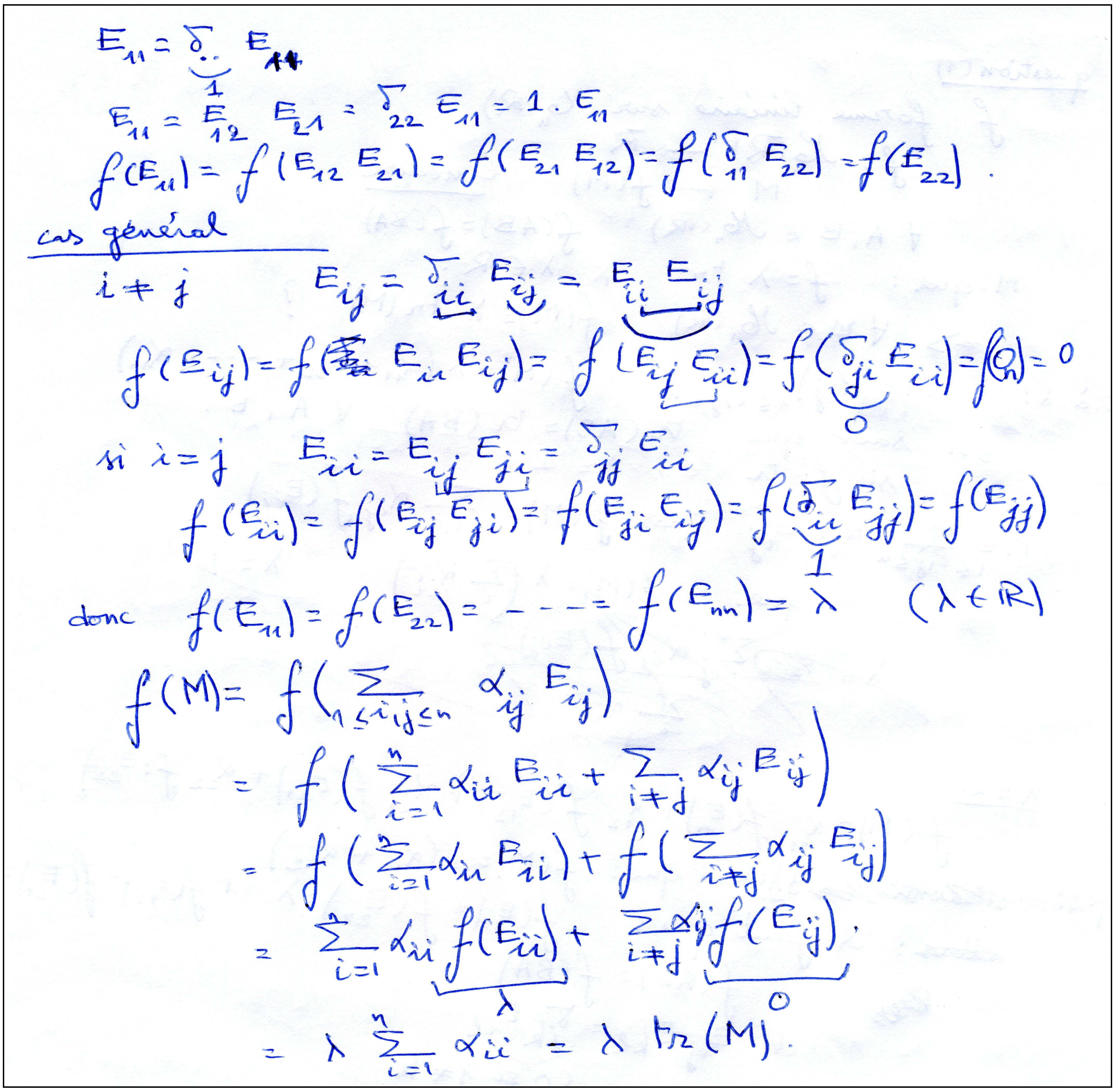
$E_{12} = 1 . E_{12} = \delta_{11} E_{12} = \delta_{22} E_{12}$

$= \underline{E_{11} E_{12}} = E_{12} E_{22}$

$f(E_{12}) = f(E_{11} E_{12}) = f(E_{12} E_{11}) = f(\delta_{21} E_{11}) = f(0 . E_{11}) = 0$

$f(E_{21}) = f(E_{22} E_{21}) = f(E_{21} E_{22}) = f(\underset{0}{\delta_{12}} E_{22}) = 0$.

Réponse question 1, page 1
(Groupe 2)



$$E_{11} = \underbrace{\delta_{..}}_{1} E_{11}$$

$$E_{11} = E_{12} E_{21} = \delta_{22} E_{11} = 1 . E_{11}$$

$$f(E_{11}) = f(E_{12} E_{21}) = f(E_{21} E_{12}) = f(\delta_{11} E_{22}) = f(E_{22}) .$$

cas général

$i \neq j \qquad E_{ij} = \delta_{ii} E_{ij} = E_{ii} E_{ij}$

$$f(E_{ij}) = f(E_{ii} E_{ij}) = f(E_{ij} E_{ii}) = f(\underbrace{\delta_{ji}}_{0} E_{ii}) = f(O_n) = 0$$

si $i = j \qquad E_{ii} = E_{ij} E_{ji} = \delta_{jj} E_{ii}$

$$f(E_{ii}) = f(E_{ij} E_{ji}) = f(E_{ji} E_{ij}) = f(\underbrace{\delta_{ii}}_{1} E_{jj}) = f(E_{jj})$$

donc $f(E_{11}) = f(E_{22}) = --- = f(E_{nn}) = \lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

$$f(M) = f\Big(\sum_{1 \le i,j \le n} \alpha_{ij} E_{ij}\Big)$$

$$= f\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii} E_{ii} + \sum_{i \neq j} \alpha_{ij} E_{ij}\Big)$$

$$= f\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii} E_{ii}\Big) + f\Big(\sum_{i \neq j} \alpha_{ij} E_{ij}\Big)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii} \underbrace{f(E_{ii})}_{\lambda} + \sum_{i \neq j} \alpha_{ij} \underbrace{f(E_{ij})}_{0} .$$

$$= \lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii} = \lambda \, tr(M) .$$

Réponse question 1, page 2
(Groupe 2)

Analyse

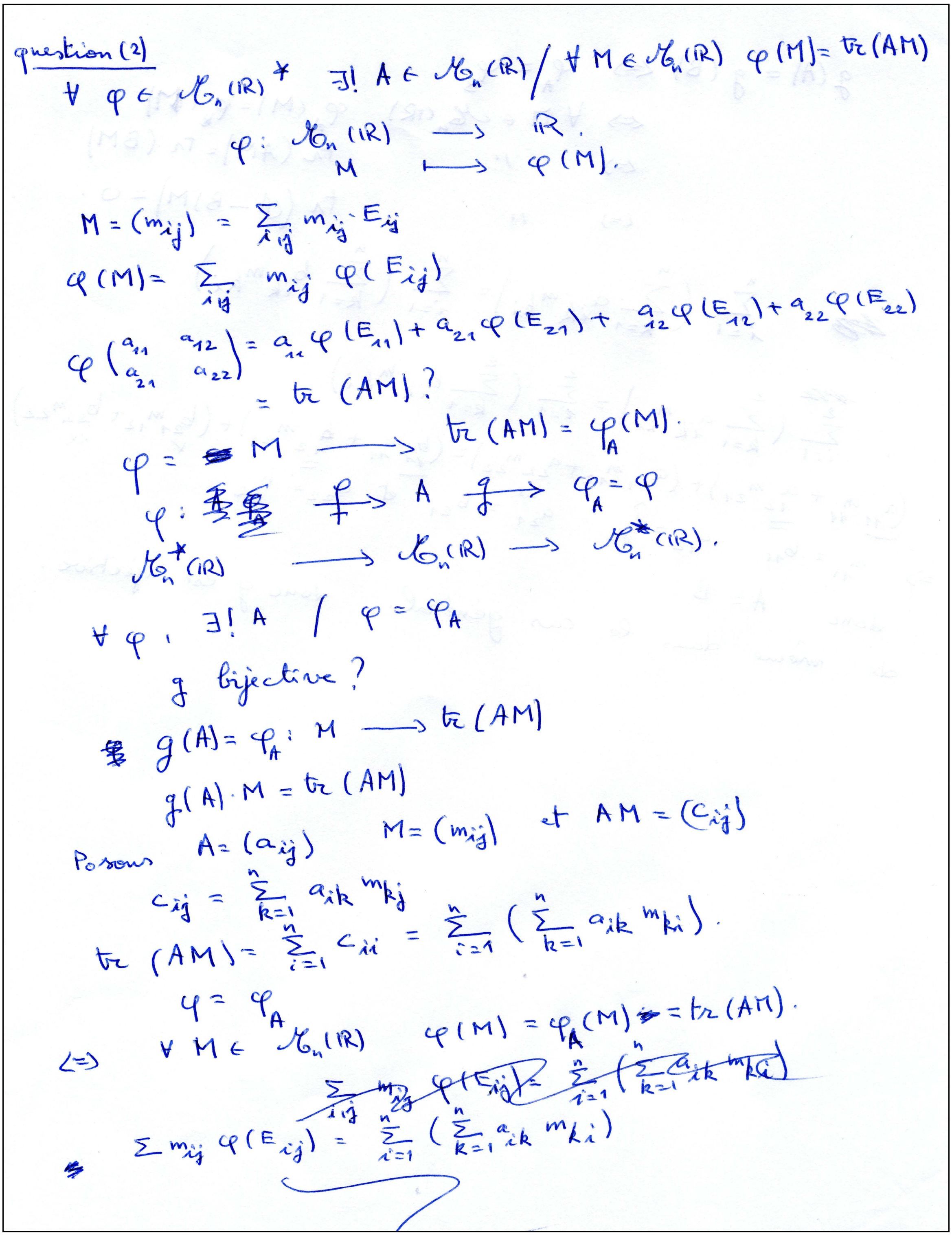
Les étudiants commencent par reprendre les données de l’exercice concernant l’application f, tout en précisant les éléments définissant f, et écrivent la question sous forme symbolique. Ils désignent dans cette écriture une matrice M par la suite de ses coefficients α_{ij}. Pour déterminer le coefficient de proportionnalité λ dans la relation $f = \lambda.tr$, les étudiants commencent par remarquer que l’application tr vérifie la condition donnée sur f et que dans ce cas, $\lambda = 1$. Ils essayent ensuite de traiter le cas général. Ils écrivent alors une matrice quelconque M dans la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, en déduisent l’expression de f(M) et à l’aide de la relation :

$f(M)=\lambda.\sum_i \alpha_{ii}$, ils calculent λ en effectuant le rapport de f(M) par $\sum_i \alpha_{ii}$. Remarquant que pour ce calcul, la somme $\sum_i \alpha_{ii}$ doit être non nul, ce qui n'est pas toujours le cas, ou encore qu'une telle formule donne une valeur de λ non constante (puisqu'elle dépend des coefficients de M), ils abandonnent cette technique et envisagent de traiter le problème dans le cas particulier où n=2. La comparaison (ou l'identification) de f(M) exprimé en fonction des $f(E_{ij})$ et de l'expression $f(M)=\lambda.(\alpha_{11}+\alpha_{22})$ permet aux étudiants de déduire « la nécessité » que $\lambda = f(E_{11}) = f(E_{22})$ et $f(E_{12}) = f(E_{21}) = 0$. Nous remarquons ici l'erreur logique dans le raisonnement (comme c'était le cas avec le premier groupe), car les conditions données s'obtiennent en fait par condition suffisante et non nécessaire. Pour établir les conditions sus citées, les étudiants étudient les possibilités que peuvent leur offrir les relations $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$. Dans leur rédaction, nous observons des traces vides à la place de certains indices, ce qui laisse à penser que les étudiants ont focalisé leur travail sur la recherche d'associations appropriées d'indices leur permettant d'obtenir les relations visées. Ce qu'ils arrivent à effectuer de façon pertinente dans le cas particulier de i et j variant dans l'ensemble {1,2}. En passant au cas général, les étudiants refont la même technique que celle utilisée dans le cas particulier précédent, et nous observons là aussi des associations d'indices utilisées pour obtenir les relations à démontrer. Ces relations étant établies, les étudiants reprennent l'expression de f(M) en fonction des $f(E_{ij})$ et, tenant compte des relations précédemment obtenues, ils montrent que $f(M)=\lambda.\mathrm{tr}(M)$, en désignant par λ la valeur commune de $f(E_{ii})$.

Commentaire

Comme ceux du premier groupe, les étudiants de ce groupe font preuve d'une bonne aptitude d'exploration de l'espace de résolution. Toutefois, leur réflexion apparaît mieux orientée car ils n'ont pas eu besoin d'étudier autant de cas particuliers pour arriver au résultat souhaité. Ainsi, se situant d'emblée à un plus grand niveau de généralité, leur exploration apparaît-elle plus rapide et efficace. Par exemple, ils passent comme le groupe 1 par le cas particulier de la dimension 2 mais l'abordent de façon générale et non avec des matrices numériques particulières. De plus, ils utilisent systématiquement dès le départ la décomposition dans la base canonique qui permet l'identification des conditions sur les images et conduit à essayer d'exploiter l'identité donnée. Via l'étude du cas particulier n=2, les étudiants arrivent à voir ce que pourrait être le coefficient de proportionnalité λ et en même temps à mettre en évidence le rôle que peuvent jouer les relations $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$ pour établir les conditions conduisant au calcul de λ. Ceci étant réalisé, le passage au cas général ne semble avoir posé aucun problème à ces étudiants. Nous notons par ailleurs la pertinence avec laquelle est gérer le calcul indiciel et que les étudiants utilisent toujours les notations des suites doublement indexées pour désigner les matrices, et ceci même dans le cas de n=2.

b) Analyse de la réponse à la question 2


question (2)

$\forall \varphi \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^* \quad \exists! A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \varphi(M) = tr(AM)$

$\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$

$M \longmapsto \varphi(M)$.

$M = (m_{ij}) = \sum_{ij} m_{ij} \cdot E_{ij}$

$\varphi(M) = \sum_{ij} m_{ij}\, \varphi(E_{ij})$

$\varphi\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}\varphi(E_{11}) + a_{21}\varphi(E_{21}) + a_{12}\varphi(E_{12}) + a_{22}\varphi(E_{22})$

$= tr(AM)$?

$\varphi = M \longrightarrow tr(AM) = \varphi_A(M)$.

$\varphi : A \xrightarrow{g} \varphi_A = \varphi$

$\mathcal{M}_n^*(\mathbb{R}) \xrightarrow{f} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n^*(\mathbb{R})$.

$\forall \varphi, \quad \exists! A \ / \ \varphi = \varphi_A$

g bijective ?

$g(A) = \varphi_A : M \longrightarrow tr(AM)$

$g(A) \cdot M = tr(AM)$

Posons $A = (a_{ij}) \quad M = (m_{ij}) \quad$ et $AM = (c_{ij})$

$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} m_{kj}$

$tr(AM) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} m_{ki}\right)$.

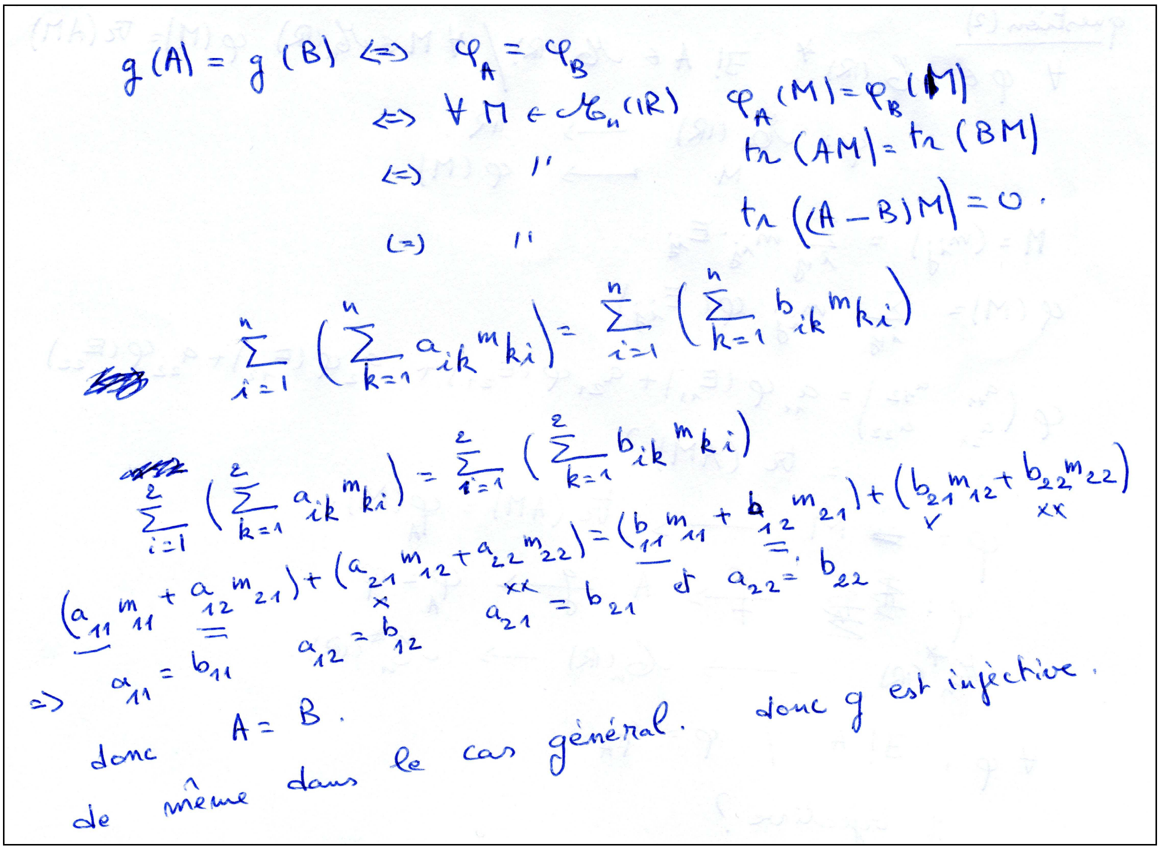
$\varphi = \varphi_A$

$\Leftrightarrow \quad \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \varphi(M) = \varphi_A(M) = tr(AM)$.

$\cancel{\sum_{ij} m_{ij}\, \varphi(E_{ij}) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} m_{ki}\right)}$

$\sum m_{ij}\, \varphi(E_{ij}) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} m_{ki}\right)$

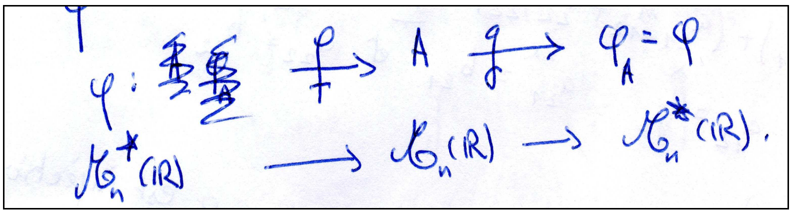
Réponse question 2, page 1
(Groupe 2)



Réponse question 2, page 2
(Groupe 2)

Analyse

Après l'écriture de la question (correctement) sous forme symbolique, les étudiants précisent les éléments définissant l'application φ, expriment une matrice M à l'aide de la suite de ses coefficients et en même temps en fonction des matrices de la base canonique de $\mathcal{M}_n$(**R**), et en déduisent l'écriture de $\varphi(M)$ en fonction des $\varphi(E_{ij})$. Ils donnent aussi une écriture de l'équation en A : $\varphi(M) = tr(AM)$ pour une matrice quelconque M choisie dans $\mathcal{M}_2$(**R**). Les étudiants essayent ensuite de reformuler le problème en utilisant des correspondances entre éléments et ensembles. Ainsi, avec l'écriture $\varphi = M \to tr(AM) = \varphi_A(M)$, les étudiants semblent vouloir indiquer que l'application φ doit permettre, via la matrice à déterminer A, la construction d'une application paramétrique liée à A, qu'ils désignent par φ_A. Ils reformulent ensuite la question par la double correspondance suivante :



Avec cette double correspondance, les étudiants semblent vouloir exprimer qu'à une application φ de $\mathcal{M}_n$*(**R**), doit être associée une matrice A de $\mathcal{M}_n$(**R**), à laquelle il faut à son tour associer une application φ_A de $\mathcal{M}_n$*(**R**), égale à φ. Cette manière de traduire le problème permet aux étudiants de donner une deuxième écriture symbolique à la question ne faisant pas intervenir la matrice M. Ainsi, écrivent-ils : $\forall\varphi, \exists! A / \varphi = \varphi_A$, ce qui leur permet de mettre en évidence la propriété de bijectivité de l'application g, et d'essayer de la prouver dans la suite de leur travail.

Pour montrer que g est surjective (ou bijective), les étudiants choisissent de résoudre l'équation en A : $\varphi = \varphi_A$. Pour ce faire, ils appliquent une matrice M quelconque aux deux membres de cette égalité, désignent les matrices A, M et AM par les suites respectives de leurs coefficients et utilisent la formule donnant les coefficients d'une matrice produit pour écrire les coefficients de AM à l'aide de ceux de A et M. Ce travail leur permet d'écrire l'équation $\varphi = \varphi_A$, à l'aide des coefficients des matrices M et A et des images $\varphi(E_{ij})$. Ils arrivent alors à une expression complexe dans laquelle, pour poursuivre, ils devraient regrouper les termes du second membre en fonction des coefficients m_{ij} pour arriver à une égalité de deux polynômes en m_{ij} et en déduire les valeurs de a_{ij}. Arrivés à ce point, et face au changement de point de vue nécessité, les étudiants semblent être perdus et abandonnent (au moins provisoirement) pour passer à l'étude de l'injectivité de g. Pour cela, ils choisissent d'utiliser la définition ensembliste de l'injection. Comme pour la surjectivité, les étudiants traduisent l'égalité g(A)=g(B) en : $\forall M \in$ M_n(**R**), $\varphi_A(M) = \varphi_B(M)$, puis, en utilisant les coefficients des matrice en jeu, écrivent l'égalité obtenue en terme de coefficients. Pour montrer que A=B, les étudiants commencent par traiter le cas de n=2 qu'ils réussissent à résoudre, bien qu'ils n'aient pas mentionné la variabilité des m_{ij} dans **R** qui permet de justifier l'égalité des coefficients des matrices A et B. A la fin les étudiants indiquent sans refaire le calcul que le cas général se fait de la même manière et concluent quant à l'injectivité de l'application g.

Commentaire

Le passage progressif du cadre dans lequel est posée la question au cadre des correspondances, en utilisant les matrices M en premier temps puis en se débarrassant de ces matrices, ce qui a permis à la fin de formuler la question en terme de bijectivité, fait preuve d'une exploration bien structurée et très pertinente de l'espace de la tâche, d'une aptitude à passer du niveau des "éléments" à celui des "fonctions" et particulièrement d'une bonne disponibilité des notions de correspondance et de bijectivité pour les outiller dans la reformulation de la question posée. Dans l'étude de la bijectivité de l'application identifiée, les étudiants ont réussi à rendre opératoire les propriétés ensemblistes de surjectivité et d'injectivité de la situation qui les concernent. Ceci apparaît d'une part dans l'application d'une matrice quelconque M à l'équation $\varphi = \varphi_A$ dans le cas de la surjectivité et à l'égalité

$\varphi_A = \varphi_B$ dans le cas de l'injectivité, et d'autre part, par le calcul convenable effectué sur les coefficients des matrices en jeu et qui a permis de formuler les relations en question en termes de coefficients. Cependant, dans l'étude de la propriété de surjectivité, les étudiants ne sont pas arrivés à gérer la situation induite par l'égalité :

$$\sum m_{ij} \varphi(E_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} m_{ki} \right)$$

pour déterminer les coefficients a_{ij} de la matrice A. Et pour la propriété d'injectivité, bien que les étudiants ont réussi à traiter le cas de $n = 2$, ils n'ont pas traité le cas général et se sont contentés de remarquer que ce cas se fait comme pour le cas particulier de $n = 2$. A notre avis, ceci reflète des difficultés dans la manipulation des situations caractérisées par une surcharge d'ostensifs, dont les statuts sont à fixer selon l'objectif visé, et aussi à procéder à un changement de point de vue permettant de rendre opérationnelle les écritures disponibles. La gestion de la situation rencontrée par les étudiants nécessite de savoir situer à chaque instant le statut des objets que l'on manipule, et de savoir les différencier. Si l'on se pose la question de la surjectivité, les coefficients a_{ij} sont des inconnues prises dans des relations polynomiales dont les indéterminées sont les m_{ij} ; si l'on se pose la question de l'injectivité, les a_{ij} et b_{ij} sont des données (des paramètres) qui interviennent là encore dans des égalités entre polynômes dont les indéterminées sont les m_{ij}. Dans les deux cas, rien dans le langage utilisé ne facilite cette vision polynomiale. La quantification, pour tout M, amène davantage, et même cela n'est pas évident, à penser les m_{ij} comme variables de fonctions polynomiales de plusieurs variables. Par ailleurs, nous notons que les étudiants ne sont pas arrivés à percevoir la possibilité d'étudier la propriété de bijectivité dans le cadre de l'algèbre linéaire où se situe l'exercice. Il semble que pour eux, un problème de bijectivité s'inscrit en priorité dans le cadre fonctionnel ensembliste et que si les techniques spécifiques aux preuves dans le cadre linéaire sont mobilisables, elles ne sont pas disponibles lorsque le cadre linéaire doit être mis en évidence par le sujet lui-même.

Conclusion

Pour les étudiants de ce groupe, nous remarquons, à travers leur production, que l'exploration de l'espace de résolution des différentes tâches a été bien réfléchie et convenablement structuré. Ceci leur a permis dans la première question d'atteindre une piste de résolution adéquate avec un minimum de tentatives (et moins d'essais manqués que pour le premier groupe) et dans la deuxième question d'adopter la piste de reformulation via la propriété de bijectivité en passant du registre symbolique des éléments au registre fonctionnel. La mise en évidence de cette stratégie de travail et le retour du niveau fonctionnel au niveau des éléments lors de l'étude des propriétés de surjectivité et d'injectivité, atteste une flexibilité de raisonnement et une certaine maîtrise du travail inter-registres. Les étudiants sont aussi parvenus à bien organiser et gérer le calcul fonctionnel, matriciel et indiciel qu'ont nécessité les techniques de travail adoptées et ont réussi à exploiter de façon efficace la disposition des indices dans la relation $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$. Tout ceci reflète des compétences au niveau de la maîtrise de certaines pratiques intervenant dans l'activité de résolution de problèmes. Notamment à propos de l'exploration de l'espace de résolution, du passage du particulier au général, de la possibilité de faire usage de l'objet fonction et de ses propriétés comme outil pour construire des techniques de travail, de l'exploitation des ressources sémiotiques, de la maîtrise du travail inter-registres, comme aussi au niveau de la rédaction, de l'organisation et de la cohérence des pas de raisonnement accomplis. Néanmoins, nous enregistrons, comme pour les étudiants du premier groupe, des difficultés dans l'usage du symbolisme mathématique dans des expressions particulièrement complexes, comme les difficultés constatées pour gérer, dans le cas général, les différents symboles que renferme l'équation

$\sum m_{ij}\varphi(E_{ij}) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}m_{ki}\right)$, pour procéder à des changements de point de vue adéquats permettant de rendre opératoires les expressions en question ou encore pour étudier la propriété d'injectivité dans le cas général.

XI. 3. 3. Analyse des productions du groupe 3

a) Analyse de la réponse à la question 1

Q-1-

$f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ linéaire t.q $f(AB) = f(BA)$ $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$tr : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$

$(a_{ij}) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ linéaire

$f = k.tr$, $k \in \mathbb{R}$.

$$E_{ij} = \begin{array}{cc} & j^e \\ & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \end{array} \; i^e$$

(E_{ij}) b. canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

tr est définie par: - - - $tr(E_{ii}) = 1$ et $tr(E_{ij}) = 0$ si $i \neq j$

$tr(E_{11}) = 1$ $tr(E_{12}) = 0$

si $f = k.tr$ alors $f(E_{ii}) = k$ et $f(E_{ij}) = 0$ si $i \neq j$

$f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$?

$f(AB) = f(BA)$

$f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = f\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ? \end{pmatrix}\right] = f\left[\begin{pmatrix} ? \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a = 1$ et $c = 0$

$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow a = 0$ et $b = 0$

$\cancel{f(E_{11}) = f(E_{22})}$ $E_{ij} E_{kl} = \delta_{jk} E_{il}$

$f(E_{11}) = f(E_{22})$?

$\delta_{11} E_{22} = E_{21} E_{12}$ $E_{12} E_{21} = \underbrace{\delta_{22}}_{1} E_{11}$

$f(E_{22}) = f(\delta_{11} E_{22}) = f(E_{21} E_{12}) = f(E_{12} E_{21}) = f(E_{11})$

$\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$

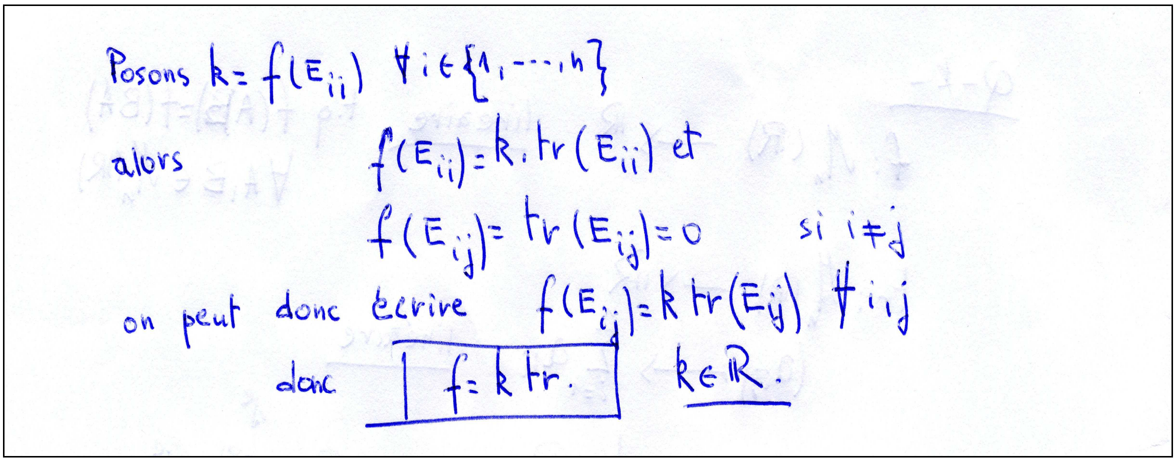
$f(E_{ii}) = f(\delta_{jj} E_{ii}) = f(E_{ij} E_{ji}) = f(E_{ji} E_{ij}) = f(\delta_{ii} E_{jj})$

donc $f(E_{ii}) = f(E_{jj})$.

si $i \neq j$ $f(E_{ij}) = f(\delta_{ii} E_{ij}) = f(E_{ii} E_{ij}) = f(E_{ij} E_{ii}) = f(\underbrace{\delta_{ji}}_{0} E_{ii})$

donc $f(E_{ij}) = f(0) = 0$

Réponse question 1, page 1
(Groupe 3)



Posons $k = f(E_{ii})$ $\forall i \in \{1, \cdots, n\}$

alors $f(E_{ii}) = k.tr(E_{ii})$ et

$f(E_{ij}) = tr(E_{ij}) = 0$ si $i \neq j$

on peut donc écrire $f(E_{ij}) = k\,tr(E_{ij})$ $\forall i, j$

donc $\boxed{f = k\,tr.}$ $k \in \mathbb{R}$.

Réponse, question 1, page 2
(Groupe 3)

Analyse

Les étudiants commencent par donner les éléments définissant chacune des applications f et tr, précisent leurs propriétés de linéarité et formulent la question posée à l'aide de l'égalité : $f = k.tr$. Ils rappellent ensuite le tableau de coefficients d'une matrice E_{ij} quelconque, donnent les images des éléments de la base $(E_{ij})_{1\le i,\, j\le n}$ par l'application trace et en déduisent, via la relation : $f = k.tr$, l'image de cette base par l'application f. Ceci leur a permis de déterminer très rapidement la valeur supposée du réel k, en l'occurrence l'image commune des matrices E_{ii} par f, et la propriété $f(E_{ij})=0$ pour i différent de j. Pour démontrer ces résultats, les étudiants commencent par traiter le cas de la base $(E_{ij})_{1\le i,\, j\le n}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ et essayent d'utiliser la propriété de f : f(AB)=f(BA). En adoptant l'écriture sous forme de "tableaux de coefficients" pour les matrices utilisées, les étudiants n'arrivent pas à apercevoir ce que la relation $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$ pourrait leur fournir pour avancer dans leur travail. Ils abandonnent alors cette piste et s'intéressent à la relation $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$ pour voir en quoi elle peut les aider. Pour cela, ils commencent par étudier le cas particulier de i et j dans l'ensemble {1,2} et, par un travail sur les indices, ils arrivent à montrer que $f(E_{11})=f(E_{22})$. Immédiatement après, les étudiants passent à l'étude du cas général, et montrent, sans difficulté semble-t-il, que $f(E_{ii}) = f(E_{jj})$ et $f(E_{ij}) = 0$ pour $i \neq j$. En notant k la valeur commune des $f(E_{ii})$, et en comparant les images des matrices E_{ij} obtenues par f à leurs images par l'application tr, les étudiants arrivent à la fin à établir la relation $f = k.tr$.

Commentaire

La mise en évidence de la propriété de linéarité des applications f et tr (on notera que le mot linéaire est réécrit et souligné dans les deux cas), a permis, semble-t-il, aux étudiants d’apercevoir qu’il suffit de se limiter dans le travail aux éléments de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ pour établir la relation demandée. En procédant de la sorte, les étudiants sont arrivés sans peine à déterminer la valeur "supposée" du coefficient de proportionnalité k. Pour déterminer la technique à adopter dans leur réponse, les étudiants ont dû passer par l’étude de quelques cas particuliers avant d’apercevoir le rôle que pourrait jouer la relation $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$ dans l’établissement du résultat visé. Ils ont ensuite réussi à appliquer la technique développée dans le cas général. En se limitant aux éléments de la base canonique dans leur travail, les étudiants ont fait l’économie de tout le calcul que nécessite l’usage d’une matrice variable M, chose que les étudiants des deux premiers groupes étaient contraints à effectuer.

b) Analyse de la réponse à la question 2

$\boxed{Q\text{-}2\text{-}}$ $\forall\, \varphi \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*$, $\exists!\, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,/\, \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $\varphi(M) = tr(AM)$

$$\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$M \longmapsto \varphi(M)$$

$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\varphi(M) = tr(AM)$

$M = (m_{ij}) = \sum_{ij} E_{ij} \Rightarrow \varphi(M) = \sum_{ij} m_{ij}\, \varphi(E_{ij})$

$A = (a_{ij})$ $\quad AM = (\alpha_{ij})$ $\quad \alpha_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} m_{kj}$

$\cancel{\varphi(M) = tr(AM)}$ $\quad \varphi(M) = tr(AM)$

$\Leftrightarrow \sum_{ij} m_{ij}\, \varphi(E_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} m_{ki}$

$\forall M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ $\quad \varphi(M) = tr(AM)$

$AM = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a a_{11} + b a_{12} & c a_{11} + d a_{12} \\ a a_{21} + b a_{22} & c a_{21} + d a_{22} \end{pmatrix}$

$\varphi(M) = tr(AM) \Leftrightarrow a\,\varphi(E_{11}) + b\,\varphi(E_{21}) + c\,\varphi(E_{12}) + d\,\varphi(E_{22})$

$= a\, a_{11} + b\, a_{12} + c\, a_{21} + d\, a_{22}$

$\Leftrightarrow a(\varphi(E_{11}) - a_{11}) + b(\varphi(E_{21}) - a_{12}) + c(\varphi(E_{12}) - a_{21}) + d(\varphi(E_{22}) - a_{22}) = 0$

$\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow a_{11} = \varphi(E_{11})$, $a_{12} = \varphi(E_{21})$, $a_{21} = \varphi(E_{12})$, $a_{22} = \varphi(E_{22})$.

donc $M = \begin{pmatrix} \varphi(E_{11}) & \varphi(E_{12}) \\ \varphi(E_{21}) & \varphi(E_{22}) \end{pmatrix}$.

on prend $a = 1$ $\quad b = c = d = 0$
puis $b = 1$ $\quad a = c = d = 0$
puis $c = 1$ $\quad a = b = d = 0$
puis $d = 1$ $\quad a = b = c = 0$

si $M = (m_{ij})$, $1 \leq ij \leq n$

$\varphi(M) = tr(AM) \Leftrightarrow \sum_{ij} m_{ij}\, \varphi(E_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} m_{ki}$

$m_{11}\varphi(E_{11}) + m_{12}\varphi(E_{12}) + \cdots + m_{1n}\varphi(E_{1n}) + m_{21}\varphi(E_{21}) + \cdots + m_{2n}\varphi(E_{2n}) + \cdots + m_{n1}\varphi(E_{n1}) + \cdots + m_{nn}\varphi(E_{nn})$

$= (a_{11}m_{11} + a_{12}m_{21} + \cdots + a_{1n}m_{n1}) + (a_{21}m_{12} + a_{22}m_{22} + \cdots + a_{2n}m_{n2}) + \cdots + (a_{n1}m_{1n} + \cdots + a_{nn}m_{nn})$

$a_{11} = \varphi(E_{11})$ $\quad a_{21} = \varphi(E_{12})$ $\quad a_{n1} = \varphi(E_{1n})$

$a_{12} = \varphi(E_{21})$ $\quad a_{1n} = \varphi(E_{n1})$ $\quad a_{nn} = \varphi(E_{nn})$

donc $A = (a_{ij})$ avec $a_{ij} = \varphi(E_{ji})$ pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$

A est unique pour φ donnée sur la base (E_{ij}).

Réponse, question 2
(Groupe 3)

Analyse

Les étudiants commencent par donner une écriture de la question dans le registre symbolique tout en précisant les éléments définissant l'application φ. Pour répondre à la question, ils s'intéressent à la résolution de l'équation en A : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}),\ \varphi(M) = tr(AM)$. Après avoir désigné les matrices M, A et AM par les suites de leurs coefficients, et écrit M et $\varphi(M)$ à l'aide des matrices de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, ils formulent l'équation $\varphi(M) = tr(AM)$ en termes des coefficients des matrices en jeu et en utilisant les matrices E_{ij} de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Pour effectuer la résolution, les étudiants commencent par traiter le cas de n=2, tout en restant dans le cadre général des matrices M et A. Pour obtenir la trace de la matrice AM, les étudiants calculent, via les tableaux des matrices, le produit matriciel AM, bien qu'ils aient déterminé auparavant la formule donnant la trace de AM dans le cas général de n. En écrivant l'équation $\varphi(M) = tr(AM)$ dans le cas particulier de n=2 et à l'aide des coefficients des matrices M et A et des $\varphi(E_{ij})$, pour les différentes valeurs de i et j, les étudiants adoptent une écriture de cette équation sous forme d'un polynôme en a, b, c et d (qui constituent les coefficients de M) égal à 0. Conscients du statut de "variable" de ces réels, ils prennent quatre cas du quadruplet (a,b,c,d) et obtiennent pour chaque cas, un coefficient de A. A la fin, ils écrivent la matrice A ainsi obtenue (qu'ils désignent, par erreur, par M). Ceci étant réalisé, le passage au cas général ne pose apparemment aucune difficulté, et les étudiants, en utilisant cette foi-ci la technique d'identification (au lieu d'instancier les variables) obtiennent que $a_{ij} = \varphi(E_{ji})$ pour tout i et j dans {1,n}. Ceci a permis aux étudiants d'obtenir la matrice A qu'ils cherchent, et pour justifier que A est unique, ils remarquent que cette unicité découle de la donnée de l'application φ, puisque les coefficients de A en dépendent.

Commentaire

Pour répondre à cette deuxième question, les étudiants ont choisi la stratégie de la recherche explicite de la matrice A et ceci en cherchant à résoudre l'équation $\varphi(M) = tr(AM)$. Pour effectuer cette résolution, les étudiants ont réussi à formuler correctement l'équation en termes de coefficients et sont parvenus, avec l'étude du cas particulier de n=2, à constater que la variabilité des coefficients de la matrice M permet, en prenant des valeurs particulières de ces coefficients, de déterminer les coefficients de la matrice A. Ce travail, semble-t-il, a entraîné un changement de point de vue chez les étudiants concernant l'équation à résoudre. Ainsi, dans le cas général, ils ont interprété les deux membres de l'équation comme deux polynômes de plusieurs variables, et, pour les égaliser, il ont fait usage de la technique d'identification des coefficients. Les étudiants ont ainsi réussi à déterminer la matrice A demandée. La justification de l'unicité de A reflète aussi une bonne disponibilité de la notion d'application et la connaissance de l'unicité des images pour des éléments donnés.

Conclusion

Pour les deux questions de l'exercice, les étudiants de ce groupe semblent être parvenus sans difficultés à fixer dés le départ une stratégie de travail appropriée, ce qui fait preuve d'une aptitude d'exploration plus développée que celle des étudiants des deux premiers groupes. L'exploitation, dans la première question, de la propriété de linéarité des fonctions mises en jeu, leur a permis à adopter des techniques économiques et adéquates pour la réalisation de certaines tâches et montre la possibilité pour ces étudiants à mettre au profit le contexte et les données de l'exercice. En parvenant à effectuer un changement de point de vue pour répondre à la deuxième question, les étudiants font preuve d'une flexibilité certaine dans l'usage des objets et ostensifs mathématiques. Nous notons aussi le soin de la rédaction et la pertinence avec laquelle sont effectuées les calculs et les justifications des résultats établis. Pour l'exploitation de la relation $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$, comme pour la résolution de l'équation dans la deuxième question, les étudiants ont dû étudier un cas particulier avant de passer au cas général. Cette stratégie de travail, utilisée par les étudiants des trois groupes, à des moments différents de leurs travaux, montre que l'heuristique de spécification (ou de particularisation), utilisée dans la première séance de l'ingénierie à été d'un grand profit pour les étudiants dans la résolution de cet exercice. Par ailleurs, nous remarquons que, comme pour le premier groupe, les étudiants de ce groupe ne sont pas arrivés à apercevoir la possibilité de reformuler la deuxième question en termes de bijectivité et à exploiter le contexte d'algèbre linéaire pour répondre à cette question. Il semble que lorsque la tâche évoque, à travers son énoncé, une technique de résolution, la mobilisation d'autres techniques plus "économiques" ou plus "expertes" est une pratique qui reste encore non triviale ni évidente pour les étudiants.

XI. 4. Conclusion pour l'évaluation

Les réponses des étudiants des trois groupes aux deux questions de l'exercice montrent des compétences et des progrès au niveau de la maîtrise de certaines pratiques intervenant dans l'activité de résolution de problèmes. Ceci apparaît notamment dans l'appropriation de la situation du problème, l'exploration de l'espace de résolution, la maîtrise du jeu entre le particulier et le général, la gestion du calcul fonctionnel, matriciel et indiciel qu'ont nécessité les techniques de travail adoptées, dans l'exploitation des ressources sémiotiques, ainsi qu'au niveau de la rédaction et de la cohérence dans l'expansion des pas de raisonnement produits. Le groupe 2 a en outre montré une bonne disponibilité des notions de correspondance et de bijectivité dans sa réponse à la deuxième question et a fait preuve d'une réelle maîtrise concernant les aller et retour entre les registres des "éléments" et des "fonctions". Ceci n'a pas été le cas pour les étudiants des groupes 1 et 3, qui, pour répondre à cette question, ont choisi la stratégie de démonstration directe. Il s'agit là de difficultés constatées dans les exercices relatifs à la partie diagnostique (comme dans le test d'évaluation avec la première population d'étudiants) et qui montrent encore une fois la difficulté pour les étudiants d'adopter des méthodes de résolution non indiquées ou de procéder à un changement de cadre non suggéré.

D'un autre côté, nous constatons chez les étudiants des groupes 1 et 2 des difficultés qui persistent dans la gestion du symbolisme mathématique, notamment dans des expressions particulièrement complexes, dans la possibilité de procéder à des changements de points de vue, et un manque de sensibilité quant à l'usage des quantificateurs et des connecteurs de logique qui a entrainé des erreurs de raisonnement dans les réponses données.

Notons finalement que le groupe 3, à travers les stratégies et techniques économiques adoptées, la mise au profit de façon idoine du contexte et des données de l'exercice, la flexibilité dans l'usage des objets et ostensifs mathématiques, la possibilité de procéder à des changements de points de vue, fait preuve d'un développement cognitif plus avancé que celui des étudiants des autres groupes, chose qui avait déjà été constatée dès la partie diagnostique de cette ingénierie.

XII. Conclusion générale de l'ingénierie

XII. 1. Préliminaires

La partie diagnostique de l'ingénierie nous a permis de constater que dans l'activité de résolution de problème, ce sont surtout les tâches constructives et de recherche (construire un objet mathématique sous contraintes, prouver l'existence d'un objet …) qui posent le plus de difficultés aux étudiants. Pour la plupart de ceux-ci, les difficultés rencontrées sont dues à un manque de familiarité avec des pratiques de choix, de gestion et de traitement des données relatives à la situation problème à laquelle les étudiants font face. Ces difficultés peuvent être classées en deux catégories, stratégiques et de gestion des données. Le premier type concerne l'exploration de l'espace de résolution, la mise en évidence et la réalisation de pas de raisonnement intermédiaires non indiqués, le contrôle et la cohérence des démarches accomplies lors de la résolution du problème. Quant au deuxième type, il concerne notamment l'usage du langage symbolique, la possibilité d'effectuer des reformulations appropriées et opérationnelles des données, et l'articulation des dimensions sémiotique et conceptuelle dans le choix des moyens ostensifs à mettre en œuvre. Dans ce contexte, l'usage des notions fonctionnelles avait constitué une problématique difficile pour les étudiants. Et ceci de part les confusions qu'entraînent la multiplicité de points de vue sous lesquels se présentent ces notions selon les domaines mathématiques (ensembliste, algèbre des structures, algèbre linéaire), aussi bien au niveau des formulations symboliques que sur le plan conceptuel.

Pour pallier aux insuffisances observées, et dans l'objectif d'améliorer, un tant soit peu, les aptitudes des étudiants dans l'activité de résolution de problèmes, particulièrement ceux de construction et de recherche, nous avons trouvé dans les travaux de Castela relatifs au fonctionnement mathématique et à l'intervention de la composante pratique des technologies dans la mise en œuvre des praxéologies mathématiques, une approche qui pourrait convenir à la situation didactique qui concerne notre problématique. C'est ainsi que nous nous sommes intéressés dans les séances de remédiation aux possibilités d'acquisition par les étudiants de ce que Castela appelle un « *folklore* » mathématique. C'est à dire, aux facteurs intervenant dans les praxéologies mathématiques et qui permettent de choisir, de mettre en œuvre et de piloter les techniques relatives aux praxéologies que requiert la résolution d'un problème donné.

Compte tenu du contexte d'enseignement dans les classes préparatoires scientifiques et des contraintes institutionnelles qui pèsent sur nos choix organisationnels de l'ingénierie, nous n'avons pu programmer que trois séances de remédiation que nous avons consacrées aux difficultés qui nous ont paru poser le plus d'obstacles pour les étudiants dans l'activité de résolution de problèmes. Ainsi, du point de vue stratégique, nous avons tenu à ce que les exercices proposés dans chacune des trois séances présentent une multiplicité de pistes de travail, parmi lesquelles le sujet doit pouvoir faire un choix, et dont la résolution nécessite l'identification d'un ou de plusieurs problèmes intermédiaires (ou encore des tâches *r-convoquées*, selon Castela). Quant aux notions intervenants dans les exercices proposés, nous les avons choisies de manières à ce qu'elles soient familières aux étudiants, pour qu'elles n'entraînent pas d'obstacles de compréhension, et en même temps qu'elles nécessitent d'effectuer un choix concernant le cadre adéquat de travail et les moyens ostensifs appropriées à la résolution. Certaines questions dans ces exercices ont aussi été choisies pour faire apparaître l'importance de la gestion du symbolisme mathématique et l'effet de la sensibilité aux formes symboliques dans la recherche de la solution.

D'un autre côté, du point de vue méthodologique et organisationnel, deux aspects ont caractérisé nos choix concernant le déroulement de chacune des séances de remédiation. Le premier concerne la répartition des étudiants en groupes de niveaux équivalents, en vue de renforcer les interactions avec le milieu du problème à résoudre, et susciter l'échange d'informations et de discussions à propos du travail requis, ce qui nous a semblé un moyen pouvant favoriser l'apprentissage visé. Quant au deuxième aspect, il concerne notre rôle dans ces séances qui s'est limité à des interventions minimales en vue d'assurer la bonne dévolution du problème et de garantir en même temps l'adidacticité de la situation de résolution.

Ceci dit, nous envisageons dans ce qui suit de présenter, pour chacun des trois groupes, les évolutions éventuelles des aptitudes de résolution de problèmes qui sont avérées les plus problématiques pour les étudiants, et de comparer ces évolutions avec ce qui a été constaté lors des séances diagnostiques.

Pour une meilleure suivie de ces évolutions, et en vue de faciliter le travail de comparaison, nous récapitulons les résultats obtenus selon les deux tableaux qui suivent et qui indiquent les aptitudes retenues pour ce travail récapitulatif.

Tableau 7 : Aptitudes stratégiques

Exploration de l'espace de résolution				Problèmes intermédiaires			Contrôle du processus heuristique de raisonnement			
Recherche d'une piste de travail		Piste de travail adoptée[89]		Identifiés		Non identifiés	Pas de raisonnement[90]		Processus[91]	
Problématique	Accessible	Direct	Indirect	Implicitement	Explicitement		Connectés	Déconnectés	Cohérent	Incohérent

Tableau 8 : Aptitudes relatives à l'exécution de la stratégie

Identification du cadre de travail approprié à la résolution (R : réussi D : difficile)		Choix des moyens de reformulation (A : approprié D : difficile)		Usage du symbolisme mathématique						Usage des éléments de logique (C : conforme)			Niveau de rédaction (C: conforme A: acceptable)			Changement de points de vue (R : réussi D : difficile)	
				Changement des registres sémiotiques (R : réussi D:difficultés)		Choix des moyens ostensifs (A :approprié D :difficultés)		Manipulation du formalisme symbolique (A :approprié D :difficultés)									
R	D	A	D	R	D	A	D	A	D	C	+ou– C	Non C	C	A	Non C	R	D

XII. 2. Résultats obtenus dans les séances diagnostiques

Notons tout d'abord que dans les séances diagnostiques, dont l'objectif était la recherche des origines des difficultés et obstacles que rencontrent les étudiants dans l'activité de résolution de problème indépendamment du niveau des étudiants concernés, la répartition de ceux-ci était arbitraire et ne correspond pas à celle réalisée dans les séances de remédiation. Pour cette raison, dans les tableaux récapitulatifs concernant ces séances diagnostiques, nous ne tenons pas compte de la répartition des étudiants selon les différents groupes. Les résultats mentionnés correspondent en conséquence aux observations qui ont marqué le plus les travaux des différents groupes d'étudiants, et auxquels nous nous sommes référés pour la conception et la réalisation des séances de remédiation.

Les évolutions que nous étudierons ultérieurement pour chacun des trois groupes seront alors toutes comparées aux résultats relatifs à ces séances diagnostiques, qui seront utilisés indifféremment pour les trois groupes.

---

[89] Un processus d'exploration sera qualifié de direct, si le sujet entame directement l'étude du cas qui l'intéresse et ne fait pas usage de l'étude d'un cas particulier pour fixer une piste de travail. Le processus sera qualifié d'indirect dans le cas contraire.

[90] Un processus de raisonnement sera qualifié de déconnecté, dés qu'un pas de raisonnement manque (totalement ou partiellement) dans l'enchaînement du processus heuristique. Dans le cas contraire, le processus de raisonnement sera qualifié de connecté.

[91] Un processus de raisonnement sera qualifié d'incohérent, lorsqu'il existe des contradictions dans les résultats établis dans les différents pas de raisonnement, ou dans l'usage du symbolisme et moyens ostensifs mis en œuvre.

Nous rappelons par ailleurs que l'exercice proposé dans la première séance diagnostique (désigné dans les tableaux ci-dessous par ExD1) concerne la résolution d'un problème de construction, et celui proposé dans la deuxième séance diagnostique (désigné par ExD2) est composé de deux questions, la première demande d'établir la structure de sous espace vectoriel sur un ensemble G et de construire un isomorphisme entre G et un espace vectoriel donné, quant à la deuxième question, elle concerne la démonstration de l'équivalence entre deux propriété données.

Dans les tableaux qui suivent, une case grise indique que l'aptitude concernée n'intervient pas dans l'exercice ou la question concerné, et Q1 et Q2 désignent respectivement : question 1 et question 2.

	Exploration de l'espace de résolution				**Problèmes intermédiaires**			**Contrôle du processus heuristique de raisonnement**			
	Recherche d'une piste de travail		Piste de travail adoptée		Identifié		Non identifié	Pas de raisonnement		Processus	
	Problématique	Accessible	Direct	Indirect	Implicitement	Explicitement		Connectés	Déconnectés	Cohérent	Incohérent
ExD1	×		×		×				×		×
Ex2 Q 1		×	×					×		×	
ExD2 Q 2		×	×					×		×	

Tableau 9 : Aptitudes stratégiques

	Identification du cadre de travail approprié à la résolution (R : réussi D : difficile)		**Choix des moyens de reformulation** (A : approprié D : difficile)		**Usage du symbolisme mathématique** — **Changement des registres sémiotiques** (R : réussi D:difficultés)		**Usage du symbolisme mathématique** — **Choix des moyens ostensifs** (A :approprié D :difficultés)		**Usage du symbolisme mathématique** — **Manipulation du formalisme symbolique** (A :approprié D :difficultés)		**Usage des éléments de logique** (C : conforme)			**Niveau de rédaction** (C: conforme A: acceptable)			**Changement de points de vue** (R : réussi D : difficile)	
	R	D	A	D	R	D	A	D	A	D	C	+ou– C	Non C	C	A	Non C	R	D
ExD1		×		×		×		×		×						×		
ExD2 Q1	×			×		×		×		×		×			×			
ExD2 Q2	×		×		×		×		×			×			×			

Tableau 10 : Aptitudes relatives à l'exécution de la stratégie

Commentaire

Il ressort de ces tableaux récapitulatifs que les points les plus problématiques rencontrés par les étudiants dans les séances diagnostiques se situent au niveau de la réalisation des stratégies de résolution. Ces points concernent, notamment, l'identification du cadre de travail approprié, le choix des moyens de reformulation et l'usage du symbolisme mathématique. Nous soulignons que ces difficultés se sont manifestées dans l'exercice 1 et/ou dans la première question de l'exercice 2, tous les deux concernent, totalement ou partiellement, des tâches de construction. Par contre, la deuxième question de l'exercice 2, qui concerne la démonstration d'une équivalence, a été, de façon globale, convenablement réussie, et nous n'avons enregistré que certaines insuffisances dans l'usage des éléments de logique.

Pour ce qui concerne les aptitudes stratégiques, c'est dans l'exercice 1 que les étudiants ont rencontré le plus de difficultés, et ce, notamment au niveau de l'exploration de l'espace de résolution, de l'identification des problèmes intermédiaires, comme au niveau du contrôle du processus heuristique de raisonnement, où nous avons enregistré parfois des contradictions dans les résultats établis, et parfois une certaine déconnexion dans le développement de la stratégie de résolution, ce qui a conduit à des rédactions non conformes.

XII. 3. Etude de l'évolution des aptitudes des étudiants dans les séances de remédiation

Rappelons au préalable que les problèmes posés dans les séances de remédiation concernent tous, complètement ou partiellement, des tâches de construction et/ou de recherche. Ce choix, nous l'avons justifié au moment de la conception de l'ingénierie par le fait que c'est précisément ce type de tâches qui s'est avéré le plus problématique pour les étudiants. Pour cette raison, l'évolution des aptitudes des étudiants dans les séances de remédiation sera comparée essentiellement par rapport aux résultats obtenus dans l'exercice 1 et la première question de l'exercice 2 des séances diagnostiques.

XII. 3. 1. Evolution des aptitudes des étudiants du groupe 1

Nous rappelons dans le tableau ci-dessous les étudiants qui constituent le groupe 1 ainsi que leurs moyennes de mathématiques pour le premier et le deuxième trimestre de l'année universitaire.

Tableau 11 (Moyennes (sur 20), groupe 1)

Etudiant	E_2	E_4	E_5	E_6
Moyenne 1^er^ trimestre	8,79	9,18	9,56	9,68
Moyenne 2^er^ trimestre	9,20	9,10	10, 09	9,89

Notons que l'étudiant E_4 s'est absenté à la dernière séance de l'ingénierie.

Avec ces résultats, et tenant compte du niveau d'enseignement et celui des épreuves d'évaluation que passent les étudiants dans les classes préparatoires scientifiques, nous pouvons considérer qu'il s'agit là d'un groupe de niveau en mathématiques satisfaisant.

Les résultats concernant les séances de remédiation sont portées dans les quatre dernières lignes des tableaux qui suivent, et sont désignées par Ex1, Ex2, (Ex3, Q1) et (Ex3, Q2), qui correspondent respectivement à : Expérimentation 1, Expérimentation 2, (Expérimentation 3, question 1) et (Expérimentation 3, question 2). Les lignes correspondantes à Ex1 et Ex2 sont subdivisées chacune en deux lignes, la première est relative au travail des étudiants avant l'intervention de l'enseignant et la deuxième correspond à leur travail après l'intervention de l'enseignant. Précisons que, dans cette deuxième ligne, nous ne mentionnons que les changements éventuels enregistrés par rapport à la première ligne. Rappelons enfin que l'enseignant n'est pas intervenu dans la troisième expérimentation.

	Exploration de l'espace de résolution				**Problème intermédiaire**			**Contrôle du processus heuristique de raisonnement**			
	Recherche d'une piste de travail		Piste de travail adoptée		Identifié		Non identifié	Pas de raisonnement		Processus	
	Problématique	Accessible	Direct	Indirect	Implicitement	Explicitement		Connectés	Dé-connectés	Cohé_rent	In-cohé-rent
Ex D1	×		×		×				×		×
Ex D2 Q 1		×	×					×		×	
Ex D2 Q 2		×	×					×		×	
Ex 1	×			×	× (pour pi_1)		× (pour pi_2)		×	×	
						×		×			
Ex 2		×	×				×		×	×	
						×		×			
Ex 3 Q 1		×		×		×		×		×	
Ex 3 Q 2		×		×				×		×	

Tableau 12 : Aptitudes stratégiques (groupe 1)

Tableau 13 : Aptitudes relatives à l’exécution de la stratégie (groupe 1)

	Identification du cadre de travail approprié à la résolution (R : réussi D : difficile)		**Choix des moyens de reformulation** (A : approprié D : difficile)		**Usage du symbolisme mathématique**						**Usage des éléments de logique** (C : conforme)			**Niveau de rédaction** (C: conforme A: acceptable)			**Changement de points de vue** (R : réussi D : difficile)	
					Changement des registres sémiotiques (R : réussi D:difficultés)		**Choix des moyens ostensifs** (A :approprié D :difficultés)		**Manipulation du formalisme symbolique** (A :approprié D :difficultés)									
	R	D	A	D	R	D	A	D	A	D	C	+ou– C	Non C	C	A	Non C	R	D
ExD1		×		×		×		×		×						×		
ExD2 Q1	×			×		×		×		×		×			×			
ExD2 Q2	×		×		×		×		×			×			×			
Ex 1		×		×		×		×		×					×			
	×		×		×		×		×					×				
Ex 2		×	×		×		×			×				×				
									×									
Ex 3 Q 1	×		×		×		×		×			×			×			
Ex 3 Q 2	×		×		×		×			×		×			×			×

Commentaire

Le suivi de l’évolution des aptitudes des étudiants dans les séances de remédiation montre que dans la première période de l’expérimentation 1 (avant l’intervention de l’enseignant), malgré les progrès constatés au niveau de l’organisation des pas de raisonnement et de la rédaction, des difficultés persistent encore, à des degrés différents, sur le plan de l’exploration de l’espace de résolution, de l’identification du problème intermédiaire, de la mise en évidence du cadre de travail approprié, ainsi qu’au niveau du choix des moyens de reformulation et de l’usage du symbolisme mathématique, tenant compte des remarques qui leur ont été adressées par l’enseignant, et qui visaient à les sensibiliser aux insuffisances de leur production ou à leur indiquer, implicitement, de nouvelles orientations de travail, ont réussi à surmonter les difficultés et obstacles rencontrés au début de leur travail. Dans la deuxième expérimentation, des progrès commencent à être constatés au niveau de l’exploration de l’espace de résolution, du choix des registres de représentation sémiotiques, ainsi que du choix des moyens ostensifs et de reformulation adaptés aux techniques de travail choisies. Mais le manque de sensibilité aux formes symboliques disponibles et à l’intérêt qu’elles peuvent apporter dans la résolution du problème posé, a entraîné des difficultés dans l’identification du problème intermédiaire et a conduit à un blocage. Comme dans la première expérimentation, les indications apportées par l’enseignant ont permis aux étudiants de dépasser les difficultés rencontrées et d’apporter les modifications nécessaires à leur travail.

Dans la troisième expérimentation, dont l'objectif était d'évaluer les acquis éventuels des étudiants dans l'ingénierie de façon générale (y compris le travail fait au cours de l'année et qui a concerné toute la classe), les progrès apparaissent à plusieurs niveaux. Il est à signaler toutefois que les étudiants ont dû passer par plusieurs tentatives (dont certaines se sont avérées inadaptées à la situation du problème) et essayer plusieurs pistes de travail, avant d'arriver à la bonne solution. Ceci, bien qu'ayant nécessité un temps substantiel de réflexion et de travail (presque deux heures), compte tenu de la longueur de l'exercice proposé, atteste l'existence d'acquis concernant l'activité de résolution de problèmes et montre que l'apprentissage visé a donné des effets positifs sur les aptitudes pratiques des étudiants. Nous notons dans ce contexte que l'heuristique de particularisation, utilisée dans le premier test diagnostique était très productive pour les étudiants dans l'exploration de l'espace de résolution, et dans le choix de certaines techniques de travail. Aussi, la mise en évidence de l'intérêt que présente l'arrangement des indices dans les relations $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$ et son emploi dans la réponse à la question 1, montre que les étudiants ont tiré profit de la deuxième expérimentation dont l'objectif se centrait autour du rôle que peuvent jouer les formes d'écriture symbolique dans la résolution de certains problèmes. Ceci étant, deux difficultés ont empêché les étudiants de ce groupe de terminer la résolution de la deuxième question, à savoir : la manipulation du symbolisme mathématique dans des expressions particulièrement complexes et la possibilité de procéder à un changement de points de vue adéquat. Notons que ces deux points n'ont pas fait l'objet d'un travail spécifique dans les tests précédents. Nous remarquons finalement que l'usage des éléments de logique n'a pas été toujours conforme aux normes. Si ceci n'a pas constitué un obstacle majeur pour l'exploration de l'espace de résolution, ni pour la recherche et le développement des stratégies de travail, il a fait obstacle dans l'exécution de certains pas de raisonnements constituant ces stratégies.

XII. 3. 2. Evolution des aptitudes des étudiants du groupe 2

Le tableau ci-dessous rappelle les étudiants qui constituent le groupe 2 ainsi que leurs moyennes de mathématiques pour le premier et le deuxième trimestre de l'année universitaire.

Tableau 14 (Moyennes (sur 20), groupe 2)

Etudiant	E_7	E_8	E_9
Moyenne 1^er^ trimestre	10,08	10,52	10,99
Moyenne 2^er^ trimestre	10,53	10,40	11,34

Les résultats des étudiants de ce groupe reflètent un assez bon niveau en mathématiques.

Nous récapitulons les résultats concernant les séances de l'ingénierie dans les tableaux qui suivent :

Tableau 15 : Aptitudes stratégiques (groupe 2)

	Exploration de l'espace de résolution				**Problème intermédiaire**			**Contrôle du processus heuristique de raisonnement**			
	Recherche d'une piste de travail		Piste de travail adoptée		Identifié		Non identifié	Pas de raisonnement		Processus	
	Problématique	Accessible	Direct	Indirect	Implicitement	Explicitement		Conn-ectés	Dé-connectés	Cohérent	In-cohé-rent
ExD1	×		×		×				×		×
ExD2 Q1		×	×					×		×	
ExD2 Q2		×	×					×		×	
Ex 1		×	×		× (pour pi_1)		× (pour pi_2)	×		×	
						×					
Ex 2		×	×				×		×	×	
						×		×			
Ex 3 Q 1		×		×		×		×		×	
Ex 3 Q 2		×		×				×		×	

Tableau 16 : Aptitudes relatives à l'exécution de la stratégie (groupe 2)

	Identification du cadre de travail approprié à la résolution (R : réussi D : difficile)		Choix des moyens de reformulation (A : approprié D : difficile)		Usage du formalisme symbolique — Changement des registres sémiotiques (R : réussi D:difficultés)		Usage du formalisme symbolique — Choix des moyens ostensifs (A :approprié D :difficultés)		Usage du formalisme symbolique — Manipulation du formalisme symbolique (A :approprié D :difficultés)		Usage des éléments de logique (C : conforme)			Niveau de rédaction (C: conforme A: acceptable)			Changement de points de vue (R : réussi D : difficile)	
	R	D	A	D	R	D	A	D	A	D	C	+ou– C	Non C	C	A	Non C	R	D
ExD1		×		×		×		×		×						×		
ExD2 Q1	×			×		×		×		×		×			×			
ExD2 Q2	×		×		×		×		×			×			×			
Ex 1		×		×	×		×			×					×			
	×		×						×					×				
Ex 2		×	×		×		×			×				×				
	×								×									
Ex 3 Q 1	×		×		×		×		×			×			×			
Ex 3 Q 2	×		×		×		×			×		×			×			×

Commentaire

Dans la première période de l'expérimentation 1, malgré les progrès enregistrés au niveau de l'exploration de l'espace de résolution, du choix des moyens ostensifs et des registres de représentation sémiotiques, ainsi que sur le plan de la rédaction et de la cohérence du processus heuristique de raisonnement, nous observons que des difficultés persistent encore chez les étudiants de ce groupe, et ce notamment au niveau de l'identification du problème intermédiaire et du cadre de travail approprié à la résolution, au niveau du choix des moyens de reformulation adéquats, ainsi que dans l'usage du symbolisme mathématique. Les étudiants ont réussi ensuite à dépasser ces difficultés en réfléchissant à la remarque de l'enseignant à propos de l'étude du problème dans le cas particulier des espaces vectoriels de dimension finie. Dans le deuxième exercice, la difficulté à voir l'intérêt que présentent les formes symboliques disponibles pour résoudre le problème a empêché les étudiants d'identifier le problème intermédiaire, et a conduit à un blocage dans la première période de résolution. Ceci, malgré les aptitudes d'exploration, de gestion des représentations sémiotiques et de rédaction dont ils ont fait preuve. Dans la deuxième période de l'expérimentation, les étudiants, tenant compte de l'indication donnée par l'enseignant, sont arrivés à apercevoir et à exploiter les potentialités que présentent les formes d'écriture symboliques données dans l'énoncé et ont réussi à surmonter les obstacles rencontrées dans la première période de l'expérimentation. Dans la troisième expérimentation, aussi bien dans la première que dans la deuxième question, nous enregistrons des progrès dans la maîtrise des pratiques intervenant dans l'activité de résolution de problèmes. Il est à noter à ce propos que la manière dont ont été gérées les différentes étapes de résolution de l'exercice montre que les étudiants ont su tirer profit de leur travail dans les séances précédentes. Ceci apparaît notamment avec la maîtrise du jeu entre le particulier et le général dans l'exploration de l'espace de résolution, dans l'usage de l'objet fonction et de la propriété de bijectivité comme outils pour construire des techniques de travail, dans l'exploitation des ressources sémiotiques, ainsi que dans la maîtrise du travail inter-registres. Néanmoins, nous enregistrons, comme pour les étudiants du premier groupe, des difficultés dans l'usage du symbolisme mathématique dans des expressions particulièrement complexes (comme les difficultés constatées pour gérer, dans le cas général, les différents symboles que renferme l'équation $\sum m_{ij}\varphi(E_{ij}) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} m_{ki}\right)$), ainsi que pour procéder à des changements de points de vue adaptés aux objectifs des problèmes rencontrés. Par ailleurs, comme pour le premier groupe l'usage des éléments de logique n'était pas toujours conforme aux normes et a constitué parfois un obstacle pour la réalisation de certaines techniques où la quantification intervient dans la formulation de la tâche. Remarquons finalement que les pistes de travail explorées et les techniques de résolution adoptées par les étudiants de ce groupe dans cette troisième expérimentation font preuve d'un travail mieux structuré, et d'aptitudes plus développées que ceux des étudiants du premier groupe.

XII. 3. 3. Evolution des aptitudes des étudiants du groupe 3

Le tableau ci-dessous rappelle les étudiants qui constituent le groupe 3 ainsi que leurs moyennes de mathématiques dans le premier et le deuxième trimestre de l'année universitaire.

Tableau 17 (Moyennes (sur 20), groupe 3)

Etudiant	E_{11}	E_{10}	E_{12}
Moyenne 1er trimestre	11,72	11,03	13,22
Moyenne 2er trimestre	12, 64	11,50	13,36

Notons que l'étudiant E_{12} s'est absenté à la dernière séance de l'ingénierie.

Pour ce groupe, nous pouvons dire qu'il s'agit d'étudiants ayant un bon niveau en mathématiques.

Nous récapitulons les résultats concernant les séances de l’ingénierie dans les tableaux qui suivent :

Tableau 18 : Aptitudes stratégiques (groupe 3)

	Exploration de l’espace de résolution				**Problème intermédiaire**			**Contrôle du processus heuristique de raisonnement**			
	Recherche d’une piste de travail		Piste de travail adoptée		Identifié		Non identifié	Pas de raisonnement		Processus	
	Problématique	Accessible	Direct	Indirect	Implicitement	Explicitement		Conn-ectés	Déco-nnecté s	Cohérent	Incohé-rent
ExD1	×		×		×				×		×
ExD2 Q1		×	×					×		×	
ExD2 Q2		×	×					×		×	
Ex 1		×	×		× (pour pi_2)	× (pour pi_1)		×		×	
						×					
Ex 2		×	×			×		×		×	
Ex 3 Q 1		× et (économique)		×		×		×		×	
Ex 3 Q 2		×		×				×		×	

Tableau 19 : Aptitudes relatives à l’exécution de la stratégie (groupe 3)

	Identification du cadre de travail approprié à la résolution (R : réussi D : difficile)		**Choix des moyens de reformulation** (A : approprié D : difficile)		**Usage du symbolisme mathématique**						**Usage des éléments de logique** (C : conforme)			**Niveau de rédaction** (C: conforme A: acceptable)			**Changement de points de vue** (R : réussi D : difficile)	
					Changement des registres sémiotiques (R : réussi D:difficultés)		**Choix des moyens ostensifs** (A :approprié D :difficultés)		**Manipulation du formalisme symbolique** (A :approprié D :difficultés)									
	R	D	A	D	R	D	A	D	A	D	C	+ou– C	Non C	C	A	Non C	R	D
ExD1		×		×		×		×		×						×		
ExD2 Q1	×			×		×		×		×		×			×			
ExD2 Q2	×		×		×		×		×			×			×			
Ex 1	× (partiellement)		×		×		×		×					×				
	×																	
Ex 2	×		×		×		×		×					×				
	×																	
Ex 3 Q 1	×		×		×		×		×		×			×				
Ex 3 Q 2	×		×		×		×		×		×			×			×	

Commentaire

A part les difficultés apparues dans la première période de l’expérimentation 1, et qui ont concerné l’identification du cadre linéaire dans lequel il fallait penser le problème de prolongement de l’application à déterminer, ce qui a entraîné des difficultés dans la mise en évidence du deuxième problème intermédiaire de l’exercice, les étudiants de ce groupe ont fait preuve d’une bonne maîtrise des aptitudes de résolution requises dans les trois expérimentations de remédiation, et aussi d’habilités de réflexion, d’exploration et de travail plus développées que celles des étudiants des deux premiers groupes.

Ce qui a caractérisé le plus le travail des étudiants de ce groupe, par rapport aux productions des deux premiers groupes, ce sont surtout, l’économie dans les processus de résolution adoptées, l’exploitation pertinente des formes sémiotiques des symboles disponibles, la flexibilité dans l’usage des objets et ostensifs mathématiques, et la possibilité à mettre au profit, de façon appropriée, le contexte et les données de l’exercice et d’enrichir, en cas de besoin, le milieu du problème avec de nouvelles données. Il est à noter aussi que ces étudiants, contrairement à ceux des autres groupes, sont parvenus à effectuer le changement de point de vue nécessaire pour répondre à la deuxième question de l’expérimentation 3.

Ceci étant, il nous semble d’un autre côté que les étudiants de ce groupe, comme ceux des deux premiers groupes, ont su tirer profit des séances de l’ingénierie pour améliorer leurs aptitudes de résolution de problèmes. Ceci apparaît notamment dans l'usage, à plusieurs reprises, de l'heuristique de spécification lors de la résolution du troisième exercice, et aussi dans la possibilité de circonscrire leurs réflexions dans le cadre approprié au problème à résoudre.

XII. 4. Conclusion

Le suivi du travail des étudiants avant, au cours et à la fin des séances de l'ingénierie montrent que des progrès certains sont enregistrés chez les étudiants des trois groupes concernant les aptitudes pratiques intervenant dans l'activité de résolution de problèmes. A notre avis, deux facteurs ont contribué à la réalisation de ces progrès, le premier concerne le travail que nous avons instauré dès le début de l'année, dans le cadre de l'enseignement ordinaire de la classe, et qui se rapporte à la participation des étudiants à la préparation et la présentation de séquences de cours en classe et à multiplier les devoirs maison. Ce travail a permis, semble-t-il, d'améliorer la qualité de rédaction et l'aptitude de résolution des exercices de démonstration, effet qui a été remarqué dès le début de l'ingénierie.

Le deuxième facteur qui nous semble être à l'origine des progrès enregistrés est l'organisation de séances spécifiques visant l'acquisition d'aptitudes pratiques intervenant dans l'activité de résolution de problèmes. Dans ce contexte, vu les contraintes institutionnelles et d'enseignement qui ont pesé sur les circonstances de réalisation de l'ingénierie, et notamment sur le nombre de séances organisées, notre attention s'est focalisée sur trois aptitudes qui nous ont semblé essentielles dans la résolution des problèmes qui intéressent le contexte de notre recherche, et se sont avérées problématiques pour les étudiants concernés. Ces aptitudes concernent l'exploration de l'espace de résolution, l'importance d'identifier les liens et les spécificités des cadres ensembliste, algébriste et linéaire de travail, et l'usage du symbolisme mathématique. Les problèmes posés dans les deux premières séances de remédiation, le choix des difficultés caractérisant ces problèmes, les modalités d'organisation du travail des étudiants et d'intervention de l'enseignant et le temps accordé aux étudiants dans chacune des séances pour réaliser leur travail, semblent avoir permis d'atteindre, dans une certaine mesure, les objectifs d'apprentissage visés, et d'améliorer, un tant soit peu, certaines aptitudes chez les étudiants comme nous l'avons constaté dans les analyses ci-dessus.

Néanmoins, en dépit de ces progrès, nous constatons que des difficultés, comme la gestion du symbolisme mathématique dans des expressions particulièrement complexes, la possibilité de procéder à des changements de points de vue, la conformité dans l'usage des éléments de logique sont apparues encore problématiques pour certains étudiants. Concernant ce dernier point, les difficultés dans le contrôle des quantificateurs et l'insuffisance dans l'appropriation de leur sens et de leur rôle dans le texte mathématique ont constitué des obstacles pour la réalisation de certaines tâches. Ce constat rejoint les résultats obtenus par Chellougui (2004) concernant les difficultés constatées chez des étudiants tunisiens de première année scientifique dans la gestion des quantificateurs dans les énoncés mathématiques et appui l'idée de Durand-Guerrier et Arsac (2003) à propos de la mise en place d'un enseignement plus systématique des règles de raisonnement prenant en compte l'articulation entre les aspects syntaxiques et sémantiques de la structure logique des énoncés mathématiques.

Ceci dit, sur le plan stratégique, nos analyses ont permis de montrer qu'adopter des méthodes de résolution non indiquées, ou procéder à un changement de cadre de travail non suggéré, posent encore problème pour les étudiants des trois groupes.

Sachant que dans les séances de remédiation nous n'avons pas organisé un travail spécifique visant à surmonter les difficultés constatées, les insuffisances observées comme les progrès enregistrés concernant les aptitudes visées dans les séances de remédiation appuient, à notre avis, l'idée de Castela (2008a) concernant la nécessité d'organiser l'enseignement des enjeux d'apprentissage que les apprenants n'arrivent pas à réaliser par eux mêmes et de participer à les préparer à assumer la responsabilité autodidacte.

Conclusion de la thèse et perspectives de recherche

Il est bien connu, en Tunisie comme dans plusieurs autres pays, qu'en mathématiques, la transition Secondaire/Supérieur s'accompagne de difficultés qui rendent la tâche des enseignants comme celle des étudiants de plus en plus difficile. Les multiples réformes qui sont succédées depuis celle des « mathématiques modernes », avec ce qui les a accompagnées d'évolution dans les contenus et de changements dans les approches d'enseignement (par objectifs, par compétences…) ne semblent pas parvenir à atténuer les difficultés ressenties. La baisse du niveau des étudiants ou le manque d'harmonisation des programmes d'étude du Secondaire et du Supérieur qu'on a coutume d'évoquer comme responsables de cette situation, ne semblent pas non plus suffire à justifier les difficultés constatées. Plusieurs recherches en didactique des mathématiques ont montré que l'origine des dites difficultés ne réside pas uniquement dans les caractéristiques individuelles des nouveaux bacheliers (puisqu'on les rencontre chez les bons comme chez les moins bons) et qu'elles dépassent les simples extensions et approfondissement qui se produisent au niveau des contenus et des domaines d'étude lors du passage du Secondaire au Supérieur. La prise en compte par ces recherches de la diversité des facteurs intervenant dans l'opération d'enseignement/apprentissage a permis de montrer l'importance des dimensions culturelles et institutionnelles dans les changements qui se produisent au niveau de la transition Secondaire/Supérieur, particulièrement en mathématiques. En présentant cette transition comme la transition entre deux cultures, Artigue (2004) exprime que c'est au niveau implicite, ou *informel*, correspondant « *aux schémas d'action et de pensée, aux manières non explicitées de faire les choses, de penser et raisonner qui résultent de l'expérience et de la pratique* » (p. 2), que se situent essentiellement les ruptures qui déstabilisent enseignants et élèves. D'un autre côté, l'approche anthropologique du didactique (Chevallard, 2003b) considère que « *la conformité à l'institution est […]davantage prisée que la capacité personnelle à engendrer des rapports novateurs* » (ibid., p. 4). Selon cette approche, la connaissance est de nature institutionnelle, en ce sens qu'il n'y a pas une seule manière de connaître un objet, mais une *pluralité indéfinie*. Cette pluralité est liée à la vie de la connaissance dans les différentes institutions où elle prend place, aux *manières de faire et de penser propres* imposées par chaque institution à ses sujets apprenants ainsi qu'aux positions qu'occupent ces sujets dans l'institution. Dans cette perspective, il n'existe pas *un bon rapport universel* à la connaissance, reconnu comme tel en toute institution. Etre *bon sujet* ou *mauvais sujet* devient inhérent à la conformité au rapport institutionnel du rapport du sujet, en une position donnée *p*, aux objets de l'institution existant dans cette position. Deux décennies vécues dans l'enseignement Secondaire (ES) et dans les classes préparatoires scientifiques (CPS1) (en Tunisie), nous ont permis de constater le désarroi et l'incompréhension des étudiants orientés vers ces classes devant les difficultés qu'ils éprouvent dans l'apprentissage des mathématiques et ceci particulièrement en Algèbre, et aussi la chute brutale de leur possibilités de réussite dans les épreuves d'évaluation et la baisse spectaculaire de leurs notes par rapport à ce qu'elles étaient au lycée. Ceci a amené certains étudiants à considérer l'enseignement de l'Algèbre en CPS1 comme un « *choc* » et d'autres à le percevoir en « *contradiction* » avec leurs connaissances antérieures. Attribuer cette situation à une baisse de niveau ou à des programmes non adaptés lors du passage du Secondaire au Supérieur, serait, à notre avis, une vision simpliste du phénomène de transition et un désengagement de l'institution vis-à-vis de sa responsabilité de *soutenir* ses sujets apprenants une fois qu'elle leur a accordé une position en son sein. Nous situant dans l'approche anthropologique, notre thèse s'est fixé pour objectif d'étudier comment interviennent les choix institutionnels d'enseignement dans l'apparition des difficultés constatées dans la transition Secondaire/Supérieur et d'envisager des possibilités d'action sur le système didactique d'enseignement en vue d'atténuer ces difficultés. Considérant les notions ensemblistes fonctionnelles et le formalisme mathématique comme des objets qui illustrent fortement les difficultés de cette transition nous avons opté pour ces notions pour l'étude de notre problématique. Ce choix résulte de ce que notre parcours professionnel nous a permis de constater comme différences dans les environnements écologique et praxéologique de ces notions entre les institutions ES et CPS1. Ces différences et changements brusques interviennent tout particulièrement dans le domaine de l'Algèbre, réputé assez délicat pour les étudiants entrant à l'université, et c'est ce qui nous a conduits à privilégier ce contexte. Par ailleurs, le choix des classes préparatoires scientifiques, comme terrain pour notre recherche, nous a semblé intéressant pour différentier ce qui relève réellement des choix institutionnels d'enseignement de ce qui relèverait d'apprentissages normalement attendus en fin de secondaire mais non réalisés.

I. Cadres théoriques de la recherche et revue de travaux sur la transition Secondaire/Supérieur

La théorie anthropologique du didactique a constitué le cadre général d'analyse et d'interprétation des travaux de notre recherche. La modélisation donnée par cette théorie pour l'étude des objets *matériels* et *immatériels* constituant d'une institution, leurs apparition et disparition, leurs formation et évolution, leurs liens et rapports mutuels, nous a donné un outil efficace pour analyser, comprendre et interpréter les divers éléments et facteurs intervenant dans la transition Secondaire/Supérieur. Nous avons également profité des extensions réalisées dans le cadre de cette théorie concernant notamment la continuité et la discontinuité des organisations praxéologiques (Bosch et al., 2004) et la prise en compte de la composante pratiques dans l'activité mathématique (Castela, 2007b), pour l'étude de l'organisation des environnements praxéologiques mis en place dans chacune des institutions ES et CPS1 et des modes de fonctionnement des praxéologies mathématiques qui les constituent. Pour l'étude des difficultés qu'éprouvent les étudiants dans l'usage du formalisme mathématique et la mise en œuvre des notions ensemblistes fonctionnelles dans la résolution des problèmes, nous avons trouvé aussi utile de faire appel à des travaux qui se sont intéressés aux aspects cognitifs de la transition : niveaux d'usage des connaissances (procédural/structurel) et leur flexibilité (Dubinsky, 1991, et Tall, 2002), niveaux de mise en fonctionnement des connaissances (Robert, 1998), rôle de l'écrit dans la compréhension et la production des démonstrations (Duval, 2000). Par ailleurs, la revue de travaux de recherche qui se sont intéressés à la transition Secondaire/Supérieur nous a permis de montrer que les difficultés résultantes de cette transition ne sont pas spécifiques à un pays ou à une institution donnée. Ces difficultés apparaissent plutôt caractéristiques de cette transition et se manifestent à plusieurs niveaux concernant l'enseignement/apprentissage des mathématiques : formalisme mathématique, usage des éléments de logique, démonstration et rigueur mathématique, niveau d'abstraction des objets d'enseignement…

Nous servant des outils théoriques évoqués ci-dessus et nous appuyant sur les travaux antérieurs, notre travail s'est organisé selon les dimensions suivantes :

1) Etude des rapports des institutions ES et CPS1 aux notions ensemblistes fonctionnelles ;

2) Etude des rapports personnels des étudiants de CPS1 aux notions ensemblistes fonctionnelles à la fin des études secondaires et évolution de ces rapports dans l'institution CPS1 ;

3) Etude des modalités de travail personnel des étudiants de CPS1 et de leurs effets sur la formation en mathématiques de ces derniers ;

4) Elaboration et mise en place d'une ingénierie didactique à visée notamment de remédiation.

Nous synthétisons dans ce qui suit les principaux résultats auxquels nous sommes parvenus à travers le travail mené suivant ces différentes dimensions.

II. Rapports des institutions ES et CPS1 aux notions ensemblistes fonctionnelles

En nous basant sur les documents d'enseignement officiels (programmes, manuels officiels et sujets de baccalauréat pour ES et programmes et fiches de travaux dirigés pour CPS1), l'étude des rapports institutionnels aux notions ensemblistes fonctionnelles a mis en évidence une rupture entre les environnements praxéologiques relatifs aux dites notions mis en place dans les institutions ES et CPS1. Cette rupture se manifeste essentiellement sur les plans suivants :

- *Caractéristiques des praxéologies mathématiques* : dans ES, elles sont, dans le topos de l'élève, essentiellement ponctuelles, intervenant surtout au niveau pratico-technique et les techniques associées sont de façon dominante rigides. Dans CPS1, en revanche, elles sont surtout locales, intervenant au niveau technologico-théorique et les techniques associées sont rarement routinières ou rigides.

- *Structuration du savoir et fonctionnement des connaissances* : dans ES, malgré la présence des notions ensemblistes fonctionnelles dans divers thèmes du curriculum, nous remarquons un manque dans l'institutionnalisation des notions ensemblistes utilisées (bijection, composition d'applications, image d'un ensemble par une application…) et une absence de structuration dans leur présentation. Ceci semble empêcher l'intégration des organisations mathématiques ponctuelles (OMP) mises en place dans les manuels dans des organisations mathématiques locales (OML), induit un écart entre le discours technologique employé dans les développements théoriques des thèmes d'étude (structurel, formel) et celui requis dans la résolution des exercices et limite le fonctionnement des dites notions au niveau procédural pour les élèves. *Le niveau institutionnel de fonctionnement des connaissances dans ES résultant de cet état, est, dans le topos des élèves, essentiellement technique.* En CPS1, les notions ensemblistes fonctionnelles sont présentées, dès le départ, de façon structurée et en toute généralité. L'environnement praxéologique relatif au travail de ces notions s'approche, dans une certaine mesure, de celui utilisé dans les développements théoriques du cours. Le fonctionnement des connaissances dans le topos des étudiants est par conséquent très proche de celui qu'il est dans les développements théoriques du cours, et les praxéologies mathématiques mises en œuvre dans les exercices sont essentiellement locales. Nous avons remarqué en même temps une négligence quant à l'usage des connaissances au niveau technique. Ceci rend difficile le retour sur les OMP étudiées dans ES, l'intégration des OMP dans des OML et la mise en évidence du lien entre les niveaux procédural et structurel dans le fonctionnement des connaissances en jeu. *Dans ces conditions, les notions ensemblistes fonctionnelles en CPS1 fonctionnent au niveau formel-structurel*, et leur emploi, dans le topos des étudiants, se rapproche, au niveau des méthodes et du discours technologique, du fonctionnement qui est le leur dans les développements théoriques associés.

Les caractéristiques des environnements praxéologiques relatives à l'enseignement des notions ensemblistes fonctionnelles dans les institutions ES et CPS1, et la rupture constatée au niveau de leur présentation comme au niveau de leur fonctionnement nous ont incités à étudier l'effet de cette situation sur la formation des étudiants et leurs possibilités d'apprentissage. C'est ce qui a constitué l'objet de la partie suivante de notre thèse.

III. Rapports personnels des étudiants de CPS1 aux notions ensemblistes fonctionnelles

Pour étudier ces rapports personnels et voir leurs évolutions, nous nous sommes intéressés à deux moments d'étude particuliers concernant l'enseignement des notions ensemblistes fonctionnelles. Le premier se situe à la fin des études secondaires et le deuxième vers la fin de la première année en CPS1.

Pour le premier moment, un test *diagnostique* a été passé par deux classes d'étudiants de CPS1 le premier jour de la rentrée universitaire, avant le commencement des cours du supérieur. Ce test avait pour objectif l'étude de l'état des connaissances des étudiants à la fin des études secondaires à propos des notions ensemblistes fonctionnelles et de leur capacité à les mettre en œuvre dans la résolution des exercices. L'analyse des réponses des étudiants aux exercices du test a montré que les connaissances des étudiants sont essentiellement d'ordre technique. Ainsi, bien que les formulations données des théorèmes et définitions mis en jeu soient dans la plupart des cas non conformes, les étudiants ont montré des aptitudes dans la reproduction de techniques de travail apprises (sans revenir aux justifications technologiques associées ni rechercher la conformité des réponses données avec les discours technologiques associés) comme dans la construction d'applications et de bijections. D'un autre côté, nous avons constaté une fragilité dans l'usage et la gestion du symbolisme mathématique et des difficultés d'action pour réaliser des tâches non familières, résultant aussi bien de la manipulation des représentations sémiotiques que de la mobilisation des connaissances en jeu. Ce constat montre que *le niveau personnel de fonctionnement des connaissances* à la fin des études secondaires, pour les étudiants concernés, est essentiellement *technique* et se trouve ainsi conforme au *niveau institutionnel de fonctionnement des connaissances* dans l'institution ES relatif au topos des élèves. Ceci met en évidence l'influence des choix institutionnels d'enseignement dans l'institution ES sur la forme de connaissances des étudiants ainsi que dans l'orientation de leurs modalités de travail.

Concernant le deuxième moment, il a concerné l'étude de l'évolution des rapports des étudiants aux notions ensemblistes fonctionnelles et leur capacité à mettre en fonctionnement ces notions dans la résolution de problèmes. Après deux trimestres d'étude en CPS1, pendant lesquels les étudiants ont suivi un enseignement où aucune action didactique spécifique n'a été introduite au niveau de l'enseignement du cours d'Algèbre, un test *d'évaluation* a été passé par les étudiants concernés par le premier test.

L'analyse des réponses des étudiants à ce test fait état d'acquis chez les étudiants au niveau de la connaissance du cours et la mobilisation des notions mises en jeu dans les exercices. Toutefois des difficultés récurrentes ont été observées dans les différents exercices proposés. Ces difficultés concernent aussi bien l'usage des notions ensemblistes fonctionnelles que la pratique de résolution de problèmes. Ainsi, pour le premier point, nous avons constaté des difficultés dans la gestion de la multiplicité des points de vue sous lesquels se présentent les notions mises en jeu selon les cadres d'étude (ensembliste, structure de groupe, structure linéaire, point de vue matriciel…), dans la gestion et l'appropriation des représentations sémiotiques, pour distinguer le dédoublement du statut des ostensifs dans un même contexte (par exemples, variable et paramètre, matrice image et matrice associée à une application dans le cas d'applications linéaires entre espaces matriciels…) comme également dans la mise en œuvre des justifications technologiques que requièrent certaines tâches. Concernant le deuxième point, les réponses des étudiants ont mis en évidence des difficultés concernant notamment la mise en relation des données de l'exercice, l'identification de pas de raisonnement non indiqués et l'adaptation des connaissances apprises au contexte de résolution des tâches. Des difficultés sur le plan de la rédaction, comme la non-conformité dans l'usage des connecteurs de logique, l'oubli et/ou la négligence des quantificateurs, les glissements de notations… ont été également constatées.

La comparaison de ce constat avec celui établi à l'issue du test diagnostic met en évidence des améliorations sur le plan de la connaissance du savoir enseigné et des possibilités de mobiliser ce savoir dans des tâches familières et moins familières, mais il montre aussi la persistance de difficultés concernant notamment l'usage et la gestion du symbolisme mathématique et la mise en œuvre du savoir enseigné dans la résolution de problèmes. De nouvelles difficultés sont apparues, dues surtout à la multiplicité des cadres d'étude où sont travaillées les notions fonctionnelles dans l'institution CPS1. Les étudiants se trouvent ainsi peu familiarisés à gérer la multiplicité de points de vue sous lesquels se présentent ces notions. La résistance de ces difficultés chez des étudiants supposés motivés, n'épargnant pas leurs efforts pour se former et réussir et profitant d'un enseignement mathématique de niveau assez élevé, rend difficiles l'attribution des difficultés constatées à des caractéristiques personnelles des étudiants, et conduit à impliquer des facteurs dus aux choix institutionnels d'enseignement et aux habitudes de travail des étudiants.

En effet, la rupture mise en évidence dans la transition ES/CPS1 à propos des rapports institutionnels aux notions ensemblistes fonctionnelles semble être difficile à dépasser, y compris par ces étudiants. Ceux-ci se trouvent, semble t-il, encore très dépendants de la culture mathématique du secondaire, caractérisée par une contextualisation des thèmes étudiés, un discours technologique peu opérant dans le topos de l'élève et par un travail centré sur des praxéologies mathématiques ponctuelles, rigides, isolées et intervenant essentiellement au niveau pratico-technique. La négligence par l'institution CPS1 du travail d'ordre technique, la non considération du symbolisme mathématique comme enjeu d'apprentissage et l'insuffisance dans le travail d'intégration des praxéologies ponctuelles étudiées, accroissent la brutalité de changements auxquels les étudiants ont du mal à s'adapter pour répondre aux attentes de l'institution CPS1. D'un autre côté, des habitudes de travail personnel non adaptées aux exigences d'apprentissage et de formation dans l'institution CPS1 pourraient aussi être à l'origine des difficultés observées chez les étudiants. Pour connaître les objets et modalités de travail personnel des étudiants et leurs effets sur les possibilités d'apprentissage, nous y avons consacré la partie suivante de la thèse.

IV. Modalités de travail personnel des étudiants de CPS1 et leurs effets

Vers la fin de l'année universitaire, nous avons proposé aux étudiants concernés par les tests précédents (diagnostique et d'évaluation) un questionnaire visant à étudier l'influence des contraintes institutionnelles sur leurs modes de travail personnel, les effets de ces modes de travail sur les formes d'apprentissage des étudiants, ainsi que les liens éventuels entre ces modes de travail et les difficultés constatés chez les étudiants dans le test d'évaluation. Dans leurs réponses, les étudiants ont évoqué les difficultés qu'ils éprouvent dans leur travail mathématique, particulièrement en Algèbre. Ils les attribuent à la rupture qu'ils ressentent entre les contenus de savoir enseignés dans le Secondaire et dans le Supérieur (notamment, le niveau d'abstraction, le formalisme et l'axiomatique des notions d'Algèbre), aux changements qui se produisent au niveau du rapport cours/exercices (surtout pour l'importance des démonstrations de cours dans la résolution des exercices), aux moyens de mettre en fonctionnement le savoir enseigné dans les exercices et à la rédaction comme composante importante de l'activité mathématique au Supérieur. Pour surmonter de telles difficultés, la plupart des étudiants, faute de préparation appropriée au Secondaire et d'une prise en charge par l'enseignement des apprentissages qui font défaut, semblent avoir trouvé dans la mémorisation et la reproduction d'exercices corrigés un moyen dont ils espèrent qu'il permette de surmonter les difficultés qu'ils éprouvent. Les productions des étudiants dans le test d'évaluation montrent que ces comportements s'avèrent insuffisants pour permettre les adaptations visées. En quête de moyens pouvant aider un tant soit peu les étudiants à surmonter leurs difficultés, et prenant appui sur les travaux de Castela (2008b), nous avons conçu et expérimenté une ingénierie didactique se fondant sur l'hypothèse qu'*une action appropriée au niveau de l'enseignement pourrait favoriser l'acquisition de connaissances d'ordre pratique qui, bien qu'elles débordent le savoir théorique, s'avèrent nécessaires pour le fonctionnement du savoir enseigné.* Nous décrivons cette ingénierie dans le paragraphe suivant.

V. Une ingénierie de remédiation

Remarquons tout d'abord que les travaux antérieurs ont demandé toute une année universitaire pour être réalisés. Ceci nous a contraints à expérimenter notre ingénierie de remédiation l'année suivante avec une autre population d'étudiants. Les réponses des étudiants de cette nouvelle population au même test diagnostique, le suivi régulier de leur travail en classe et l'examen de leurs productions dans les évaluations ordinaires nous ont permis d'émettre l'hypothèse que les résultats obtenus suite aux travaux antérieurs pouvaient être étendus à la nouvelle population. Tenant compte alors de ces résultats et nous appuyant d'une part sur les travaux de Duval à propos de l'importance de l'écrit dans l'activité mathématique, de par ce qu'il exige de contrôle conscient sur le texte produit, de structuration et d'organisation du discours et de ce qu'il génère de dynamique de questionnement et de souci de rigueur, et d'autre part sur les travaux de Castela concernant le fonctionnement mathématique et les enjeux ignorés d'apprentissage et adhérant à l'idée qu'il revient à l'institution d'organiser un système didactique visant explicitement à permettre l'apprentissage de connaissances d'ordre pratique, nous avons conçu notre travail de remédiation autour de deux axes :

1) *La pratique de l'écrit ;*

2) *Le fonctionnement mathématique.*

Pour le premier point, l'expérimentation s'est inscrite dans le cadre de l'enseignement ordinaire d'une classe CPS1 tout au long de l'année universitaire. Dans ce contexte, nous avons programmé deux modalités de travail spécifiques : des interventions au niveau des cours, concernant la préparation et la présentation au tableau de démonstrations de cours par les étudiants, et un travail à la maison concernant la résolution d'exercices, suivi par des corrections et des discussions en classe, sur des périodes de temps plus étendues que d'habitude, à propos des difficultés et erreurs les plus fréquentes rencontrées. Pour le second point, une ingénierie didactique, s'étalant sur cinq séances, a été expérimentée au troisième trimestre de l'année universitaire avec un groupe réduit d'étudiants de la même classe. Cette ingénierie comportait deux parties : une partie diagnostique réalisée en deux séances et une partie de remédiation et d'évaluation qui s'est déroulée sur les trois autres séances. La partie diagnostique avait pour objectif d'identifier de façon plus précise l'origine des difficultés des étudiants dans l'activité de résolution de problèmes, notamment celles liées aux processus de raisonnement, et ceci par le suivi de leur travail lors de la résolution d'exercices. Cette partie de l'ingénierie a mis en évidence des acquis chez les étudiants sur le plan de la connaissance du savoir enseigné, et des aptitudes dans la réalisation des tâches de démonstration. Par ailleurs, nos analyses ont permis d'identifier des difficultés dans le contrôle, l'exploration et l'exploitation du Milieu auquel les étudiants étaient confrontés dans les exercices, spécifiquement dans les tâches de construction ou de preuve d'existence d'objets mathématiques. Ces difficultés résultaient surtout d'un manque de sensibilité aux ostensifs, d'interprétations inadaptées des représentations sémiotiques, de reformulations de données non pertinentes et/ou non opératoires. Ceci a conduit à des difficultés dans l'exploration des espaces de résolution des exercices, dans l'élaboration de stratégies de travail et à des blocages dans le raisonnement.

Dans l'objectif de pallier les insuffisances observées et d'étudier les possibilités d'améliorer les aptitudes pratiques des étudiants dans l'activité de résolution de problèmes, particulièrement ceux de construction et d'existence, notre travail dans les séances de remédiation s'est organisé autour des processus d'exploration du Milieu et des moyens permettant une exploitation pertinente de ses composants. Pour ce faire, le choix des exercices proposés aux étudiants dans ces séances, la répartition des étudiants sur les groupes de travail, les modalités de travail adoptées, les moments et les stratégies d'intervention de l'enseignant ont été choisis de manière à favoriser les interactions avec le Milieu et la prise de conscience des potentialités qu'il représente. Les productions des étudiants dans la dernière séance de l’ingénierie, consacrée à l’évaluation des acquis des étudiants dans les séances diagnostiques, de remédiation et plus généralement suite au travail organisé tout au long de l’année avec toute la classe, montrent des progrès certains chez les étudiants dans la résolution de problèmes. Ce progrès s’est manifesté, à des degrés différents selon les groupes, surtout sur le plan de la rédaction et de l’exploitation des ressources sémiotiques, dans l’exploration de l’espace de résolution, l’organisation des pas de raisonnement et l’identification de problèmes intermédiaires. Des difficultés ont été néanmoins encore remarquées chez certains étudiants concernant la manipulation du symbolisme mathématique dans des expressions particulièrement complexes et la possibilité de procéder à un changement de points de vue adéquat. Sur le plan stratégique, nos analyses ont aussi permis de montrer que choisir des méthodes de résolution non indiquées ou procéder à un changement de cadre de travail non suggéré, posent encore problème pour tous les étudiants interrogés.

Nous ne prétendons donc pas que le travail et le processus de remédiation que nous avons conçu et expérimenté dans cette classe fournisse la solution aux difficultés qu’éprouvent les étudiants dans la transition. Nous reconnaissons au contraire les limites du dispositif expérimenté, le poids des contraintes institutionnelles qui ont pesé sur nos choix, réduisant considérablement nos marges de manœuvres concernant le nombre de séances et le choix des exercices. Les heuristiques et pratiques de résolution que requiert l’exercice proposé dans la séance d’évaluation avaient déjà majoritairement été évoquées et plus ou moins utilisées dans les séances précédentes de l’ingénierie (l’heuristique de spécification, le jeu entre le particulier et le général, la sensibilité aux désignations symboliques…). Ceci, ajouté au temps long consacré à la résolution de l’exercice, a sans doute contribué aux progrès observés. Dans cette même séance, on voit bien que les étudiants ne sont pas arrivés à gérer de façon efficace les difficultés nouvelles auxquelles ils ont été confrontés (changement de cadres, adoption de méthodes plus économiques). Ceci montre la limite de notre courte ingénierie et confirme le point de vue de Castela (2008a) selon lequel les enjeux ignorés d’apprentissage relatifs à la pratique de résolution de problèmes doivent devenir des objets explicites d’enseignement, institutionnellement reconnus.

VI. Bilan et perspective

Partant d’un constat de difficultés dans la transition Secondaire/Supérieur, unanimement reconnu par les enseignants du supérieur dans plusieurs pays et habituellement attribuées aux caractéristiques personnelles des nouveaux bacheliers et à un manque d’harmonisation entre les programmes de Secondaire et de Supérieur, et nous focalisant sur l’enseignement des notions ensemblistes fonctionnelles pour leur importance dans les deux institutions et plus généralement dans l’édifice mathématique moderne, notre recherche, tout en décelant des potentialités d’enseignement non exploitées au lycée comme à l’Université, fait apparaître la complexité des facteurs générateurs des difficultés constatées. Ainsi, un premier constat qui découle de notre recherche est une gestion inadéquate des potentialités offertes par les programmes du Secondaire pour un premier apprentissage des notions ensemblistes fonctionnelles d'une part, une attention insuffisante du supérieur à la nécessité d'un travail sur les précurseurs limités existant dans l'enseignement secondaire pour permettre les adaptations souhaitées d'autre part.

La présence des notions ensemblistes fonctionnelles dans divers thèmes d'étude du Secondaire et particulièrement en géométrie des transformations et l'usage fréquent qui en est fait constituent une opportunité qui, exploitée à bon escient, pourrait permettre des ponts entre les mathématiques du Secondaire et celles du Supérieur et atténuer la brutale rupture qui s'est constituée entre les deux institutions en mathématiques depuis la contre-réforme. Instaurer au lycée des moments d'institutionnalisation et de travail spécifique pour les notions ensemblistes fonctionnelles, apporter plus d'organisation et de structuration du savoir construit et réduire l'écart entre les topos des élèves et des enseignants à propos de l'usage de ces notions, notamment au niveau technologico-théorique et de la mise en œuvre du discours technologique dans la résolution de problèmes, donnerait, nous semble t-il, une occasion pour familiariser les élèves de lycée aux mathématiques du supérieur, particulièrement en ce qui concerne le formalisme mathématique et le langage ensembliste. Ceci étant, on ne peut s'attendre à ce que le monde ensembliste fonctionnel, même dans ses aspects élémentaires, soit bien maîtrisé à l'issue de l'enseignement secondaire.

Dans les classes CSP1, accorder plus d'importance au travail d'ordre technique, à l'intégration des organisations mathématiques ponctuelles étudiées dans le Secondaire dans des organisations mathématiques locales, exploiter les ensembles de nombres, de vecteurs et de transformations géométriques pour montrer, via un discours d'ordre *méta*, le rôle unificateur généralisateur des structures algébriques, serait, nous semble t-il, utile pour assurer une certaine continuité lors du passage du Secondaire au Supérieur et rendre les étudiants mieux à même d'appréhender les nouvelles formes d'abstraction et de formalisation résultant de l'entrée dans le monde des structures algébriques axiomatiques.

Outre la rupture constatée dans l'enseignement des notions ensemblistes fonctionnelles dans la transition Secondaire/Supérieur, notre recherche a permis de montrer l'important rôle que jouent les objets ostensifs et les représentations sémiotiques dans l'activité de résolution de problèmes. Nous avons contribué à mettre en évidence que le langage symbolique formel ne se réduit pas à un simple moyen de production et de communication des textes mathématiques, qu'il intervient de façon essentielle dans les heuristiques de raisonnement et conditionne toute l'activité de résolution de problèmes. Une sensibilisation à la potentialité instrumentale des objets ostensifs et au rôle opératoire des représentations sémiotiques s'avère selon nous nécessaire pour améliorer les capacités des élèves et étudiants dans l'activité de résolution de problèmes. Ceci passe par une prise en charge par l'institution d'enseignement d'enjeux d'apprentissage qui dépassent le savoir théorique mais qui s'avèrent nécessaires pour l'acquisition de ce savoir et le développement de compétences permettant son exploitation. Nous ne pouvons attendre des étudiants qu'ils construisent des savoirs et qu'ils acquièrent des compétences sans leur offrir un contexte d'enseignement où celles-ci peuvent se développer et un environnement pédagogique et didactique favorable à l'émergence des connaissances associées.

Ceci dit, de nombreux travaux didactiques nous semblent nécessaires pour approfondir les points que nous venons de soulever et élaborer des modalités efficaces d'intervention, dans différents contextes, et en particulier au-delà des seules classes CSP1. Il nous paraît aussi particulièrement utile de créer des situations d'échanges et de réflexions entre des professeurs de lycée et des professeurs d'universités en vue de mieux identifier les difficultés, ajuster et coordonner les possibilités d'actions.

Bibliographie

[1]Arsac, G. (1996). Un cadre d'étude du raisonnement mathématique. In : Grenier, D. (ed.) *Séminaire Didactique et Technologies Cognitives en Mathématiques*. Grenoble : IMAG.

[2]Artigue, M. (1993) : Enseignement de l'analyse et fonctions de référence. *Repères, n°11*. Metz : Topiques éditions.

[3]Artigue, M. (2004) : Le défi de la transition Secondaire-Supérieur. Que peuvent nous apporter les recherches en didactique des mathématiques ? *Actes du premier congrès franco-canadien de sciences mathématiques*, Toulouse.

[4]Balacheff, N. (1988) : *Une étude des processus de preuve en mathématique chez les élèves de collège*. Thèse, Université Joseph Fourier, Grenoble.

[5]Barnard, T., Tall, D. (1997) : Cognitive units, Connections and Mathematical Proof. *Proceedings of PME 21*, Finland, 2. (www.davidtall.com/papers)

[6]Beth, E.W. & Piaget, J. (1966) : *Mathematical Epistemology and Psychology*. Dordrecht, Reidel

[7]Bloch, I. (2000) : *L'enseignement de l'analyse à la charnière lycée/Université.* Thèse, Université Bordeaux I.

[8]Bloch, I. (2005) : *Quelques apports de la théorie des situations à la didactique des mathématiques dans l'enseignement secondaire et supérieur.* Note de synthèse pour une habilitation à diriger des recherches. Université Denis Diderot. Paris 7.

[9]Bloch, I. & al. (?) : Synthèse du thème 6. Actes du colloque EMF 2006. Université de Sherbrooke.

[10] Bosch, M., Fonseca, C., Gascon, J. (2004) : Incompletitud de las organizaciones matematicas locales en las instituciones escolares. *Recherches en didactiques des mathématiques*, Vol. 24- 2/3, p. 205-250. Grenoble : La Pensée Sauvage.

[11] Bosch, M., Gascon, J. (2005) : La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. In, Margolinas, C., Mercier, A. : *Balises pour la didactique des mathématiques. Cours de la 12ème école d'été de didactique des mathématiques*. Corps (Isère) (20-29 août 2003). La pensée sauvage, Editions.

[12] Brousseau, G. (1989) : Le contrat didactique et le concept de milieu. *Actes de la Vème école d'été de didactique des mathématiques*. p. 95-101.

[13] Brousseau, G. (1998) : *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La pensée sauvage.

[14] Castela, C. (2000) : Un objet de savoir spécifique en jeu dans la résolution de problème : la fonctionnement mathématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol.20- 3. p.331-380. Grenoble : La Pensée Sauvage

[15] Castela, C. (2002) : *Les objets du travail personnel en mathématiques des étudiants dans l'enseignement supérieur : comparaison de deux institutions, Université et Classes préparatoires aux Grandes Ecoles*. Cahier de Didirem n° 40. IREM Paris 7.

[16] Castela, C. (2007a) : Les gestes d'étude en mathématiques d'élèves de Première Scientifique. In G. Gueudet et Y. Matheron (Eds) *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques, Année 2006*. p. 33-77. Paris : IREM Paris 7.

[17] Castela, C. (2007b) : Les ressources autodidactes en mathématiques de très bons élèves de classes scientifiques. In Penloup M-C. (Ed.) *Les connaissances ignorées, Approche pluridisciplinaire de ce que savent les élèves*. p. 173-202. Paris : INRP.

[18] Castela, C. (2008a) : Approche didactique des processus différentiateurs relatifs à la résolution de problèmes. In Rouchier, A. et Bloch, I. (Eds) *Perspectives en didactique des mathématiques* p. 89-114. Grenoble : La Pensée Sauvage.

[19] Castela, C. (2008b) : Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissage ignorés par les institutions d'enseignement. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol.28- 2. p.135-182. Grenoble : La Pensée Sauvage

[20] Chauvat, G. (1999) : Courbes et fonctions au collège. *Petit x*, n° 51, IREM de Grenoble.

[21] Chauvat, G. (1997) : *Etude didactique pour la réalisation et l'utilisation d'un logiciel de représentations graphiques cartésiennes des relations binaires entre réels dans l'enseignement des mathématiques des DUT industriels*. Thèse, Université d'Orléans.

[22] Chevallard, Y. (1997) : Rigueur et formalisme : à propos du curriculum secondaire. http://yves.chevallard.free.fr

[23] Chevallard, Y. (1998) : Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique. In : *Actes de l'université d'été de la Rochelle, Juillet 1998*. p. 91-118.

[24] Chevallard, Y. (1989) : Le concept de rapport au savoir, rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel. *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique, année 1988-1989*. IMAG. p. 211-235. Institut Fourrier. Grenoble.

[25] Chevallard, Y. (1999) : La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en didactiques des mathématiques,* Vol. 19-1, p. 77-124. Grenoble : La Pensée Sauvage.

[26] Chevallard, Y. (2003) : Organiser l'étude. 3. Ecologie & Régulation. In : Dorier, J.L. et al. (eds.) *Actes de la 11ème école d'été de didactique des mathématiques*. p. 41-56. Grenoble : La Pensée Sauvage.

[27] Chevallard, Y. (2003b) : Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathématiques. In : Maury, S. et Caillot, M. (eds) : *Rapport au savoir et didactique*. p. 81-104. Editions Fabert : Paris.

[28] Chellougui, F. (2004) : *L'utilisation des quantificateurs universel et existentiel en première année universitaire entre l'explicite et l'implicite*. Thèse de Doctorat. Université Claude Bernard, Lyon 1 et Université de Tunis.

[29] Chin, E.T., Tall, D. (2002) : Proof as a formal procept in advanced mathematical thinking. *International Conference on Mathematics* : *Understanding proving and proving to understand.* National Taiwan Normal University, Taipei, Taiwan. (www.davidtall.com/papers)

[30] Cornu, B. (1983) : *Apprentissage de la notion de limite : conceptions et obstacles*. Thèse de 3éme cycle, Grenoble.

[31] Corriveau, Claudia. (2007) : *Arrimage Secondaire-Collégial. Démonstration et formalisme*. Mémoire de Maitrise en didactique des mathématiques. Université du Québec. Montréal.

[32] Dias, M.A. (1998) : *Les problèmes d'articulation entre points de vue « cartésien » et « paramétrique » dans l'enseignement de l'algèbre linéaire*. Thèse de Doctorat. Université Denis Diderot. Paris 7.

[33] Dorier, J.L. (1990) : *Contribution à l'étude de l'enseignement à l'université des premiers concepts d'algèbre linéaire*. Approche historique et didactique. Thèse de doctorat de l'Université Joseph Fourier. Grenoble 1.

[34] Dorier, J.L & al. (1997) : *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

[35] Douady, R. (1986) : Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol.7, 2, p. 5-31. Grenoble : La Pensée Sauvage.

[36] Dubinsky, Ed. (1991) : Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In : Tall, D. *Advanced mathematical Thinking*. Chapter 6.

[37] Dubinsky, Ed. & McDonald, M.A. (2001) : A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. In Holton, D. (ed.) *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level*, p. 273-280. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

[38] Dubinsky, E., Harel, G. (1992): The nature of the process conception of function. In : G. Harel & E. Dubinsky (Eds) *The concept of function* : Aspects of epistemology and pedagogy. Mathematical Association of America, Washington, D.C., p. 85-106.

[39] Durand-Guerrier, V. (1996) : *Logique et raisonnement mathématique. Défense et illustration de la pertinence du calcul des prédicats pour une approche didactique des difficultés liées à l'implication*. Thèse de l'Université Lyon 1.

[40] Durand-Guerrier, V. Arsac, G. (2003) : Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques. Le cas de l'analyse. Quelles implications didactiques ? *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 23/3, p. 295-342. Grenoble : La Pensée Sauvage.

[41] Duval, R.(1993) : Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. Volume 5, p. 37-65 ; IREM de Stasbourg.

[42] Duval, R. (1995) : *Sémiosis et pensée humaine*. Paris : Peter Lang.

[43] Duval, R. (2000) : Ecriture, raisonnement et découverte de la démonstration en mathématiques. *Recherches en didactiques des mathématiques*, Vol. 20-2, p. 135-170. Grenoble : La Pensée Sauvage.

[44] Duval, R. (2001) : Ecriture et compréhension : pourquoi faire écrire des textes de démonstration par les élèves ? In : Barbin, E et al. : *Produire et lire des textes de démonstration*, p. 183-205. Paris : Ellipses.

[45] Duval, R. (2003) : Décrire, visualiser ou raisonner : quel "apprentissages premiers" de l'activité mathématique ? *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. Volume 8, p. 13-62 ; IREM de Stasbourg.

[46] El Faqih El Mekki. (1991) : *Place de la logique dans l'activité mathématique des étudiants du premier cycle scientifique*. Thèse de Doctorat. Université Louis Pasteur. Strasbourg.

[47] Ghdemsi, I. (2008) : *Enseignement du début de l'analyse réelle à l'entrée à l'université. Articuler contrôles pragmatique et formel dans des situations à dimension a-didactique*. Thèse en cotutelle. Université de Tunis et université Bordeaux 2.

[48] Gray, E.M. & Tall, D. (1994) : Duality, ambiguity and flexibility : a proceptual view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26, 2, p. 115-141.

[49] Gueudet, G. (2008) : Entrée à l'université / Ressources en ligne. Eclairages théoriques et actions didactiques dans deux champs de recherche en didactique des mathématiques. Note de synthèse pour une habilitation à diriger des recherches. Université Denis Diderot. Paris 7.

[50] Jahn, A. P. (1998) : *Des transformations des figures aux transformations ponctuelles : étude d'une séquence d'enseignement avec Cabri-géomètre. Relations entre aspects géométriques et fonctionnels en classe de Seconde*. Thèse. Université Joseph Fourier. Grenoble 1.

[51] Lahanier-Reuter, D., Roditi, E. (2007) : *Questions de temporalités, Méthodes de recherhce en didactique(s) 2*. P.U.S., Villeneuve d'Ascq.

[52] Lajoie C., Mura R. (2004), Difficultés liées à l'apprentissage des concepts de sous-groupe normal et de groupe quotient. *Recherche en didactique des mathématiques*. Vol. 24/1. Grenoble : La pensée sauvage.

[53] Lester, F.K..Jr. & al. (1994) : To teach via problem solving. In : Aichele, D. and Coxford, A. (Eds) *Professional Development Mathematics*. p. 152-166. Reston, Virginia : NCTM.

[54] Lithner, J. (2000) : Mathematical reasoning in task solving. *Educational Studies in Mathematics* (41). p. 165-190.

[55] Maschietto, M. (2001) : Fonctionnalité des représentations graphiques dans la résolution de problèmes d'analyse à l'Univrsité. *Recherches en didactiques des mathématiques*, Vol. 21, 1/2. Grenoble : La Pensée Sauvage.

[56] Niss, M. (1999) : Aspects of the nature and state of research in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*. 40 (1), p. 1-24.

[57] Praslon, F. (2000) : *Continuités et ruptures dans la transition Terminale S/DEUG Sciences en Analyse. Le cas de la notion de dérivée et son environnement.* Thèse de doctorat. Université Paris 7.

[58] Rogalski, M. (1990) : Graphiques et raisonnements : visualiser des fonctions. In *Audimath n°2, dossier de 1'enseignant de mathématiques.* Centre national de documentation pédagogique, Ministère de l'Education Nationale, Paris.

[59] Robert, A. (1998) : Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol.18, 2, p.139-190. Grenoble : La Pensée Sauvage.

[60] Schoenfeld, A. H. (1985) : *Mathematical problem solving*. Academic Press, Orlando, FL.

[61] Schoenfeld, A. (1994). Reflections on doing and teaching mathematics. In A. Schoenfeld (Ed.). *Mathematical Thinking and Problem Solving.* (pp. 53-69). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

[62] Sierpinska, A., Dreyfus, T. Hillel, J. (1999) : Evaluation of a teaching design in linear algebra : the case of linear transformations. *Recherches en didactiques des mathématiques,* Vol. 19-l, pp. 7-40. Grenoble : La Pensée Sauvage.

[63] Tall, D. (2005) : A Theory of Mathematical Growth through Embodiment, Symbolism and Proof. Plenary Lecture for the *International Colloquium on Mathematical Learning from Early Childhood to Adulthood*. Belgium, 5-7 July 2005. (www.davidtall.com/papers)

[64] Tall, D. (2008) : The transition to formal thinking in mathematics, to appear in *Mathematics Education Research Journal*. (www.davidtall.com/papers)

[65] Tall, D. (2002) : Differing Modes of Proof and Belief in mathematics. *International Conference on Mathematics* : *Understanding proving and proving to understand.* National Taiwan Normal University, Taipei, Taiwan. (www.davidtall.com/papers)

[66] Tanguay, D. (2002) : L'enseignement des vecteurs. *Bulletin AMQ*, Vol. XLII, n° 4, pp. 36-47.

[67] Vinner, S. (1989) : Images and definition for the concept of function. In : *Journal for research in Mathematics Education.* 20(4), pp. 356-366.

Annexe

Sommaire

Exercice 1 (p. 100)

Soit ABCD un carré tel que : $(\overrightarrow{AB}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$.

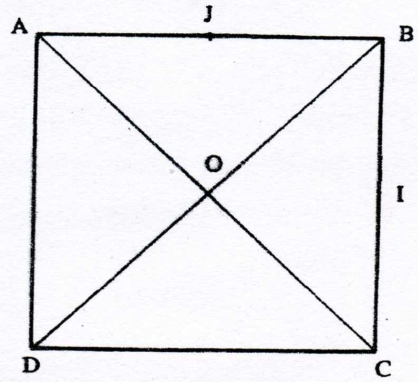
Déterminer les isométries qui laissent globalement invariant le carré ABCD.

Solution

Remarquons tout d'abord que si φ est une isométrie qui laisse invariant le carré ABCD alors elle laisse globalement invariant l'ensemble $\{A,B,C,D\}$.

Notons A',B',C',D' les images respectives de A,B,C,D par φ.

1- Recherche de points fixes.



Le cercle circonscrit au carré ABCD est globalement invariant par φ. On en déduit que le centre O du carré ABCD est invariant par φ.

Il en résulte alors que φ est soit une rotation de centre O, soit une symétrie orthogonale d'axe passant par O, soit l'identité.

2- φ possède un unique point fixe O.

φ est donc une rotation de centre O. Comme une rotation est entièrement déterminée par son centre et l'image d'un point, il suffit d'étudier l'image de A . On obtient :

$\varphi(A) = B \quad \Rightarrow$ φ est la rotation R_1 de centre O et qui envoie A sur B.

$\varphi(A) = C \quad \Rightarrow$ φ est la symétrie centrale S_0 de centre O.

$\varphi(A) = D \quad \Rightarrow$ φ est la rotation R_2 de centre O et qui envoie A sur D.

3- φ possède deux points fixes.

On sait alors que φ est une symétrie orthogonale dont l'axe passe par O.

Les quatre symétries par rapport aux axes du carré le laisse globalement invariant. .

Montrons que ce sont les seules.

Soit $S_{(BD)}$ la symétrie orthogonale d'axe (BD) qui laisse invariant le carré ABCD.

Pour toute symétrie S' laissant invariant le carré, $S' \circ S_{(BD)}$ est une rotation laissant globalement invariant le carré . D'où :

Exercice 2 (p. 144)

> D et D’ sont deux droites strictement parallèles.
> Déterminer toutes les isométries qui laissent globalement invariante la réunion des deux droites.

Solution

Soit *D* et *D’* deux droites parallèles distinctes.
Soit *f* une isométrie laissant globalement invariant $D \cup D'$.
Soit *A* un point de *D* et Δ la perpendiculaire à *D* passant pas *A*. Δ coupe *D’* en un point *A’*.
Soit Δ' l'image de Δ par *f*.
Comme une isométrie conserve l'orthogonalité, Δ' est une droite parallèle à Δ coupant *D* et *D’* en des points *B* et *B’*.
Deux cas sont alors possibles : *f* envoie *A* sur *B* ou *f* envoie *A* sur *B’*.

- Si $f(A) = B$ alors $f(A') = B'$. Soit δ la médiatrice du segment [*AB*].

- Si *f* est un déplacement alors $S_\delta of$ est un antidéplacement qui laisse fixe *A* et *A’* , donc $S_\delta of = S_{(AA')}$.

Par suite $f = S_\delta o S_{(AA')}$ puis *f* est une translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

- Si *f* est un antidéplacement alors $S_\delta of$ est un déplacement qui laisse fixe *A* et *A’*, donc $S_\delta of = Id$. Par suite $f = S_\delta$.

- Si $f(A) = B'$, alors $f(A') = B$.

Soit δ' la droite parallèle à *D* et *D’* qui se situe à égale distance de celles-ci.
$S_{\delta'} of$ est une isométrie laissant invariante *D* et *D’* et qui envoie *A* sur *B*.
On est alors ramené au cas précédent.

- Résumons : *f* est

- soit une translation de vecteur $\vec{u}$ nul ou directeur de *D* et *D’*,
- soit une réflexion par rapport à une droite perpendiculaire à *D* et *D’*,
- soit une symétrie glissante par rapport à la droite δ' intermédiaire à *D* et *D’*.
- soit une symétrie de centre situé sur la droite δ' .

Inversement les transformations décrites ci-dessus sont solutions.

EXERCICE 11

Le plan P est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on donne les points A, B, C et D de coordonnées respectives (1,1), (-3,3), (2,2) et (-4,4) . On appelle E et F les milieux respectifs de [AC] et [BD] .

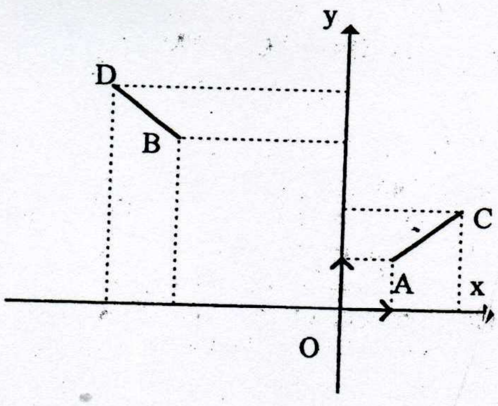
1° Montrer qu'il existe une rotation r qui transforme A en B et C en D . Déterminer son centre I et son angle .

2° Montrer qu'il existe une rotation unique r' qui transforme A en D et C en B . Déterminer son centre J et son angle .

3° a) Que peut-on dire à propos du quadrilatère IEJF ?

b) Etudier $r' \circ r$ et $r \circ r'$.

EXERCICE 11



1° On a $AC = \sqrt{2} = BD$ donc il existe une rotation r qui transforme A en B et C en D .

Soit θ une mesure de son angle , on a:

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}}{AC.BD} = 0 \quad \text{et}$$

$$\sin\theta = \frac{\text{Dé}\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}\right)}{AC.BD} = 1 \quad \text{donc}$$

$\theta = \frac{\pi}{2}$.

D:y= 2x+4 est la médiatrice de [AB]

D':y= 3x+6 est celle de [CD] .

Le centre I de r est le point d'intersection des droites (D) et (D') .

On obtient , I(-2,0) .

2° On a AC = BD donc il existe une rotation r' qui transforme A en D et C en B .

Soit α une mesure de son angle ,

$$\sin\alpha = \frac{\text{Dé}\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB}\right)}{AC.DB} = -1$$

donc $\alpha = -\frac{\pi}{2}$.

Δ : -5x +3y -15 = 0 est la médiatrice de [AD] et Δ': 5x - y + 5 = 0 est celle de [BC] .

J le centre de r' a pour coordonnées(0,5).

3° a) On a $E\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ et $F\left(-\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)$,

$E*F(-1, \frac{5}{2})$ et $I*J(-1, \frac{5}{2})$ donc IEJF est un parallélogramme .

Comme r transforme [AC] en [BD] alors l'angle en I de ce parallélogramme est droit , il en résulte que IEJF est un rectangle . Or les distances JE et IE sont égales , on conclue que IEJF est un carré .

b) $r \circ r'$ et $r' \circ r$ sont deux translations car la somme de leurs angles est nulle.

$r \circ r'(E) = r(F) =$ E' où E' est le symétrique de E par rapport à I . Par conséquent , $r \circ r'$ est la translation de vecteur $2\,\overrightarrow{EI}$.

EXERCICE N ° 8

Soit, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation :

(E) $z^3 + (-2 - 4i)z^2 + (-9 + 10i)z + 18 + 6i = 0$.

1- Vérifier que 3 est une racine de l'équation (E) et en déduire les autres racines z_1 et z_2 de (E).

(On désigne par z_1 la racine ayant une partie réelle positive).

2- Soit $(o, \vec{u}, \vec{v})$ un repère orthonormé direct du plan et A, B, C les points d'affixes respectives 3, z_1, z_2.

a- Montrer que OABC est un parallélogramme et qu'il existe un déplacement f et un antidéplacement g transformant O en B et A en C.

b- Donner la nature et les éléments caractéristiques de f.

c- Soit S la symétrie orthogonale d'axe la droite (OA).

Vérifier que $g = f \circ S$ et en déduire la forme réduite de g.

EXERCICE N ° 8

1- On pose $P(z) = z^3 + (-2 - 4i)z^2 + (-9 + 10i)z + 18 + 6i$.

$P(3) = 27 - 9(2 + 4i) + (-9 + 10i)3 + 18 + 6i = 0$.

Donc 3 est une racine l'équation $P(z) = 0$.

On pose $P(z) = (z - 3)(z^2 + az + c)$

$= z^3 + (-3 + a)z^2 + (c - 3a)z - 3c$

par identification on aura :

$$\begin{cases} a - 3 = -2 - 4i \\ c - 3a = -9 + 10i \\ -3c = 18 + 6i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 - 4i \\ c = -6 - 2i \end{cases}$$

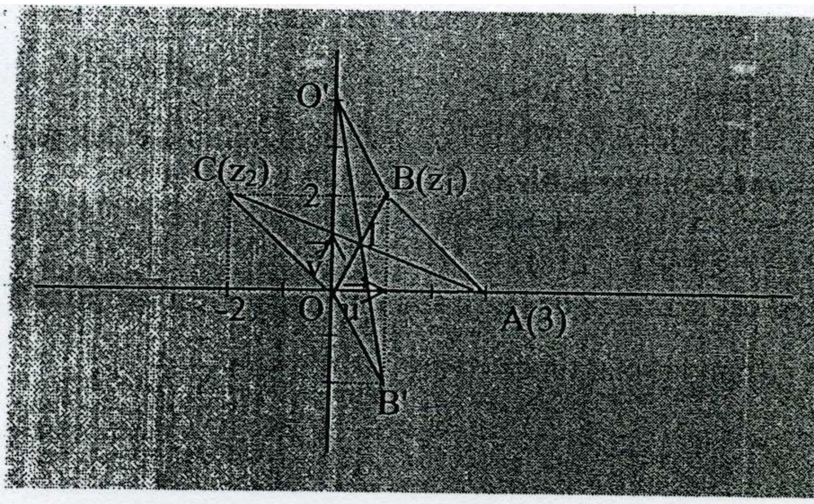
donc $\quad$ **$P(z) = (z - 3)(z^2 + (1 + 4i)z - (6 + 2i))$**

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 3 \quad ① \\ \text{ou} \\ z^2 + (1 + 4i)z - (6 + 2i) = 9 \quad ② \end{cases}$$

résolution de ② : $\Delta = (1 - 4i)^2 + 4(6 + 2i) = 9 = 3^2$.

donc $z_1 = 1 + 2i$ et $z_2 = -2 + 2i$

alors $\quad$ **$S_{\mathbb{C}} = \{3, 1 + 2i, -2 + 2i\}$**



a- Montrons que O A B C est un parallélogramme .

on a aff $\left(\overrightarrow{OA}\right)=3$ et aff $\left(\overrightarrow{CB}\right)=z_1 - z_2 = 1+2i-(-2+2i) = 3$

donc $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB}$ alors **(OABC) est un parallélogramme** et on a OA = CB $\neq 0$ donc il existe un déplacement f est un antidéplacement g uniques telsque :

$f(O) = B$ et $g(O) = B$
$f(A) = C$ $g(A) = C$.

b- nature de f

l'angle de f est $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{BC}}\right) \equiv \pi\ [2\pi]$ alors **f est une symétrie centrale** soit I son centre telque I = O ∗ B = A ∗ C

donc **f = S_I**

c- Vérifions que g = f o S.

On a f o S (O) = f (S(O)) = f (O) = B

Et f o S (A) = f (S(A)) = f (A) = C alors on a g et f o S deux antidéplacements qui coïncident en deux points distincts O et A

alors **g = f ∘ S .**

On a g (O) = B et g (A) = C et médiatrice de [O B] est distincte de celle de [AC] alors g n'est pas une symétrie orthogonale d'où :

g est une symétrie glissante

cherchons son axe Δ et son vecteur $\vec{u}$.

On a g (O) = B alors O ∗ B ∈ Δ donc I ∈ Δ.

D'autre part g ∘ g (O) = g (B) = f ∘ S (B) = f (B') = O' avec B' = $S_{(OA)}$ (B) et le point O' telsque (OB' BO') est un parallélogramme

par suite $g = t_{\vec{u}} \circ S_\Delta$ **avec** $\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OO'}$ **et avec Δ la droite passant par I de vecteur directeur** $\vec{u}$.

Corrigé de l'exercice de géométrie Bac 1996

ABCD est un parallélogramme de centre ω. ABO_1, BCO_2, CDO_3 et DAO4 sont des triangles rectangles isocèles de sommets principaux respectifs O_1, O_2, O_3 et O_4. On suppose que le plan est orienté et que $(\widehat{\overrightarrow{O_1A}, \overrightarrow{O_1B}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

On désigne par R_1, R_2, R_3 et R_4 les rotations d'angle $\frac{\pi}{2}$ de centres respectifs O_1, O_2, O_3 et O_4.

1- a) Déterminer $(R_2 o R_1)(A)$, $(R_3 o R_2)(B)$ et $(R_4 o R_3)(C)$

b) Montrer que les applications $R_2 o R_1$, $R_3 o R_2$ et $R_4 o R_3$ sont toutes les trois égales à une même application que l'on déterminera et que l'on désignera par f.

2- a) Montrer que $R_3[R_2(O_1)] = R_2(O_1)$ et déterminer $f(O_1)$

b) Montrer que $f(O_2)=O_4$

c) Quelle est la nature du quadrilatère $O_1O_2O_3O_4$?

3- Soit Δ la médiatrice du segment [AB] et S_Δ la symétrie orthogonale d'axe Δ. On pose $g = R_2 o S_\Delta$.

a- Déterminer g(A) et $g(O_1)$

b- Montrer que g n'est pas une symétrie axiale et en déduire la nature de g.

c- Construire le point $\omega' = g(\omega)$. Déterminer les éléments caractéristiques de g

$R_1 = R_{(O_1, \frac{\pi}{2})}$; $R_2 = R_{(O_2, \frac{\pi}{2})}$; $R_3 = R_{(O_3, \frac{\pi}{2})}$; $R_4 = R_{(O_4, \frac{\pi}{2})}$

1/ a/ $R_2 o R_1 (A) = R_2 (B) = C$

$R_3 o R_2 (B) = R_3 (C) = D$

$R_4 o R_3 (C) = R_4 (D) = A$

b/ $R_2 o R_1$ est la composée de 2 rotations d'angle $\frac{\pi}{2}$ donc $R_2 o R_1$ est un déplacement d'angle $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$ c'est donc la symétrie centrale de centre ω milieu de [AC].

On démontre de la même manière que $R_3 o R_2$ et $R_4 o R_3$ sont aussi des symétries centrales de centre ω.

***Conclusion :** $R_2 o R_1 = R_3 o R_2 = R_4 o R_3 = S_\omega = f$.*

2/ a/ $R_3 o R_2 (O_1) = R_2 o R_1 (O_1) = R_2(O_1)$. Il en résulte que $R_2(O_1)$ est invariant par R_3 donc $R_2(O_1) = O_3$ et par suite $f(O_1) = O_3$.

b/ $R_4 o R_3(O_2) = R_3 o R_2 (O_2) = R_3 (O_2)$. Donc $R_3(O_2)$ est invariant par R_4 et par suite $R_3(O_2) = O_4$ d'où $f(O_2) = O_4$.

c/ Des résultats précédents, il résulte que ω est le milieu des segments $[O_1O_3]$ et $[O_2O_4]$ donc $O_1O_2O_3O_4$ est un parallélogramme.

De plus on a :

$R_2 (O_1) = O_3$ donc $O_2O_1 = O_2O_3$ et $(\overrightarrow{O_2O_1}, \overrightarrow{O_2O_3}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

***Conclusion :** $O_1O_2O_3O_4$ est donc un carré.*

3/Soit Δ la médiatrice du segment [AB], S_Δ la réflexion d'axe Δ et $g=R_2 o S_\Delta$

a/ On remarque que O_1 est élément de Δ donc

$g(A) = R_2 o S_\Delta (A) = R_2 (B) = C$

$g(O_1) = R_2 o S_\Delta (O_1) = R_2 (O_1) = O_3$

b/L'application $g = R_2 o S_\Delta$ est la composée de l'antidéplacement S_Δ et du déplacement R_2, c'est donc un antidéplacement.

Supposons que g est une symétrie axiale d'axe Δ'.

On a : $g(A) = C$ et $g(O_1) = O_3$, donc Δ' est à la fois la médiatrice de [AC] et $[O_1O_3]$.

Or [AC] et $[O_1O_3]$ n'ont pas la même médiatrice donc g n'est pas une symétrie axiale, c'est donc une symétrie glissante.

On a : $g(\omega) = \omega'$, donc l'application $g = R_2 o S_\Delta$ se décompose sous la forme $g = t_{\overrightarrow{\omega\omega'}} o S_{(\omega\omega')} = S_{(\omega\omega')} o t_{\overrightarrow{\omega\omega'}}$.

REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION ❖❖❖ **EXAMEN DU BACCALAUREAT** **SESSION DE JUIN 2004**	**SESSION PRINCIPALE** **SECTION : MATHEMATIQUES** **EPREUVE : MATHEMATIQUES** **DUREE : 4 h COEFFICIENT : 4**

EXERCICE 1 (5 points)

Dans le plan orienté, on considère un rectangle OABC tel que OA = 2OC et $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

(Pour la figure, on prendra OA = 4 (en cm)).
La médiatrice Δ du segment [OB] coupe la droite (OA) en I et la droite (OC) en I'. Soit J le symétrique du point O par rapport au point I et J' le symétrique du point O par rapport à I'.

1) a – Montrer que les triangles OBJ et OBJ' sont rectangles en B.
   b – En déduire que les points B, J et J' sont alignés.

2) Soit S la similitude directe telle que S(J) = O et S(O) = J'.
   a – Déterminer une mesure de l'angle de S.
   b – Montrer que le point B est le centre de la similitude S .
   c – Donner le rapport de la similitude S.

3) Soit σ la similitude indirecte telle que σ(J) = O et σ(O) = J'.
   a – Donner le rapport de σ .
   b – En déduire que la similitude σ admet un unique point invariant que l'on notera Ω.
   c – Déterminer $\sigma \circ \sigma$ (J) et en déduire que le point Ω appartient à la droite (JJ').
   d – Construire le point Ω ainsi que l'axe D de la similitude σ.

EXERCICE 2 (5 points)

Soit a un nombre complexe non nul et E l'équation $z^2 - 2z + 1 + a^2 = 0$.

1) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation E.

2) Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives 1 + ia et 1 – ia .
   On pose $a = a_1 + ia_2$; a_1 et a_2 réels .
   a – Montrer que les points O, A et B sont alignés si et seulement si $a_1 = 0$.
   b – Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont orthogonaux si et seulement si | a | = 1.

3) On suppose que $a = e^{i\alpha}$ où $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
   a – Vérifier que pour tout réel x , on a

$$1 + e^{ix} = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right) e^{i\frac{x}{2}} .$$

$$1 - e^{ix} = -2i\sin\left(\frac{x}{2}\right) e^{i\frac{x}{2}} .$$

   b – En déduire l'écriture sous forme exponentielle de chacun des nombres complexes 1 + ia et 1 – ia.
   c – Déterminer a pour que les points O, A et B forment un triangle isocèle rectangle en O.

PROBLEME (10 points)

A – On considère la fonction f_1 définie sur $[-1,+\infty[$ par $f_1(x) = \sqrt{1+x}\; e^{-x}$ et on désigne par $\mathscr{C}_1$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a – Etudier la dérivabilité de f_1 à droite de -1.
   b – Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
   c – Calculer la limite de f_1 en $+\infty$.
   d – Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2) Dresser le tableau de variation de f_1.

3) Donner l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_1$ au point d'abscisse 0.

4) Montrer que l'équation $f_1(x) = x$ admet une unique solution α dans $[-\frac{1}{2}, +\infty[$

   et que $\alpha \in]\frac{1}{2}, 1[$.

5) Tracer la courbe $\mathscr{C}_1$.

6) a – Montrer que pour tout réel x, on a $1 + x \leq e^x$.

   b – En déduire que pour tout réel $x \geq -1$, on a $f_1(x) \leq e^{-\frac{x}{2}}$.

7) Soit λ un réel supérieur ou égal à 1 et $S(\lambda) = \int_1^{\lambda} f_1(x)\,dx$.

   a – Donner une interprétation graphique du réel $S(\lambda)$.

   b – Montrer que pour tout $\lambda \geq 1$, on a $0 \leq S(\lambda) \leq \frac{2}{\sqrt{e}}$.

B – Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $[-1,+\infty[$ par $f_n(x) = \sqrt{1+x}\; e^{-\frac{x}{n}}$.
On désigne par $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Montrer que toutes les courbes $\mathscr{C}_n$ passent par deux points fixes dont on déterminera les coordonnées.

2) a – Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la courbe $\mathscr{C}_n$ admet une tangente horizontale en un point M_n.
   b – On désigne par α_n l'abscisse de M_n . Etudier la nature de la suite (α_n).

3) Etudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_n$ et $\mathscr{C}_{n+1}$.

4) On pose $I = \int_{-1}^{1} \sqrt{1+x}\,dx$ et on désigne par (A_n) la suite définie pour tout n de $\mathbb{N}^*$ par

   $A_n = \int_{-1}^{1} f_n(x)\,dx$.

   a – Calculer I .

   b – Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a $1 - e^{-\frac{1}{n}} \leq e^{\frac{1}{n}} - 1$.

   c – En déduire que pour tout $x \in [-1, 1]$, $|e^{-\frac{x}{n}} - 1| \leq e^{\frac{1}{n}} - 1$.

   d – Montrer que $|A_n - I| \leq \frac{4}{3}\sqrt{2}\,(e^{\frac{1}{n}} - 1)$.

   e – En déduire que la suite (A_n) est convergente et donner sa limite.

REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION
ET DE LA FORMATION

EXAMEN DU BACCALAUREAT

SESSION DE JUIN 2005

SESSION PRINCIPALE

SECTION : MATHEMATIQUES

EPREUVE : MATHEMATIQUES

DUREE : 4 heures **COEF. : 4**

EXERCICE 1 (6 points)

Soit ABC un triangle rectangle en B tel que

$$(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]\ ,\quad AB = 3 \quad \text{et} \quad BC = 4.$$

1) Soit f la similitude directe telle que f(A) = B et f(B) = C.
   a – Déterminer l'angle et le rapport de f.
   b – Soit H le projeté orthogonal de B sur (AC).
   Montrer que H est le centre de f.

2) Soit D = f(C).
   a – Montrer que D appartient à la droite (BH).
   b – Construire le point D.

3) Soit g la similitude indirecte qui transforme A en B et B en C. On désigne par Ω le centre de g.
   a – Montrer que $f \circ g^{-1} = S_{(BC)}$.
   b – Soit E = g(C). Déterminer $S_{(BC)}$ (E).
   Construire alors le point E.
   c – Préciser la nature de gog. Montrer que Ω appartient à la droite (AC) ainsi qu'à la droite (BE).
   d – Construire le point Ω et l'axe Δ de la similitude g.

EXERCICE 2 (4 points)

Dans le plan complexe $\mathscr{P}$ rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on donne le point A d'affixe 1.

Soit l'application f de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que

$$z' = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\, z + 1 - \frac{1+i}{\sqrt{2}}\ .$$

1) Déterminer la nature de f et préciser ses éléments caractéristiques.

2) Soit le point M_0 d'affixe 2. On pose pour tout entier naturel n , $M_{n+1} = f(M_n)$. On désigne par z_n l'affixe du point M_n et par Z_n l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AM_n}$.
   a – Montrer que $Z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}$.
   b – Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $Z_n = e^{i\frac{n\pi}{4}}$.
   c – En déduire l'ensemble des valeurs de n pour lesquelles les points A, M_0 et M_n sont alignés.

PROBLEME (10 points)

Soit $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = \dfrac{e^{2x}}{1+e^x}$

et soit ($\mathscr{C}$) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

A – 1) Dresser le tableau de variation de f.

2) a – Déterminer les branches infinies de $\mathscr{C}$.
b – Tracer ($\mathscr{C}$).

3) a – Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
b – Tracer la courbe ($\mathscr{C}'$) représentative de la fonction réciproque f^{-1} de f.
c – Calculer $f^{-1}(x)$ pour $x > 0$.

4) a – Vérifier que pour tout réel x on a $f(x) = e^x - \dfrac{e^x}{1+e^x}$.

b – Soit λ un réel strictement négatif.
Calculer l'aire $\mathscr{A}(\lambda)$ du domaine limité par la courbe $\mathscr{C}'$, l'axe des ordonnées et les droites d'équations respectives : $y = \lambda$ et $y = 0$.

B – Pour tout entier naturel non nul n et pour tout réel négatif x, on pose $F_n(x) = \displaystyle\int_x^0 \frac{e^{nt}}{1+e^t}\,dt$.

1) a – Calculer $F_1(x)$ et déduire que $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} F_1(x) = \text{Log } 2$.

b – Calculer $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} F_2(x)$.

2) a – Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a $F_{n+1}(x) + F_n(x) = \dfrac{1}{n}(1 - e^{nx})$.

b – Montrer par récurrence sur n, que $F_n(x)$ admet une limite finie lorsque x tend vers $-\infty$.

Dans la suite du problème on pose $R_n = \displaystyle\lim_{x \to -\infty} F_n(x)$.

3) a – Vérifier que pour tout réel $t \leq 0$, $2e^t \leq 1 + e^t \leq 2$.
b – Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 2$ et pour tout réel $x \leq 0$, on a :

$$\frac{1}{2n}(1 - e^{nx}) \leq F_n(x) \leq \frac{1}{2(n-1)}(1 - e^{(n-1)x}).$$

c – En déduire un encadrement de R_n pour $n \geq 2$.

4) Pour tout réel négatif x et pour tout entier naturel non nul n, on pose $G_n(x) = (-1)^n \displaystyle\int_x^0 e^{nt}dt$.

a – Calculer $G_n(x)$ et montrer que $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} G_n(x) = \frac{(-1)^n}{n}$.

b – Montrer que $G_1(x) + G_2(x) + \ldots\ldots + G_n(x) = -F_1(x) + (-1)^n F_{n+1}(x)$.

5) On pose, pour tout entier naturel non nul n, $U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

a – Montrer que $U_n = \text{Log } 2 + (-1)^{n+1} R_{n+1}$.

b – Montrer que la suite (U_n) converge et trouver sa limite.

REPUBLIQUE TUNISIENNE **MINISTERE DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION** ◆◆◆ **EXAMEN DU BACCALAUREAT** ◆◆◆ **SESSION DE JUIN 2006**	**SESSION PRINCIPALE** **SECTION : MATHEMATIQUES** **EPREUVE : MATHEMATIQUES** **DUREE : 4 heures COEFFICIENT : 4**

EXERCICE 1 (4 points)

θ étant un réel de l'intervalle $[0, 2\pi[$; on pose pour tout nombre complexe z

$$f_\theta(z) = z^2 - (i + e^{i\theta})z + (1 + i)(-1 + e^{i\theta})$$

1) a – Vérifier que $f_\theta(1 + i) = 0$

b – En déduire les solutions z' et z'' dans $\mathbb{C}$ de l'équation $f_\theta(z) = 0$.

2) Dans le plan complexe, rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ on considère les points A, B et M d'affixes respectives -1, $i\sqrt{3}$ et $-1 + e^{i\theta}$.

a – Montrer que lorsque θ varie dans $[0, 2\pi[$, M varie sur un cercle $(\mathscr{C})$ de centre A dont on précisera le rayon.

b – Déterminer les valeurs de θ pour lesquelles la droite (BM) est tangente au cercle $(\mathscr{C})$.

EXERCICE 2 (6 points)

Dans le plan orienté, on considère un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de diamètre [AB]. On désigne par F le point de $\mathscr{C}$ tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OF}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ et par Δ la perpendiculaire à (AB) en A.

La tangente à $\mathscr{C}$ en F coupe la droite Δ en un point A'. Soit $\mathscr{P}$ la parabole de foyer F et de directrice (AB).

1) a – Montrer que le point A' appartient à la parabole $\mathscr{P}$.

b – Préciser la tangente à $\mathscr{P}$ en A'.

2) Soit T la tangente à $\mathscr{C}$ au point B et soit B' le point d'intersection de cette tangente avec la droite (A'F).

Montrer que le triangle A'OB' est rectangle.

3) Soit $\mathscr{D}$ la droite passant par F et parallèle à (AB) et K le projeté orthogonal de F sur (AB).

a – Soit M un point de $\mathscr{D}$ distinct de F et soit H son projeté orthogonal sur la droite (AB).

Montrer que si M appartient à la parabole $\mathscr{P}$, alors FMHK est un carré.

b – En déduire une construction des deux points d'intersection de la droite $\mathscr{D}$ avec la parabole $\mathscr{P}$.

PROBLEME (10 points)

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = x + \text{Log}(1 + e^{-2x})$ et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

A – 1) a – Dresser le tableau de variation de f.

b – Montrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$ est une asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.

c – Déterminer la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{D}$

d – Tracer $\mathscr{D}$ et $\mathscr{C}$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

2) a – Montrer que f est une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[\text{Log } 2, +\infty[$

b – Construire la courbe $\mathscr{C}'$ représentative de la fonction f^{-1} réciproque de f.

3) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$

a – Montrer que pour tout t de $[0, +\infty[$ on a

$$1 - t \leqslant \frac{1}{1+t} \leqslant 1$$

b – En déduire que pour tout x de $[0, +\infty[$ on a

$$x - \frac{x^2}{2} \leqslant \text{Log}(1 + x) \leqslant x$$

c – En déduire un encadrement de $\text{Log}(1 + e^{-2t})$ pour tout t de $[0, +\infty[$

4) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on désigne par S_n la mesure de l'aire du domaine limité par la courbe $\mathscr{C}$, la droite $\mathscr{D}$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = n$.

a – Montrer que $\frac{3}{8} - \frac{1}{2}e^{-2n} + \frac{1}{8}e^{-4n} \leqslant S_n \leqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2n}$

b – Montrer que (S_n) est convergente vers un réel ℓ dont on donnera un encadrement.

B – On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \int_0^{\text{Log}2} dx$ et pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n = \int_0^{\text{Log}2} [f'(x)]^n dx$

1) Calculer u_0 et u_1.

2) a – Montrer que pour x de $[0, \text{Log } 2]$ on a $0 \leqslant f'(x) \leqslant \frac{3}{5}$

b – En déduire que pour tout entier naturel n

$$0 \leqslant u_n \leqslant \left(\frac{3}{5}\right)^n \text{Log } 2.$$

c – Calculer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

3) a – Montrer que pour tout x de $[0, +\infty[$ on a $1 - f''(x) = [f'(x)]^2$

b – Montrer que pour tout entier n tel que $n \geqslant 2$, on a $u_n = u_{n-2} - \frac{1}{n-1}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}$

c – En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on a :

$$u_{2n} = u_0 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}\left(\frac{3}{5}\right)^{2k-1} \quad \text{et} \quad u_{2n+1} = u_1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}\left(\frac{3}{5}\right)^{2k}$$

4) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on pose $v_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k}\left(\frac{3}{5}\right)^k$

Montrer que (v_n) converge vers un réel que l'on déterminera.

REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION
ET DE LA FORMATION

EXAMEN DU BACCALAUREAT

SESSION DE JUIN 2007

SESSION PRINCIPALE

SECTION : MATHEMATIQUES
EPREUVE : MATHEMATIQUES
DUREE : 4 heures COEFFICIENT : 4

EXERCICE 1 : (4 points)

1) Soit θ un réel de l'intervalle $]0, \pi[$.
Résoudre l'équation : $z^2 - 2i\,z - 1 - e^{2i\theta} = 0$

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, M et N d'affixes respectives $-1 + i$, $i + e^{i\theta}$ et $i - e^{i\theta}$ où θ est un réel de $]0, \pi[$.

a – Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont orthogonaux.

b – Montrer que lorsque θ varie dans $]0, \pi[$ les points M et N varient sur un cercle $\mathscr{C}$ que l'on déterminera.

3) a – Déterminer en fonction de θ l'aire $\mathscr{A}(\theta)$ du triangle AMN.

b – Déterminer la valeur de θ pour laquelle l'aire $\mathscr{A}(\theta)$ est maximale et placer dans ce cas les points M et N sur le cercle $\mathscr{C}$.

EXERCICE 2 : (6 points)

Soit ABC un triangle rectangle en C tel que $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

La bissectrice intérieure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}})$ coupe [AC] en O.

On désigne par H le projeté orthogonal de O sur (AB) et par H' le milieu de [OA].

1) a – faire une figure.
b – Montrer que le triangle OAB est isocèle et que H est le milieu de [AB].

2) Soit f la similitude directe telle que : f(B) = O et f(H) = H'.
a – Montrer que le rapport de f est $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et que $\frac{\pi}{6}$ est une mesure de son angle.
b – Montrer que H' est le milieu du segment [Of(A)].
En déduire que A est le centre de f.

3) Les cercles (Γ) et (Γ') de diamètres respectifs [AB] et [AO] se recoupent en D.
a – Montrer que les points B, O et D sont alignés.
b – Montrer que les triangles BCH et ODH' sont équilatéraux et que f(C) = D.
c – Montrer que le quadrilatère ADCH est un losange.

4) Soit $g = S_{(DH)} \circ f$, ou $S_{(DH)}$ est la symétrie axiale d'axe (DH).
a – déterminer g(A) et g(C).
b – Montrer que g est une similitude indirecte dont on précisera le rapport.
c – Soit Ω le centre de g.
Montrer que $\overrightarrow{\Omega D} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\Omega A}$.
Construire alors le centre Ω et l'axe Δ de g.

I.P.E.I.T	Série d'Algèbre n°1	Classes : MP
A.U : 2005/2006	Ensembles-Applications-Relations	

Exercice1

Soient E et F deux ensembles et f une application de E vers F. Pour toute partie A de E on pose $\overline{A}=C_E A$, S(A) = $f^{-1}(f(A))$ et $i(A) = \overline{s(\overline{A})}$.

1) Montrer que pour toutes parties A et B de E, on a :

- $A\subset s(A)$
- $A\subset B \quad \Rightarrow \quad s(A)\subset s(B)$
- $s(s(A))=s(A)$
- $s(A)=A \quad \Rightarrow \quad s(\overline{A})=\overline{A}$

2) Déduire que pour toutes parties A et B de E, on a :

- $i(i(A))=i(A)$
- $[\; s(B)=B$ et $B\subset A \;] \Rightarrow [B\subset i(A)]$

Exercice 2

Soient E, F, G et H quatre ensembles tels que H possède au moins deux éléments et f une application de F vers G. On désigne par $\mathscr{F}(E, F)$ l'ensemble des applications de E vers F.

1) Montrer que :

a- f est injective $\Leftrightarrow$ $[\forall g, h \in \mathscr{F}(E, F), (fog = foh \Rightarrow g = h)]$

b- f est surjective $\Leftrightarrow$ $[\forall g, h \in \mathscr{F}(G, H), (gof = hof \Rightarrow g = h)]$

2) Soit $u \in \mathscr{F}(E, F)$, $v\in \mathscr{F}(G, H)$ et

$$\begin{array}{rcl}\varphi : \mathscr{F}(F, G) & \to & \mathscr{F}(E, H) \\ f & \mapsto & \varphi(f) = vofou\end{array}$$

Montrer que si u est surjective et v est injective, alors φ est injective.

Exercice 3

Soient E et F deux ensembles non vides. On désigne par $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. A toute application f de E vers F on associe les deux applications :

$$\begin{array}{rcl}f' : \mathscr{P}(E) & \to & \mathscr{P}(F) \\ A & \mapsto & f(A)\end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl}f^* : \mathscr{P}(F) & \to & \mathscr{P}(E) \\ B & \mapsto & f^{-1}(B)\end{array}$$

1) Démontrer que : $\forall B\subset F,\ f'of^*(B) = B\cap f(E)$

2) Simplifier : $f^*of'of^*$ et $f'of^*of'$.

3) Démontrer que :

- f injective $\Leftrightarrow$ f' injective
- f injective $\Leftrightarrow$ f^* surjective

Exercice 4

Soient E et F deux ensembles et f une application de E vers F.

1) Montrer que :

$$\forall \; A', B' \in \mathscr{P}(F),\ f^{-1}(A'\Delta B') = f^{-1}(A')\Delta f^{-1}(B')$$

2) Montrer que si f est injective, alors pour toutes parties A et B de E, on a :

$f(A\cap B) = f(A) \cap f(B)$ et $f(C_E A) = C_F f(A)$

3) Montrer que f est injective si et seulement si :

$$\forall \; A, B \in \mathscr{P}(E), f(A\Delta B) = f(A)\Delta f(B)$$

Exercice 5

Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné non vide.

1) Soit f une application de E dans E vérifiant les propriétés suivantes :

(i) f est croissante

(ii) $\forall x \in E, x \leq f(x)$

(iii) $\forall x \in E, f(x) = f(f(x))$

On note $F = \{ x \in E \,/\, x = f(x) \}$

Montrer que pour tout x de E l'ensemble $F_x = \{ y \in F \,/\, x \leq y \}$ n'est pas vide et admet un plus petit élément.

2) Soient g une application de E dans E, G une partie de E telle que, pour tout x de E, l'ensemble $G_x = \{ y \in G \,/\, x \leq y \}$ est non vide et admet g(x) comme plus petit élément.

Démontrer que g vérifie les propriétés (i), (ii) et (iii) du 1).

Démontrer que $G = \{ x \in E \,/\, x = g(x) \}$.

3) f désigne une application vérifiant les mêmes hypothèses que dans 1).

On suppose de plus que toute partie non vide de E a une borne inférieure.

Montrer que la borne inférieure d'une partie non vide A de F est un élément de F.

Exercice 6

Soient E un ensemble fini non vide et φ une application de $\mathscr{P}(E)$ dans $\mathscr{P}(E)$ telle que :

(i) $\varphi(\emptyset) = \emptyset$

(ii) $\forall A \in \mathscr{P}(E)$, $\forall B \in \mathscr{P}(E)$, $\varphi(A \cup B) = \varphi(A) \cup \varphi(B)$.

(iii) $\forall A \in \mathscr{P}(E)$, card A $\leq$ card $\varphi(A)$.

1) Démontrer que pour toutes parties A et B de E, on a:

- $A \subset B \;\Rightarrow\; \varphi(A) \subset \varphi(B)$.
- $\varphi(A \cap B) \subset \varphi(A) \cap \varphi(B)$.

2) Une partie A de E est dite normale pour φ si et seulement si card A = card $\varphi(A)$.

a) Montrer que $\varphi(E) = E$.

b) Montrer que, si A et B sont deux parties normales de E, $A \cup B$ et $A \cap B$ sont normales et que $\varphi(A \cap B) = \varphi(A) \cap \varphi(B)$.

I.P.E.I.T	Série d'Algèbre n°5	Classes : MP
A.U : 2005/2006	Anneaux et corps	

Exercice 1

On désigne par A l'anneau ($\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$, + , **.**) des applications de **R** dans **R**.
1) Déterminer le groupe des éléments inversibles de A.
Donner un exemple de diviseur de zéro de A.
2) Montrer que $\varphi : A \to \mathbf{R}$

$$f \mapsto \varphi(f) = f(1)$$

est un morphisme d'anneaux surjectif.
Déterminer Kerφ . φ est-il injectif ?

Exercice 2

Soit (A,+,**.**) un anneau commutatif non nul.
On note B = {x∈ A ; x² = x} (ensemble des idempotents de A).
On appelle caractéristique de A, le plus petit entier n de **N*** tel que $n1_A = 0_A$, s'il existe, et vaut 0 si non.
1) a- Montrer que si x ∈ B alors (1-x) ∈ B et (1-x) ≠ x.
b- Montrer que dans B la relation $\Re$ définie par : $\forall(x, y) \in B^2, \left[x\Re y \Leftrightarrow y = x ou y = 1-x\right]$
est une relation d'équivalence dans B.
c- En déduire que si B a un nombre fini d'éléments n, alors n est un nombre pair.
2) On définit dans B la loi * par ∀ (x,y)∈ B², x*y = x+y-2xy.
a- Montrer que (B,*) est un groupe commutatif .
b- Montrer que (B,*,**.**) est un anneau commutatif de caractéristique 2.
c- Montrer que si (A,+,**.**) est intègre , alors (B,*,.) est isomorphe à (**Z**/2**Z**,+,**.**)

Exercice 3 (Anneau produit)

(A,+,**.**) et (B,+,**.**) désignent deux anneaux. On définit sur A×B les lois produits :
∀ (a,b)∈ A×B et ∀ (a',b')∈ A×B
addition : (a,b) + (a',b') = (a+a',b+b')
Multiplication : (a,b).(a',b') = (a.a',b.b')
1) a- Montrer que A×B muni de ces deux lois est un anneau (appelé anneau produit de A par B)
b- Montrer que l'anneau produit A×B est commutatif ssi les anneaux A et B le sont.
c- Montrer que si les anneaux A et B sont intègres A×B ne l'est pas.
2) Soit A= {0,1} un anneau intègre à deux éléments et soit A^n le produit de n anneaux A(n∈ N*).
Montrer que tout élément X de A^n est idempotent (ie. vérifie X² = X). Déterminer les diviseurs de zéro de A^n.

Exercice 4 (Anneau des endomorphismes d'un groupe abélien)

Soit (G,+) un groupe et soit E un ensemble quelconque.
Sur l'ensemble G^E on définit la loi associée à celle de G par :
∀ f,g∈ G^E, (f ⊕ g) : x ↦ (f ⊕ g)(x)=f(x) +g(x)
1) Montrer que (G^E , ⊕) est un groupe.
2) On suppose que E = G et l'on considère l'ensemble $\mathcal{L}$(G) des endomorphismes du groupe G.
Montrer que si G est commutatif alors $\mathcal{L}$(G) est un sous-groupe de (G^G, ⊕) .
3) Montrer que ($\mathcal{L}$(G) , ⊕ , o) est un anneau? Montrer qu'il existe des diviseurs de zéro.

Exercice 5

Soit (A,+,**.**) un anneau et x,y deux éléments de A.
1) Montrer que si xy est nilpotent alors yx l'est aussi.
2) Montrer que si x et y sont deux éléments nilpotents qui commutent, alors xy et x+y sont nilpotents

3) Soit x un élément nilpotent de A. Démontrer que 1-x est inversible et calculer son inverse.

Exercice 6

Soit A= {0,1} un anneau intègre à deux éléments. E étant un ensemble quelconque, on considère l'anneau ($\mathcal{F}$(E, A), +, **.**) des applications de E dans A.
1) Montrer que tout a $\in$ $\mathcal{F}$(E, A) est idempotent. Quels sont les diviseurs de zéro de cet anneau ?
2) A tout a $\in$ $\mathcal{F}$(E, A) on associe $X \in \mathcal{P}(E)$ tel que $X = \{x \in E / a(x) = 1\}$
i- Montrer que l'application $\Phi : a \mapsto X = \Phi(a)$ est une bijection de $\mathcal{F}$(E,A) sur $\mathcal{P}$(E).
ii- Montrer que, si $\Phi(a) = X$ et $\Phi(b) = Y$ (b) = Y, alors $\Phi(a+b) = X\Delta Y$ et $\Phi(ab) = X \cap Y$.
En déduire que ($\mathcal{P}$(E), Δ, $\cap$) est un anneau isomorphe à ($\mathcal{F}$(E, A), +, **.**) .

Exercice 7 (Extension simple)

On considère l'ensemble **Z**[$\sqrt{2}$] = {n+p$\sqrt{2}$; (n,p) $\in$ $\mathbf{Z}^2$}
1) Montrer que **Z**[$\sqrt{2}$] est un sous-anneau de (**R**,+,**.**).
2) On considère l'application φ : **Z**[$\sqrt{2}$] $\to$ **Z**[$\sqrt{2}$] ; n+p $\sqrt{2}$ $\mapsto$ n-p $\sqrt{2}$
Montrer que φ est un automorphisme de l'anneau **Z**[$\sqrt{2}$].
3) Pour tout x $\in$ **Z**[$\sqrt{2}$], on pose N(x) = x.φ(x)
Montrer que N est un morphisme multiplicatif de (**Z**[$\sqrt{2}$],**.**) dans (**Z,.**).0
Montrer que x est inversible dans **Z**[$\sqrt{2}$] si, et seulement si, N(x) = $\pm$ 1. Donner des exemples d'éléments inversibles de **Z**[$\sqrt{2}$].

Exercice 8

Soit (A,+,.) un anneau intègre fini.
Pour tout a $\in$ A\{0}, on considère l'application f de A dans A définie par : f(x) = a.x.
Montrer que f est injective. En déduire que (A,+,.) est un corps.

Exercice 9

1) Montrer que dans un anneau non nul, un diviseur de zéro n'est pas inversible.
2) Soit (K,+,**.**) un corps commutatif. On sait que (K$\times$K,+,**.**) est un anneau commutatif.
a) Démontrer que (K$\times$K,+,**.**) n'est pas un corps.
b) Démontrer que la diagonale de K$\times$K est un corps isomorphe à K.

Exercice 10 : (Anneau ($\mathbf{Z}/_{n\mathbf{Z}}$, $\hat{+}$,$\hat{\times}$)

Pour tout entier n$\in$ **N**,on définit dans $\mathbf{Z}/_{n\mathbf{Z}}$ une addition et une multiplication, notées respectivement $\hat{+}$ et $\hat{\times}$, par : $\forall(\bar{x}, \bar{y}) \in (\mathbf{Z}/_{n\mathbf{Z}})^2$, $\bar{x} \hat{+} \bar{y} = \overline{x+y}$ et $\bar{x} \hat{\times} \bar{y} = \overline{x \times y}$
1) Montrer que pour tout n$\in$ **N**, ($\mathbf{Z}/_{n\mathbf{Z}}$, $\hat{+}$,$\hat{\times}$) est un anneau commutatif. Est-il toujours intègre ?
2) Soit n $\in$ **N***. montrer l'équivalence suivante :
$\bar{x}$ est inversible dans ($\mathbf{Z}/_{n\mathbf{Z}}$, $\hat{+}$,$\hat{\times}$) $\Leftrightarrow$ $x \wedge n = 1$
En déduire que si p est un entier premier alors ($\mathbf{Z}/_{n\mathbf{Z}}$, $\hat{+}$,$\hat{\times}$) est un corps commutatif.
3) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
i) ($\mathbf{Z}/_{n\mathbf{Z}}$, $\hat{+}$,$\hat{\times}$) est un corps commutatif
ii) ($\mathbf{Z}/_{n\mathbf{Z}}$, $\hat{+}$,$\hat{\times}$) est intègre
iii) n est un nombre premier
4) Etablir les tables d'addition et de multiplication de $\mathbf{Z}/_{8\mathbf{Z}}$. Déterminer les éléments inversibles de $\mathbf{Z}/_{8\mathbf{Z}}$ et les diviseurs de zéro, vérifier que ces derniers sont nilpotents.

I.P.E.I.T	Série d'Algèbre n°8	Classes : MP
A.U : 2005/2006	Espaces vectoriels de dimensions finies	

Exercice 1

Dans le **R**-ev $\mathbf{R}^4$ on donne les vecteurs : $u = (1,0,1,0)$; $v = (0,1,-1,0)$; $w = (1,1,1,1)$
$e = (0,0,1,0)$ et $r = (1,1,0,-1)$
Soient les sev de $\mathbf{R}^4$: $F = \mathrm{Vect}\{u, v, w\}$ et $G = \mathrm{Vect}\{e, r\}$.
Donner les dimensions des sev : F, G, F+G et $F \cap G$

Exercice 2

Soit l'ensemble $F = \{(x,y,z) \in \mathbf{C}^3 / x + y + z = 0 \text{ et } x + iy - z = 0\}$.
Montrer que F est un sev de $\mathbf{C}^3$. En donner une base et la dimension.

Exercice 3

Soit E un K-ev
1. Montrer que si l'on rajoute à une famille libre $\mathcal{L}$ de E un vecteur qui n'est pas combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{L}$, alors on obtient une famille libre de E.
2. Montrer que si on si enlève à une famille génératrice $\mathcal{G}$ de E un vecteur, combinaison linéaire des autres vecteurs de $\mathcal{G}$, alors on obtient une famille génératrice de E.

Exercice 4

Soient E un **K**-ev ($E \neq \{0\}$) et $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ deux parties finies, non vides et disjointes de E.

Montrer que : $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$ est libre $\Leftrightarrow$ $< \mathcal{L}_1 > \cap < \mathcal{L}_2 > = \{0_E\}$

Exercice 5

Soient $n \in \mathbf{N}$, $z_0, \ldots z_n$ des nombres complexes deux à deux distincts.

Montrer que la famille $((X-z_k)^n)_{0 \le k \le n}$ est libre dans $\mathbf{C}[X]$ (On pourra faire une récurrence sur n)

Exercice 6

Soient E un **K**-ev ($E \neq \{0\}$) et f un endomorphisme de E nilpotent, d'indice de nilpotence p
(ie : $f^{p} = \tilde{0}$ et $f^{p-1} \neq \tilde{0}$, $p \in \mathbf{N}^*$)
Montrer que la famille $(Id_E, f, f^2, \ldots , f^{p-1})$ est libre dans $\mathcal{L}(E)$.

Exercice 7

Dans le **R**-ev $\mathbf{R}^4$ on donne les vecteurs : $v_1 = (1,2,0,1)$; $v_2 = (1,0,2,1)$; $v_3 = (2,0,4,2)$,
$e_1 = (1,2,1,0)$; $e_2 = (-1,1,1,1)$; $e_3 = (2,-1,0,1)$ et $e_4 = (2,2,2,2)$
1. Soit E le sev de $\mathbf{R}^4$ engendré par $\{v_1 , v_2 , v_3 \}$
   a- Donner une base de E.
   b- Montrer que la famille (v_1 , v_2 , e_1 , e_2) est libre.
   c- Donner un supplémentaire de E dans $\mathbf{R}^4$.
2. Soit F le sev de $\mathbf{R}^4$ engendré par $\{e_1 , e_2 , e_3 , e_4\}$
Donner une base de F
3. Donner une base de E + F. En déduire que $E + F = \mathbf{R}^4$
4. a- Montrer que le vecteur $w = v_1 + v_2$ appartient à $E \cap F$
   b- Donner une base de $E \cap F$.

Exercice 8

Soient G un **R**-ev de dimension 3 et k un réel strictement positif.

Soit u un endomorphisme de G, non bijectif tel que $u^3 + k.u = \tilde{0}$ (où $u^3 = uouou$)
1. Montrer que $G = Ker(u) \oplus Im(u)$
2. Montrer que la restriction $\tilde{u}$ de u à Im(u) est un automorphisme de Im(u)
3. Montrer que : $\forall\ x \in Im(u), u^2(x) = -k.x$

Exercice 9

Soient E un **K**-ev de dimension finie et f et g deux endomorphismes de E tels que :
$F + g = Id_E$ et $rg(f)+ rg(g) \leq dimE$

a- Montrer que $E = Im(f) \oplus Im(g)$

b- Montrer que f et g sont des projecteurs de E

Exercice 10

Soit l'application $f : \mathbf{R}[X] \to \mathbf{R}[X], \quad P \mapsto P - XP'$
Montrer que f est linéaire et déterminer Ker(f) et Im(f).

Exercice 11

Soient E un **K**-ev de dimension finie ($n\in \mathbf{N}$) et F et G deux sev de E.
1. Montrer que si dimF + dimG > n, alors $F\cap G \neq \{0_E\}$
2. On suppose que dimF < n et soit x_o un vecteur de E - F.
Déterminer la dimension de $F + <x_o>$
3. On suppose que n = 2 et dimF = dimG = 1. Montrer que F = G ou $E = F\oplus G$

Exercice 12

Soit dans **R**[X] les polynômes : $P_0 = 1$, $P_1 = X+1$, $P_2 = (X+1)^2$, $P_3 = (X+1)^3$
1. Montrer que la famille (P_0 , P_1 , P_2 , P_3) est une base de $\mathbf{R}_3[X]$.
2. Calculer les coordonnées du polynôme $Q = X^3 + 2X^2$ sur cette base.

Exercice 13

Soit dans **R**[X] la famille $(P_k)_{0\le k\le n}$ de polynômes non nuls tels que :
pour tout $k \in [[1,n]]$, $degP_k = k$
1. Montrer que $(P_k)_{0\le k\le n}$ est une base de $\mathbf{R}_n[X]$.
2. Soit l'ensemble $F = \{P\in \mathbf{R}_n[X] / P(1) = 0\}$
Montrer que F est un sev de $\mathbf{R}_n[X]$. En donner une base et la dimension.

Exercice 14

Soient $n \in \mathbf{N}-\{0,1\}$ et $f : \mathbf{R}_n[X] \to \mathbf{R}_n[X]$ définie par :
$\forall P \in \mathbf{R}_n[X], f (P) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$
1. Montrer que f est linéaire.
2. Calculer f(1), f(X), $f(X^{2k})$ et $f(X^{2k+1})$
3. Déterminer une base de Im(f) et une base de Ker(f).
2. Soit $Q\in Im(f)$. Montrer qu'il existe un polynôme P de $\mathbf{R}_n[X]$,unique, tel que :
$f(P) = Q$ et $P(0) = P'(0) = 0$

Exercice 15

Soit u un endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ de rang 1.
1. Montrer qu'il existe un réel k, unique tel que $u^2 = k.u$

2. Montrer que si k est différent de 1, alors (u - $id_{\mathbf{R}^n}$) est inversible. Exprimer son inverse (On pourra calculer $u^2 - u$).

Exercice 16

Soient E un **R**-ev de dimension finie n (n > 0) et f un endomorphisme de E nilpotent, d'indice de nilpotence n (ie : $f^n = \tilde{0}$ et $f^{n-1} \neq \tilde{0}$, $n \in \mathbf{N}^*$)
Montrer qu'il existe un vecteur a dans E tel que $(a, f(a), \dots, f^{n-1}(a))$ soit une base de E.

Exercice 17

Soient E un **R**-ev de dimension finie n et f un endomorphisme de E tel que $fof = -id_E$.
Soit G un sev de E stable par f. (ie : $f(G) \subset G$)
Pour tout vecteur non nul a de E, on pose $F_a = Vect(a, f(a))$.
1. Soit $a \in E - \{0\}$. Montrer les équivalences suivantes :
i) $a \in G \quad \Leftrightarrow \quad F_a \subset G$
ii) $a \notin G \quad \Leftrightarrow \quad F_a \cap G = \{0\}$
2. En déduire que si dimE = 4, il existe alors des vecteurs a_1 et a_2 de E tels que : $E = F_{a_1} \oplus F_{a_2}$

Exercice 18

Soient E un espace vectoriel sur **R**, et u un endomorphisme de E tel que :
$u^2 + u + id_E = \tilde{0}$, ($\tilde{0}$ désigne l'endomorphisme nul de E)
Montrer que pour tout vecteur non nul x de E, la famille $(x, u(x))$ est libre.

Exercice 19

Soient E un **K**-espace vectoriel, E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E de dimensions finies.
1. Soit l'application $f : E_1 \times E_2 \to E$, définie par : $\forall (x,y) \in E_1 \times E_2$, $f((x,y)) = x + y$
Montrer que f est linéaire. Déterminer Ker$f$ et Imf
2. Soit l'application $g : E_1 \cap E_2 \to \mathrm{Ker}f$, définie par : $\forall x \in E_1 \cap E_2$, $g(x) = (x, -x)$
Montrer que g est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
2. En déduire que : $\dim(E_1 + E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim(E_1 \cap E_2)$

Exercice 20

Soient E et F deux espaces vectoriels sur un même corps commutatif **K** et h une application linéaire de E dans F. On se donne un supplémentaire E' de Ker$h$ dans E, et un supplémentaire F' de Imh dans F.

1. Montrer que la restriction $\tilde{h}$ de h à E' définit un isomorphisme d'espaces vectoriels de E' sur Imh.
2. Montrer que pour tout élément y de F il existe un couple unique $(x', y') \in E' \times F'$ tel que : $y = h(x') + y'$. On pose $x' = g(y)$, pour tout $y \in F$.
3. Montrer que g définie une application linéaire de F dans E.
4. Montrer que Ker$g$ = F' et Img = E'.
5. Montrer que $hogoh = h$ et $gohog = g$.
6. Montrer que hog et goh sont des projecteurs dont on déterminera les noyaux et les images.
7. Montrer que si h est bijective alors $h^{-1} = g$.
8. Etude de la réciproque.

On suppose qu'il existe une application linéaire v de F dans E telle que :
$hovoh = h$.

   a) Montrer que Im(voh) est un supplémentaire de Ker$h$ dans E
   b) Montrer l'équivalence : $\mathrm{Im}v = \mathrm{Im}(voh) \quad \Leftrightarrow \quad vohov = v$.

IPEIT	***TEST D'ALGEBRE N^{O}1***	***(Sections : MP)***
AU: 05/01/2006		

Exercice (1)

Soient f une application de E dans F et $A \subset E$.

1) Montrer que $A \subset f^{-1}(f(A))$.

2) Démontrer les implications suivantes :

- (f est injective)$\Rightarrow$ $A = f^{-1}(f(A))$.
- $[\forall Y \subset F,\ Y \subset f(f^{-1}(Y)]$ $\Rightarrow$ [f est surjective]

Exercice (2)

On munit $\mathbf{R}$ de la loi de composition interne définie par :

$\forall (a,b) \in \mathbf{R}\times\mathbf{R}$, $a * b = \sqrt[3]{a^3 + b^3}$

montrer que $(\mathbf{R}, *)$ est un groupe abélien isomorphe au groupe $(\mathbf{R},+)$

Exercice (3)

Pour tous n$\in$ **N*** et a$\in$ **Z**, on note $cl_n(a)$ la classe de a dans $\mathbf{Z}/_{\mathbf{nZ}}$.

Soient n et p deux entiers naturels non nuls.

On considère la correspondance :

$$\varphi : \mathbf{Z}/_{\mathbf{npZ}} \to \mathbf{Z}/_{\mathbf{nZ}} \times \mathbf{Z}/_{\mathbf{pZ}}$$

$$\varepsilon \mapsto (cl_n(x), cl_p(x))$$

où x est un entier relatif tel que $\varepsilon = cl_{np}(x)$

1) Montrer que φ définie une application de $\mathbf{Z}/_{\mathbf{npZ}}$ vers $\mathbf{Z}/_{\mathbf{nZ}} \times \mathbf{Z}/_{\mathbf{pZ}}$.

2) On suppose que $n \wedge p = 1$.

Montrer que φ est un isomorphisme du groupe ($\mathbf{Z}/_{\mathbf{npZ}}$, $\hat{+}$) sur le groupe ($\mathbf{Z}/_{\mathbf{nZ}} \times \mathbf{Z}/_{\mathbf{pZ}}$, $\dot{+}$) ;

où $\dot{+}$ désigne l'addition produit définie dans $\mathbf{Z}/_{\mathbf{nZ}} \times \mathbf{Z}/_{\mathbf{pZ}}$ par :

$(cl_n(x), cl_p(x')) \dot{+} (cl_n(y), cl_p(y')) = (cl_n(x) \hat{+} cl_n(y), cl_p(x') \hat{+} cl_p(y'))$

$= (cl_n(x + y), cl_p(x' + y'))$

I.P.E.I.T	Devoir surveillé d'algèbre n°2	Classes : MP
(23/01/06)		Durée : 1h30'

Exercice 1 : (13 points)

Données :

- E et F sont deux espaces vectoriels sur un corps commutatif K.
- $\mathcal{L}(E,F)$ désigne l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans F.
- On appelle forme linéaire sur E toute application linéaire de E dans K.
- Le K-espace vectoriel des formes linéaires sur E est noté E*.($E^* = \mathcal{L}(E,K)$.)
- Soit $f\in \mathcal{L}(E,F)$, on pose : $\varphi_f : \begin{array}{ccc} F^* & \to & E^* \\ v & \mapsto & vof \end{array}$

Questions :

1) Montrer que φ_f est linéaire.

2) **a)** Montrer que : $v\in \operatorname{Ker} \varphi_f \Leftrightarrow \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} v$.

b) Déduire que : f est surjective $\Rightarrow$ φ_f est injective.

c) Soient $v\in E^*$ et p un projecteur de E, montrer que :

$vop = v \Leftrightarrow \operatorname{Ker} p \subset \operatorname{Ker} v$

3) Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E,F) & \to & \mathcal{L}(F^*,E^*) \\ f & \mapsto & \varphi_f \end{array}$

a) Montrer que φ est linéaire.

b) Montrer que φ est injective.

(Indication : on pourra utiliser –sans démontrer- le résultat suivant :

« $\forall a\in F\backslash\{0_E\}, \exists v\in F^*$ tel que $v(a)\neq 0_K$ ».)

c) Soit $f\in \mathcal{L}(E,F)$. Montrer que si f est bijective alors φ_f est bijective.

Déterminer alors $(\varphi_f)^{-1}$.

4) Montrer que si p est un projecteur de E, alors $\varphi_p : \begin{array}{ccc} E^* & \to & E^* \\ v & \mapsto & vof \end{array}$

est un projecteur dont on déterminera $\operatorname{Ker} \varphi_p$ et $\operatorname{Im} \varphi_p$.

5) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E, $F_1 = \{v\in E^* \ / \ F\subset \operatorname{Ker} v\}$et $G_1 = \{ v\in E^* \ / \ G\subset \operatorname{Ker} v \}$.

a) Montrer que F_1 est un sous-espace vectoriel de E*.

b) On suppose que $E = F\oplus G$, et on considère $p_1 : P\to P$, la projection sur G parallèlement à F et $p_2 : P\to P$, la projection sur F parallèlement à G.

Montrer que : $\forall v\in E^*$, on a : $v = vop_1 + vop_2$.

En déduire que $E^* = F_1\oplus G_1$.

c) Montrer que si s est une symétrie de E, alors φ_s est une symétrie de E*.

d) Montrer que si de plus s est la symétrie par rapport à F parallèlement à G, alors φ_s est la symétrie par rapport à G_1 et parallèlement à F_1.

(Voir l'exercice 2 au verso)

Exercice 2 : (7 points)

Soit (K, +, **.**) un corps commutatif dont les éléments neutres de l'addition et de la multiplication sont respectivement notés : 0_K et 1_K .
Dans K^2 , on définit les deux lois de composition internes :
$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$
$(x, y) \times (x', y') = (x.x'-y.y', x.y'+x'.y)$.
On note L l'anneau $(K^2, +, \times)$ dont l'élément neutre pour l'addition est $(0_K, 0_K)$ et l'élément neutre pour la multiplication est $(1_K, 0_K)$.

1) On suppose qu'il existe un élément ε de K vérifiant $\varepsilon^2 = -1_K$.

a) Déterminer à l'aide de ε l'ensemble $\mathcal{D} = \{(a, b) \in K^2 \ / \ a^2 + b^2 = 0_K\}$.

b) Soit $(a, b) \in K^2$ tel que $(a,b) \neq (0_K, 0_K)$. Résoudre dans K^2 le système d'inconnue (x, y) suivant :

$$\begin{cases} ax - by = 0_K \\ bx + ay = 0_K \end{cases}$$

(Discuter les différents cas suivants a et b.)

c) En déduire les diviseurs de zéro dans L, L est-il un corps ? Justifier la réponse.

2) Montrer que si l'équation $x^2 + 1_K = 0_K$ n'a pas de racines dans K, alors L est un corps
Donner dans ce cas l'inverse d'un élément (a, b) non nul de K^2.

I.P.E.I.T (10/03/06)	Examen d'algèbre n°2	Classes : MP Durée : 2h

Exercice 1 : (3 points)

Décomposer dans **C**[X] et dans **R**[X] la fraction rationnelle :

$$F = \frac{X^2+X+1}{(X-1)^5(X^2-X+1)}$$

Exercice 2 : (8 points)

Le but de cet exercice est de chercher des polynômes P et Q de **C**[X] vérifiant :

$$P^2 = 1+ (X^2 - 1)\, Q^2$$

On désigne par d^oP, le degré du polynôme P, et par P' le polynôme dérivé de P.

1) Montrer que si P est un polynôme constant alors (Q = 0 et P = +1 ou P = -1).

Dans la suite de l'exercice, on suppose que P est non constant.

2) Soit $n = d^oP$ ($n \geq 1$).

Montrer que : $d^oP' = d^oQ = n-1$.

3) a- Montrer que P et Q sont premiers entre eux.

b- Vérifier que : $2\, PP' = [2XQ + 2(X^2 - 1)Q'].Q$

En déduire que Q divise P'.

c- Montrer que $nQ = P'$ ou $(-n)Q = P'$.

4) Montrer que les racines de P sont simples (racines dans **C**).

5) Montrer que $(X^2 - 1)P'' + XP' = n^2P$.

6) Déterminer tous les polynômes P et Q de **C**[X] vérifiant :

$$P^2 = 1+ (X^2 - 1)\, Q^2 \quad \text{et} \quad d^oP = 2$$

Exercice 3 : (9 points)

Soit E un R-ev de **dimension finie**. On suppose qu'il existe un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que :$fof = -id_E$.

Un sev F de E est dit **stable** par f si $f(F) \subset F$.

1) Justifier que f est bijective et donner f^{-1}.

2) Soit e un vecteur **non nul** de E. On note $F_e = Vect(e, f(e))$ le sev de E engendré par la famille $(e, f(e))$.

Démontrer que la famille $(e, f(e))$ est libre. En déduire la dimension de F_e.

3) Soit $u \in E-\{0_E\}$.

Montrer que F_u est le plus petit sev de E contenant u et stable par f.

4) Démontrer que si u est un vecteur **non nul** de F_e alors $F_e = F_u$.

5) Soit G un sev de E stable par f et ne contenant pas e. Démontrer que $G \cap F_e = \{0_E\}$.

6) On suppose que dimE = 4.

Montrer qu'il existe des vecteurs e_1 et e_2 de E tels que $E = F_{e_1} \oplus F_{e_2}$.

7) Étude de la réciproque.

On désigne par (e_1, e'_1, e_2, e'_2) une base de E.

Trouver un endomorphisme $g \in \mathcal{L}(E)$, tel que $gog = -id_E$.

8) On suppose qu'il existe un endomorphisme $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $gog = -id_E$. D'après **6)**, il existe des vecteurs e_1, e_2, u_1, u_2 de E tels que $E = F_{e_1} \oplus F_{e_2} = G_{u_1} \oplus G_{u_2}$, avec $G_{u_i} = Vect(u_i, g(u_i))$ pour $i \in \{1, 2\}$. On définit l'application h de E vers E par :

$h(e_i) = u_i$ et $h(f(e_i)) = g(u_i)$ pour $i \in \{1, 2\}$.

Montrer que h est un automorphisme de E vérifiant : $g = hofoh^{-1}$